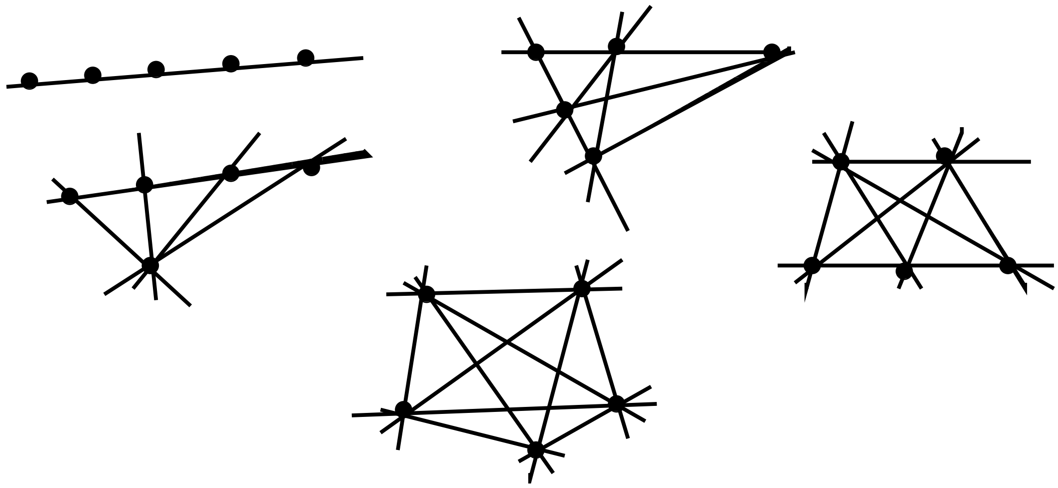
Kozi Klasse 8 - Lösungen zur Serie 8

1. Eine Zeile von 10 Ziffern wird folgendermaßen gebildet: Die ersten drei Ziffern werden frei ausgesucht. Die folgenden Ziffern sind dann jeweils die Einerstellen der Summe der drei vorhergehenden Ziffern. Startet man z.B. mit 1,2,3, so sind die folgenden Ziffern: 6, 1 (denn $2+3+6=1\underline{1}$), 0 (da $3+6+1=1\underline{0}$), $6+1+0=7$, $1+0+7=8$, 5 (da $0+7+8=1\underline{5}$) und 0 (da $7+8+5=2\underline{0}$). Mit welchen drei Ziffern sollte man starten, damit die letzten drei Ziffern in der Zeile 7, 7, 7 sind. Können alle Möglichkeiten für die letzten drei Ziffern auftreten? Für gegebene drei letzte Ziffern sind die Startziffern immer eindeutig bestimmt?
Lösung: Man kann Rückwärtsarbeiten: Damit die letzten drei Ziffern $7, 7, 7$ sind, muss für die Ziffer davor, nennen wir sie a folgendes gelten: Die Einerstelle von $a + 2 \cdot 7 = a + 14$ muss 7 sein. Da a aber eine Ziffer ist, also $0 \leq a \leq 9$, ist a durch die drei folgenden Ziffern immer eindeutig bestimmt. Hier kann es nur $a = 3$ sein. Genauso fährt man fort, um die fünftletzte Ziffer und so weiter zu erhalten. Man bekommt so die Folge: $1, 7, 1, 9, 7, 7, 3, 7, 7, 7$. Da aus drei Ziffern die vorherige – wie oben beschrieben – immer eindeutig hervorgeht, sind durch die letzten drei Ziffern der Folge die gesamte Folge und damit auch die Startziffern eindeutig bestimmt.

2. Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden. Welche Möglichkeiten für die Anzahl der Verbindungsgeraden gibt es? Zeichne jeweils Beispiele.

Lösung.



3. Lösung zur Bastelaufgabe.

Es ensteht eine Doppelpyramide, bestehend aus zwei dreiseitigen Pyramiden. Jede einzelne Pyramide hat eine gleichseitige Grundfläche 3 kongruente rechtwinklige Seitenflächen. Jede Pyramide ist eine Würfelecke. Die beiden Pyramiden sind an der gleichseitigen Grundfläche zusammengeklebt.

Zur Berechnung der Oberfläche: Die Doppelpyramide hat 6 Seitenflächen. Jede Seitenfläche hat die Größe der Fläche A in der Anleitung, also $\frac{1}{8}$ des Ausgangsquadrat. Das Quadrat hatte die Kantenlänge 10cm. Also ist der Oberflächeninhalt $= 6 \cdot \frac{1}{8}(10\text{cm})^2 = 75\text{cm}^2$.

