Kozi Klasse 6 - Lösungen zur Serie 9

1. Wie oft stehen der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr innerhalb von 24 Stunden senkrecht zueinander? Wie oft liegt der Sekundenzeiger innerhalb von 24 Stunden auf der Geraden, die den Winkel zwischen Minuten- und Stundenzeiger halbiert? Begründe!

Lösung. In 24 Stunden macht der Stundenzeiger zwei, der Minutenzeiger 24 ganze Umdrehungen. Wenn wir die Uhr so mitdrehen, dass der Stundenzeiger immer nach oben zeigt, sieht man, dass der Minutenzeiger 22 Umdrehungen macht. Während jeder dieser Umdrehungen steht er genau zweimal senkrecht zum Stundenzeiger, nämlich einmal nach rechts und einmal nach links zeigend. Insgesamt stehen die beiden Zeiger also am Tag genau 44-mal senkrecht zueinander.
Genauso kann man den zweiten Teil lösen. Innerhalb von 24 Stunden macht der Minutenzeiger 24 und der Stundenzeiger 2 Umdrehungen. Damit macht die Winkelhalbierende $(24 + 2) : 2 = 13$ Umdrehungen. Der Sekundenzeiger macht in 24 Stunden $24 \cdot 60$ Umdrehungen. Drehen wir die Uhr allerdings so mit, dass die Winkelhalbierende immer nach oben zeigt, sieht man, dass der Sekundenzeiger dann nur noch $24 \cdot 60 - 13$ Umdrehungen macht. Während jeder dieser Umdrehungen liegt er genau zweimal auf der Winkelhalbierenden. Also insgesamt $2 \cdot (24 \cdot 60 - 13) = 2854$ mal.
(Man kann die Aufgabe auch durch (cleveres) systematisches Abzählen lösen).

2. Eine Zahl habe 2004 Ziffern. Alle Ziffern von der zweiten zur vorletzten Ziffer sind Zweien. Die Zahl ist außerdem auch durch 72 teilbar. Finde alle möglichen Zahlen mit diesen Eigenschaften. Begründe.

Lösung. Die Zahl hat also die Form $z = a\,\underbrace{2\ldots2}_{2002\text{mal}}\,b$. Wenn sie durch 72 teilbar ist, muss sie durch 8 und durch 9 teilbar sein. z ist genau dann durch 9 teilbar, wenn es ihre Quersumme ist. Also muss 9 ein Teiler von $a + b + 2002 \cdot 2 = a + b + 4004 = a + b + 9 \cdot 445 - 1$ sein. Das geht nur, wenn 9 auch schon ein Teiler von $a + b - 1$ ist. Andererseits ist eine Zahl nur dann durch 8 teilbar, wenn es die letzten drei Ziffern sind, also 8 teilt $22b$. Damit kommt für b nur noch die Vier in Frage. Also muss 9 $a + 4 - 1 = a + 3$ teilen. Damit ist $a = 6$ und die Zahl lautet $62\ldots24$.

3. Falte noch einmal den Origamiwürfel von Serie 1 (ohne ihn aufzublasen) oder auch eine beliebige andere Origamifigur die am Ende flach ist (z.B. den Kranich: `http://www.origami-kunst.de/faltanleitungen/diagramme/kranich/`). Entfalte die Figur wieder und wähle einen beliebigen Punkt im Inneren deines Blattes, wo sich mindestens zwei Faltlinien schneiden und beantworte die folgenden Fragen:

a Wie viele Knicke gehen von diesem Punkt aus? Ist es möglich, dass (bei einem anderen Punkt oder einem anderen flachen Origami) diese Anzahl ungerade ist?

b Je nachdem, ob du eine Faltung zu Dir hin oder von Dir weg erfolgt, entstehen unterschiedliche Arten von Knicken. Wir nennen sie Täler und Berge. Was kannst du über die Anzahl der Berge und Täler sagen, die von diesem Punkt abgehen? Ist es möglich, dass von diesem Punkt oder von einem anderen Punkt eines anderen flachen Origamis nur Berge abgehen?

c Gehen von einem solchen inneren Punkt $2n$ Knicke ab, so teilen sie den Vollwinkel in $2n$-Winkel auf: $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$. Betrachte die Summen $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_{2n-1}$ und $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \cdots + \alpha_{2n}$. Welche Werte können diese Summen haben? Hast du eine Idee warum das so ist?

