Korrespondenzzirkel Klasse 6 – 2. Serie

Liebe Schüler (und liebe Eltern),

dies ist die zweite der Übungsserien für dieses Schulhalbjahr. Eure Lösungen der ersten Serie erhaltet ihr per Post zusammen mit den Musterlösungen. Mir ist aufgefallen, dass einige von euch ihre Lösungen immer noch nicht begründen. Tut das bitte, in Zukunft gibt es sonst auch bei vollständig richtiger Lösung keine Punkte!

Die Aufgaben beschäftigen sich mit dem Thema „Kluges Rechnen und Finden von Gesetzmäßigkeiten".

Als Bearbeitungszeit sind 4 Wochen vorgesehen, deswegen schickt mir bitte eure Lösungen (ganz wichtig sind die Begründungen, damit ich nachvollziehen kann, wie ihr zu der Lösung gekommen seid) bis zum **01.12.2012** an die folgende Adresse (ich bin umgezogen!!!):

Maria Fuchs

Luppenstraße 6, 04177 Leipzig

Oder bringt die Lösungen zum ersten Zirkeltreffen mit, denn dieses findet ebenfalls am 01.12. von 10:00 bis 12:00 in der Johannisgasse statt. Wie gehabt treffen wir uns 9:45 vor dem Eingang. Schaut bitte regelmäßig auf die Website der LSGM (http://lsgm.uni-leipzig.de/tiki-index.php?page=Zirkel.Kozi), damit ihr über eventuelle Änderungen informiert seid.

Sollten noch organisatorische Fragen oder Fragen zu den Aufgaben offen sein, dann schreibt mir doch einfach eine E-Mail (maria.fuchs@maju.l.shuttle.de) oder ruft mich an (0172-8745734).

Kluges Rechnen und Finden von Gesetzmäßigkeiten

Am besten lässt sich diese Thematik an einem Beispiel erklären:

Der Erzählung nach war der Mathematiklehrer von Carl Friedrich Gauß (einer der berühmtesten Mathematiker, auf dem 10-DM-Schein abgebildet) recht faul und wollte während die Kinder seine endlosen Aufgaben rechneten, in Ruhe Zeitung lesen. Deswegen stellte er ihnen die folgende Aufgabe:

$$1+2+\ldots+99+100=?$$

Er ging davon aus, jetzt genug Zeit für die Zeitungslektüre zu haben, bis die Kinder die Aufgabe gelöst hätten. Doch er hatte sich geirrt – bereits nach 2 Minuten meldete sich der kleine Carl Friedrich und hatte die Aufgabe richtig gelöst. Doch wie hat er das so schnell gemacht, schließlich müssen 100 Summanden addiert werden. Seine Überlegung war die folgende:

$$1+2+\ldots+99+100=(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)=50\cdot 101=5050$$

Gauß addierte also jeweils die zwei Summanden, die zusammen 101 ergaben. Von diesen Paaren gibt es genau 50 Stück (kleinere Summanden 1 bis 50). Also ist die gesuchte Summe gleich 50 mal 101.

Der Mathematiklehrer vom Gauß war sehr verärgert, schließlich musste er sich ja nun neue Aufgaben ausdenken statt zu lesen. Statt der Summe der ersten 100 Zahlen wollte er nun die Summe der ersten n Zahlen von Gauß errechnet haben, dabei soll n eine beliebige Zahl sein, also:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = ?$$

Auch durch diese Aufgabe war dem Lehrer keine Pause vergönnt, denn Gauß löste mit der gleichen Überlegung wie bei der ersten Aufgabe. Er addierte jeweils die beiden Summanden, deren Summe (n+1) ergab (erste Aufgabe: n=100 somit Summe 101). Die Anzahl dieser Paare ist gerade n/2 (erste Aufgabe: n=100 somit Anzahl der Paare 50). Die allgemeine Lösung des Problems lautet also:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = (1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Eine große Hilfe beim Erkennen solcher Gesetzmäßigkeiten ist das systematische Probieren. Systematisch heißt, dass ich nicht für irgendwelche n probiere, sondern z. B. für n = 1,2,3.. oder für n = 1,2,4,8,16 (also immer dem doppelten Wert). Das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten werden wir mit Zahlenreihen, die fortgesetzt werden sollen, üben. Ein einfaches Beispiel hierfür ist:

1, 2, 4, 7, 11, ...,...,.. .

Die Gesetzmäßigkeit hier ist, dass zum Vorgänger fortlaufend eine immer um 1 größer werdende natürliche Zahl addiert wird, z.B. 1+1→2; 2+2→4; 4+3→7; 7+4→11. Somit sind die drei fehlenden Zahlen gegeben durch: 11+5→16; 16+6→22; 22+7→29.

Aufgaben

1. Aufgabe – Weiterführung des Beispiels

Betrachten wir noch einmal die verallgemeinerte Aufgabe aus dem Beispiel mit Gaußs Mathelehrer:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = (1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Berechne mit dieser Gleichung folgende Summen:

a) $1 + 2 + \ldots + 777 + 778 = ?$

b) $1 + 2 + \ldots + 573755 + 573756 = ?$

Hier wirst du schnell merken, dass du selbst mit Taschenrechner ewig brauchen würdest, um die Aufgaben zu lösen, denn alleine das Eintippen würde ein paar Stunden in Anspruch nehmen.

Nun steht in der obigen Gleichung n/2 als Faktor. Was passiert denn, wenn n ungerade ist? Dann ist n/2 keine natürliche Zahl sondern ein echter Bruch (also ein Bruch, den man nicht kürzen kann). Ist dann etwa auch das Ergebnis ein echter Bruch? Dann wäre ja die Formel falsch, denn wenn ich n natürliche Zahlen addiere muss als Summe eine natürliche Zahl rauskommen.

c) Gilt die obige Formel auch für ungerade n? Begründung! Gib ein Beispiel an (dieses ist aber keine Begründung)!

2. Aufgabe – Kluges Rechnen I

Finde die Lösung durch kluges Rechnen und gib deinen Lösungsweg an:

a) $1+3+5+7+\ldots+101=?$
b) $30+33+36+\ldots999=?$
c) $1+5+9+13+\ldots+1001=?$

3. Aufgabe – Verallgemeinerte Lösung I

Eine Gerade zerlegt eine Ebene in 2 Teile. 2 (einander schneidende) geraden zerlegen die Ebene in 4 Teile. In wie viele Teile können 3, 4, 5 … Geraden die Ebene höchstens zerlegen?

Finde ein Gesetz für n Geraden!

4. Aufgabe – Verallgemeinerte Lösung II

Zeichne ein Dreieck, ein Viereck, ein Fünfeck und ein Sechseck. Bestimme die Anzahl der Diagonalen in diesen Figuren. Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?

5. Aufgabe – Fortsetzen von Reihen

a) $16, 12, 15, 11, 14, 10, 13, \ldots,\ldots,\ldots$
b) $2, 6, 4, 12, 10, 30, 28, \ldots,\ldots,\ldots$
c) $240, 80, 78, 26, 24, 8, 6, \ldots,\ldots,\ldots$