Lösungen – 1. Serie

1. a) $4 \nmid 234155$, denn 234155 ist ungerade bzw. $4 \nmid 55$
$6 \nmid 234155$, denn 234155 ist nicht durch 2 teilbar, da ungerade
$7 \nmid 234155$, denn alternierende 3er-QS: $234 - 155 = 79$ und $7 \nmid 79$
$9 \nmid 234155$, denn $QS = 20$ und $9 \nmid 20$
$21 \nmid 234155$, denn $21 = 3 \cdot 7$ und $7 \nmid 234155$
$35 \nmid 234155$, denn $35 = 5 \cdot 7$ und $7 \nmid 234155$

b) $4 \mid 9985188$, denn $4 \mid 88$ $(4 \cdot 22 = 88)$
$6 \mid 9985188$, denn $2 \mid 9985188$ (da gerade) und $3 \mid 9985188$, denn $QS = 48$ und $3 \mid 48$
$7 \nmid 9985188$, denn alternierende 3-er QS: $9 - 985 + 188 = \cancel{-1164}$ -788, ~~davon wieder alternierende 3-er QS: -163~~ und $7 \nmid \cancel{788}$
$9 \nmid 9985188$, denn $QS = 48$ und $9 \nmid 48$
$21 \nmid 9985188$, denn $21 = 3 \cdot 7$ und $7 \nmid 9985188$
$35 \nmid 9985188$, denn $35 = 5 \cdot 7$ und $7 \nmid 9985188$

c) $4 \nmid 3963724023$, denn 3963724023 ist ungerade, somit nicht durch 4 teilbar
$6 \nmid 3963724023$, ——— " ———, somit nicht durch 2 teilbar
$7 \mid 3963724023$, denn altern. 3-er QS: $3 - 963 + 724 - 023 = -259 = -37 \cdot 7$
$9 \nmid 3963724023$, denn $QS = 39$ und $9 \nmid 39$
$21 \mid 3963724023$, denn $21 = 3 \cdot 7$ und $3 \mid 3963724023$ $(QS = 39)$ und $7 \mid 3963724023$
$35 \nmid 3963724023$, denn $35 = 5 \cdot 7$ und $5 \nmid 3963724023$ (letzte Ziffer nicht 0 oder 5)

2. a) 10002, erste Ziffer möglichst klein wählen („1"), da kleinste fünfstellige Zahl gesucht, die anderen Ziffern auch so klein wie möglich („0") und fünfte Ziffer klein, aber so, dass Quersumme durch 3 teilbar ist („2").

b) 100008, erste Ziffer möglichst klein wählen („1"), da kleinste sechsstellige Zahl gesucht, die anderen Ziffern auch so klein wie möglich („0") und sechste Ziffer so, dass QS durch 9 teilbar ist („8")

c) 99996, letzte zwei Ziffern müssen eine ~~der~~ zweistellige durch 4 teilbare Zahl bilden, größtmögliche wählen („96"), verbleibende Ziffern größtmöglich („9")

d) z.B. 3; 5, zwei ungerade Zahlen wählen, deren Summe durch 4 teilbar ist

e) Die QS einer solchen Zahl ergibt sich zu: $QS = 0 + 0 + \ldots + 0 + 3 \cdot x$, wenn x die Ziffer ungleich 0 ist, somit $QS = 3 \cdot x$ und $3 \mid QS$!

3. Betrachte die kleinste Zahl des Tripels: x
Bei Division durch 3 gibt es drei mögliche Reste: 0; 1; 2

1. Fall: Rest 0, d.h. $3 \mid x$. Wenn $x = 3$ ist, dann ist der Primzahldrilling 3; 5; 7; für alle anderen x folgt mit $3 \mid x$, dass x kein Primzahl ist
$\rightarrow x; x+2; x+4$ kein Primzahltrilling!

2. Fall: Rest 1, es gilt dann also $x = 3 \cdot y + 1$ $(y \in \mathbb{N})$, für die zweite Zahl des Tripels ~~gilt~~ $x+2$ gilt dann: $x + 2 = 3 \cdot y + 1 + 2 = 3 \cdot y + 3$, somit dann $3 \mid x + 2$, also ist $x + 2$ keine Primzahl
$\rightarrow x; x+2; x+4$ kein Primzahltrilling!