4. a) Wenn das Wetter in Sonnendorf sich nicht ändert, ändert sich auch die Beliebtheit des Bürgermeisters nicht. Wird der Bürgermeister aber beliebter tritt Sonnendorf der Sonnenvereinigung bei. In diesem Fall gibt es Kohlrouladen und Nachtisch. Gibt es hingegen keine Kohlrouladen, ändert sich das Wetter.
Folgt daraus „In Sonnendort gibt es keine Kohlrouladen oder es gibt Nachtisch“? Begründe!

b) Wenn Majestix seine Pflicht nicht vernachlässigt, bereiten sich unsere wohlbekannten Gallier auf das nächste Wildschweinessen vor. Wenn Majestix seine Pflicht vernachlässigt, herrscht zu geringer Lauwarme-Cervisia-Verbrauch. Es wird aber entweder genug lauwarme Cervisia getrunken oder zuwenig. Letzteres ist jedoch niemals der Fall.
Folgt daraus, dass Majestix seine Pflicht nie vernachlässigt? Begründe!

Lösung. a) Nein, das folgt nicht. Wenn sich zum Beispiel das Wetter ändert, könnte es trotzdem Kohlrouladen ohne Nachtisch geben. Es kann einfach sein, dass es unabhängig vom Wetter immer Kohlrouladen gibt und nur bei gleich bleibendem Wetter auch noch Nachtisch.
b) Ja, denn würde Majestix seine Pflicht vernachlässigen, herrscht zu geringer Lauwarme-Cervisia-Verbrauch. Das ist jedoch niemals der Fall. Das wäre ein Widerspruch.

5. Nina und Olaf spielen folgendes Spiel. Sie starten mit einer Zahl und in jedem Zug muss einer der Spieler eine Quadratzahl von der Zahl subtrahieren. Gezogen wird abwechseld, Nina beginnt und gewonnen hat der Spieler, der die letzte Subtraktion durchführt. Ein Beispiel wäre: Wenn sie mit der Zahl 5 starten, kann Nina entweder 1 oder 4 subtrahieren und erhält dann entweder 4 oder 1. In beiden Fällen wäre es eine Quadratzahl, so dass Olaf durch deren Subtraktion einen Sieg erzielen könnte.
Für welche Startzahlen zwischen 1 und 20 kann Nina durch eine geeignete Strategie immer einen Sieg erzielen und für welche Startzahlen hat sie diese Möglichkeit nicht? Begründe!

Lösung:
Eine Zahl, bei der der Spieler der am Zug ist, gewinnen kann, nennen wir Gewinnposition (G). Eine Zahl, bei der er bei richtigem Spiel des Gegners nicht gewinnen kann als Verlustposition (V). Eine Zahl ist eine Gewinnposition, wenn es einen Zug gibt, der den Gegner auf eine Verlustposition führt, z.B. ist 3 eine Gewinnposition. Denn subtrahiert der Spieler 1, hat der Gegner nur noch die Zahl 2 vor sich, eine Verlustposition. Weiterhin ist eine Zahl eine Verlsutposition, wenn es keinen solchen Zug gibt, er also egal welche Quadratzahl er subtrahiert, er den Gegner immer mit einer Gewinnposition konfrontiert. Z.B. ist die Zahl 10 eine Verlustposition. Als Zugmöglichkeiten kann man nur 1, 4 oder 9 abziehen und überlässt den Gegner damit die Zahl 9, 6 oder 1. Das sind alles Gewinnpositionen. Wenn der Gegner richtig weiter spielt, hat man also keine Chance mehr.
In der nebenstehenden Tabelle sind für die Zahlen 1 bis 20 jeweils der nächste Zuge aufgeführt. Falls die Zahl eine Gewinnposition ist, die Zahl die man subtrahieren kann, um den Gegner vor eine Verlustposition zu stellen. Falls die Zahl eine Verlustposition ist, werden alle möglichen Züge aufgeführt und damit gezeigt, dass alle die Züge auf Gewinnpositionen führen.

1	G	1 weg
2	V	1 weg → 1
3	G	1 weg →2
4	G	4 weg
5	V	1 weg → 4 oder 4 weg → 1
6	G	1 weg → 5
7	V	1 weg → 6 oder 4 weg → 3
8	G	1 weg
9	G	9 weg
10	V	1 weg → 9 oder 4 weg → 6 oder 9 weg → 1
11	G	1 weg
12	V	1 weg → 10 oder 4 weg → 7 oder 9 weg → 2
13	G	1 weg
14	G	4 weg
15	V	1 weg → 14 oder 4 weg →11 oder 9 weg → 6
16	G	16 weg
17	V	1 weg → 16 oder 4 weg → 13 oder 9 weg → 8 oder 16 weg → 1
18	G	1 weg
19	G	4 weg
20	V	1 weg → 19 oder 4 weg → 16 oder 9 weg → 11 oder 16 weg → 4