

Korrespondenzzirkel Klasse 6 – 5. Serie

Liebe Schüler (und liebe Eltern),

dies ist die erste Übungsserie für dieses Schulhalbjahr. Die Lösungen zur 4. Serie müsstet ihr inzwischen alle per Post erhalten haben. Leider haben viele von euch den Aufgabenkomplex „Kluges Rechnen“ auch mit Musterlösungen und Beispielen noch nicht verstanden, sodass wir uns mit der Thematik beim nächsten Zirkeltreffen noch einmal auseinander setzen. Ansonsten wie eh und je die zwei Hauptkritikpunkte: fehlende Begründungen und zum Teil auch eine unzumutbare Form. Im Allgemeinen merkt man aber an euren Lösungen, dass ihr sicherer mit dem Aufschreiben des Lösungsweges werdet.

Diese Serie widmet sich dem Thema „Dirichletsches Schubfachprinzip“ (Aufgaben 1-3), welches ich im Folgenden kurz erläutern werde. Zur Festigung schon behandelter Themen beschäftigt sich Aufgabe 4 noch einmal mit „Zahlen gesucht“ während ihr euch in Aufgabe 5 mit dem Pascalschen Dreieck vertraut machen könnt, dass bei späteren Themen von großer Bedeutung ist.

Als Bearbeitungszeit sind 4 Wochen vorgesehen, deswegen schickt mir bitte eure Lösungen (ganz wichtig sind die Begründungen, damit ich nachvollziehen kann, wie ihr zu der Lösung gekommen seid) bis zum **20.03.2013** an die folgende Adresse:

Maria Fuchs

Luppenstraße 6, 04177 Leipzig

Oder gebt sie am Termin für das dritte Zirkeltreffen am 23.03. von 10:00 bis 12:00 im neuen Universitätsgebäude (Augustusplatz 10, Treff 9:50 vor dem Vapiano) ab. **Bitte gebt per Mail oder telefonisch Bescheid, ob ihr teilnehmt!** Änderungen erfahrt ihr wie immer auf der Website der LSGM (<http://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.Kozi>), also schaut immer mal nach.

Sollten noch organisatorische Fragen oder Fragen zu den Aufgaben offen sein, dann schreibt mir doch einfach eine E-Mail (maria.fuchs@maju.l.shuttle.de) oder ruft mich an (0172-8745734).

Dirichletsches Schubfachprinzip

Das Schubfachprinzip ist zugleich eines der einfachsten, aber auch eines der wirkungsvollsten Prinzipien in der Mathematik. Zunächst ein paar einfache Beispiele, die beim Verstehen der Aufgaben helfen sollen:

- Von 13 Personen haben mindestens zwei im selben Monat Geburtstag.
- Wenn die Anzahl der Haare auf dem Kopf eines Menschen nicht größer als 1000000 ist, dann gibt es in Berlin (3,5 Mio. Einwohner) mindestens zwei Personen mit der gleichen Anzahl Haaren auf dem Kopf.
- Zieht man 3mal aus einer Sockenbox mit Socken in zwei verschiedenen Farben, so hat man garantiert ein passendes Paar.

Allgemein lässt sich das Schubfachprinzip wie folgt formulieren:

Seien m Objekte („Murmeln“) in n Kategorien („Schubfächer“) eingeteilt. Wenn $m > n$ gilt, gibt es mindestens eine Kategorie, die mindestens zwei Objekte enthält.

Das Prinzip ist leicht zu verstehen, schwierig hingegen ist es oftmals, herauszufinden, was die Objekte und was die Schubfächer sind. Dazu ein Beispiel:

Beispiel: Gegeben sei eine Gerade und ein Dreieck ABC . Die Gerade geht durch keinen Punkt des Dreiecks. Zeige, dass die Gerade nicht alle Seiten des Dreiecks schneidet.

Lösung: Die Gerade teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Die Objekte sind in diesem Fall die Punkte, die Schubfächer sind die Halbebenen. Also müssen $(3 > 2)$ in einer Halbebene mindestens zwei Punkte liegen. Die Verbindung dieser zwei Punkte liegt dann ebenfalls in dieser Halbebene und wird von der Gerade nicht geschnitten (da diese ja die Halbebene erst erzeugt hat).

Tip: Findet zunächst heraus, was die Murmeln und was die Schubfächer sind. Von den Murmeln muss es mindestens eine mehr geben als von den Schubfächern, um das Schubfachprinzip anwenden zu können.

Aufgaben

1. Dirichletsches Schubfachprinzip I

Beweise folgende Aussage: Wenn man mit Dartpfeilen 5 mal auf ein Ziel wirft, dass die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $2m$ hat, dann gibt es wenigstens zwei Treffer, deren Abstand kleiner oder gleich $1m$ ist.

2. Dirichletsches Schubfachprinzip II

Zeige: In jeder Gruppe mit x Personen ($x \geq 2$) gibt es mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl an Bekannten haben. Dabei zählt eine Person nicht sich selbst als bekannt. Und wenn eine Person A eine andere Person B kennt, so kennt Person B auch Person A .

3. Dirichletsches Schubfachprinzip III

In einer $n+1$ elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 2n\}$ gibt es zwei Zahlen, sodass die erste Zahl die zweite teilt.

4. Aufgabe – Wiederholung Zahlen gesucht

- Wie viele Paare (x, y) aus natürlichen Zahlen gibt es, für die $0 < x < y$ gilt und die die Ungleichung $5xy < 65$ erfüllen?
- Wenn man vor eine einstellige Zahl die Ziffer 8 schreibt, dann ist die so erhaltene Zahl um 9 größer als jene Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffer 8 hinter diese einstellige Zahl setzt. Um welche Zahl handelt es sich?
- Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Die Einerziffer des einen Summanden ist die Null. Streicht man diese Null, dann erhält man den anderen Summanden. Wie lauten die beiden Zahlen?

5. Aufgabe – Pascalsches Dreieck

Der französische Mathematiker Pascal (1623-1662) hat sich mit dem nachstehend angegebenen „Zahlendreieck“ beschäftigt.

Entdecke das Bildungsgesetz dieses Zahlendreiecks! Ergänze die Leerstellen! Suche nach weiteren Gesetzmäßigkeiten! (Betrachte die Summe der Zahlen in den Zeilen; die Summe von Zahlen in den schrägen Reihen)

```
      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 _ 1
 1 5 10 _ _ 1
1 6 15 _ _ _ 1
1 _ _ _ _ _ 1
1 _ _ _ _ _ _ 1
```