Lösung. a) Es gibt immer eine gerade Anzahl von Knicken.
b) Es gibt immer mindestens ein Tal und ein Berg. Es kommt niemals ein Punkt vor vom dem nur Berge oder nur Täler ausgehen.
c) Die beiden Summen sind immer jeweils $180°$ groß.

4. Zwölf Personen, einige von Ihnen sind Ritter – einige sind Schurken, sitzen zum Essen um einen runden Tisch. Schurken lügen immer und Ritter sprechen immer die Wahrheit. Es entwickelt sich das folgende Gespräch: Die erste Person sagt: „Es gibt keine Ritter an diesem Tisch“ Die zweite sagt: „Es gibt höchstens einen Ritter an diesem Tisch“ Die dritte sagt: „Es gibt höchstens zwei Ritter an diesem Tisch“ und so weiter bis der 12.te sagt „Es gibt höchstens elf Ritter an diesem Tisch“ Wie viele Ritter gibt es an dem Tisch? Begründe.

Lösung. Die k.te Person am Tisch behauptet, dass es höchstens $k - 1$ Ritter an dem Tisch gibt. Nehmen wir an, dass i Ritter an dem Tisch sitzen. Dann sagen alle Personen von der $(i + 1)$.ten an bis zur 12.ten die Wahrheit. Es sagen also $12 - i$ Personen die Wahrheit und sind damit Ritter. Es ist damit $12 - i = i$. Also $i = 6$.

5. Paula und Quentin spielen folgendes Spiel. Sie ziehen abwechselnd und Paula beginnt. Paula schreibt eine Reihe mit den Buchstaben A und/oder B von links nach rechts. In jedem Zug fügt sie einen Buchstaben hinzu. Quentin darf in jedem Zug zwei der Buchstaben vertauschen (diese Buchstaben müssen nicht benachbart sein). Nachdem jeder Spieler n Züge gespielt hat, stoppt das Spiel. Wenn die Buchstabenreihe nun ein Palindrom bildet (d.h. die Buchstabenreihe von vorne und hinten gleich ist, z.B. $AABABAA$). Kann Quentin für $n = 2011$ oder $n = 2012$ immer gewinnen? Begründe!

Lösung. Für $n = 2011$ kann Quentin immer gewinnen, z.B. durch die folgende Strategie: Die ersten 1006 (das entspricht der Hälfte abgerundet +1) macht Quentin irgendetwas. Schreibt Paula den $1006+x$.ten Buchstaben hin, überprüft Quentin, ob dieser mit dem $1006 - x$.ten Buchstaben (dem gespiegelten Buchstaben) übereinstimmt. Wenn ja, tauscht er einfach diese beiden Buchstaben (d.h. es passiert nichts.) Wenn nicht, betrachtet er noch den 1006.ten Buchstaben. Stimmt dieser mit dem $1006 - x$.ten Buchstaben überein, so tauscht er den 1006.ten mit dem $1006+x$ten Buchstaben. Andernfalls stimmt der 1006.ten mit dem $1006+x$.ten Buchstaben überein und er tauscht er den 1006.ten mit dem $1006 - x$ten Buchstaben. In jedem Fall stimmen nach diesem Zug der $1006 - x$.te mit dem $1006 + x$.ten Buchstaben überein. Da der 1006.te Buchstabe sich selbst als Spiegelbild hat, ist es egal, welcher Buchstabe dort am Ende steht. Wenn Quentin diese Strategie für alle $1006 + x$.ten Buchstaben verfolgt, hat er am Ende ein Palindrom.
Für $n = 2012$ kann Quentin nicht immer gewinnen. Wenn Paula z.B. in den 2011 ersten Zügen jeweils ein A hinschreibt und als 2012.ten ein B, kann man daraus niemals ein Palindrom machen.