3. Fall: Rest 2, es gilt dann also $x = 3 \cdot z + 2$ $(z \in \mathbb{N})$, für die dritte Zahl des Tripels $x + 4$ gilt dann $x + 4 = 3 \cdot z + 2 + 4 = 3 \cdot z + 6$, somit dann $3 \mid x + 4$, also ist $x + 4$ keine Primzahl
$\rightarrow x; x+2; x+4$ kein Primzahltrilling

$\longrightarrow$ Behauptung für alle Fälle bewiesen!

4. • erste Ziffer der gesuchten Zahl – x

- Die Zahl kann man dann schreiben als: $x \cdot 10^y + n$, wobei n die Zahl ohne die erste Ziffer ist und y die Anzahl der Ziffern der gesamten Zahl ~~A~~ minus 1 (an einem Beispiel nachvollziehen!)
- kommt die erste Ziffer an die letzte Stelle, dann ist die neue Zahl $10 \cdot n + x$
- nach der gegebenen Bedingung muss

$$\frac{1}{4} \cdot (x \cdot 10^y + n) = 10 \cdot n + x \qquad (*)$$

gelten

- Umstellen nach n liefert:

$$n = x \cdot \frac{10^y - 4}{39} \qquad \text{mit } 1 \leq x \leq 9$$

- $10^y - 4$ ist eine $(y-1)$-stellige natürliche Zahl, deren letzte Ziffer 6 ist und alle anderen Ziffern sind 9
- Zahl dieser Form so lange durch 39 dividieren, bis durch Anfügen einer 6 statt einer 9 die Division keinen Rest lässt.

$999\ldots6 : 39 = 2564$
78
219
195
249
234
156
156

$$\rightarrow 10^y - 4 = 99996 \quad \rightarrow \quad y = 5$$

$$\frac{10^y - 4}{39} = 2564$$

$$n = x \cdot \frac{10^y - 4}{39} = x \cdot 2564$$

- Nun muss noch für $1 \leq x \leq 9$ geprüft werden, welches x die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft (*) liefert:

$x = 1 \quad \rightarrow \quad 1 \cdot 10^5 + 2564 = 102564$ und $10 \cdot 2564 + 1 = 25641 = \frac{1}{4} \cdot 102564$

alle anderen x (2 bis 9) liefern größere Werte!

$\rightarrow$ die gesuchte Zahl ist 102564

Entschuldigt bitte, im Nachhinein betrachtet war die Aufgabe wirklich zu schwer, deswegen habe ich auf alle richtigen Ideen bereits Punkte gegeben!

5. Jeder der Söhne muss 7 Fässer bekommen.

Insgesamt gibt es $\underbrace{7\cdot 1}_{\text{volle}} + \underbrace{7\cdot \frac{1}{2}}_{\text{halbvolle}} + \underbrace{7\cdot 0}_{\text{leere}} = 10\frac{1}{2} = \frac{21}{2}$ Ein-

Fässer

heiten Wein.

Also muss jeder Sohn $\frac{7}{2}$ Einheiten Wein bekommen.

~~Damit~~ Deshalb kann kein Sohn 4 oder mehr volle Fässer Wein erhalten (das wären $\frac{8}{2}$ Einheiten), außerdem muss jeder Sohn mindestens 1 volles Fass haben, sonst können nicht alle Söhne $\frac{7}{2}$ Einheiten Wein bekommen.

Nun kann man für den 1. Sohn alle Varianten mit 1, 2 oder 3 vollen Fässern ausprobieren und erhält die folgenden 6 Lösungen:

1. Sohn			2. Sohn			3. Sohn		
Voll	Halbvoll	Leer	Voll	Halbvoll	Leer	Voll	Halbvoll	Leer
1	5	1	3	1	3	3	1	3
2	3	2	2	3	2	3	1	3
2	3	2	3	1	3	2	3	2
3	1	3	1	5	1	3	1	3
3	1	3	2	3	2	2	3	2
3	1	3	3	1	3	1	5	1