Kozi Klasse 6 - Lösungen zur Serie 5

1. Betrachte ein 6-Eck, in dem alle Diagonalen im Inneren diese Vielecks liegen und in dem keine 3 Diagonalen einen gemeinsamen Punkt haben. Wie viele Diagonalen gibt es? Durch die Diagonalen entstehen viele Dreiecke im 6-Eck. Wie viele Dreiecke enstehen, deren Eckpunkte alles Eckpunkte des 6-Ecks sind? Wie viele Dreiecke enstehen, bei den zwei Eckpunkte auch Eckpunkte des 6-Ecks sind und der dritte Eckpunkt der Schnittpunkt zweier Diagonalen ist? Es gibt noch zwei weitere Arten von entstehenden Dreiecken. Welche und wie viele solcher Dreiecke gibt es?
Lösung: Man kann diese Aufgabe lösen, indem man ein solches Sechseck aufmalt und alles einfach auszählt. Dabei muss man aber systematisch zählen, um sich und den Leser zu überzeugen, dass man nichts vergessen hat. Hier geben wir eine andere Lösungsmöglichkeit an: Um eine Diagonale im Sechseck zu erhalten, wählen wir zwei Endpunkte aus. Für den ersten Punkt haben wir sechs Möglichkeiten, für den zweiten dann noch fünf. Das macht insgesamt 30. Dabei haben wir jede Verbindung doppelt gezählt, es sind also 15 Verbindungen, von denen noch 6 die Kanten des Sechsecks sind. Es sind also $15 - 6 = 9$ Diagonalen.
Wir wollen nun Dreiecke bilden, deren Eckpunkte alle Eckpunkte des Sechsecks sind. Für den ersten Eckpunkt haben wir 6 Möglichkeiten, für den zweiten 5 und den dritten 4. Da es für das Dreieck aber nicht von Bedeutung ist, welchen der Eckpunkte wir als ersten, zweiten, usw. ansehen, haben wir jedes Dreieck sechs mal gezählt. Damit haben wir $6 \cdot 5 \cdot 4/6 = 20$ solcher Dreiecke.
Nun die Dreiecke mit zwei Eckpunkten, die Eckpunkte des Sechsecks sind, und einem Eckpunkt, der Schnittpunkte von zwei Diagonalen ist. Betrachtet man vier Eckpunkte des Sechsecks als Viereck mit seinen Diagonalen, dann gibt es darin genau 4 der gesuchten Dreiecke. Umgekehrt gibt es aber für ein solch gesuchtes Dreieck genau ein solches Viereck, in dem es liegt. Es reicht also die Anzahl der Vierecke mit Eckpunkten im Sechseck zu finden: Für den ersten Eckpunkt des Vierecks gibt es 6 Möglichkeiten, für den zweiten 5, für den dritten 4 und den vierten noch 3 also insgesamt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Dabei haben wir also natürlich wie oben wieder jedes Viereck $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mal gezählt (da die Reihenfolge ja egal ist). Es gibt also insgesamt $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)/(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 15$ Vierecke und damit $4 \cdot 15 = 60$ solcher Dreiecke.
Nun die Dreiecke mit einem Eckpunkt, der Eckpunkt des Sechsecks sind, und zwei Eckpunkte, die Schnittpunkte von zwei Diagonalen sind: Ein solches Dreieck wird aus immer drei Diagonalen gebildet, deren Eckpunkte ein Fünfeck bilden. Ein solches Fünfeck enthält immer 5 solcher Dreicke und es gibt 6 solcher Fünfecke (da es 6 Möglichkeiten gibt, den fehlenden Eckpunkt, der dann nicht zum Fünfeck gehört, auszuwählen). Damit gibt es $5 \cdot 6 = 30$ der gesuchten Dreiecke.
Weiterhin gibt es noch ein Dreieck, dessen Eckpunkte nur Schnittpunkte von Diagonalen sind.

2. Ralf, Sören und Tina wohnen in derselben Straße und sagen sich gegenseitig ihre Hausnummern.

a) Ralf sagt: „Meine Hausnummer liegt zwischen 100 und 200, sie ist durch 3, aber nicht durch 9 teilbar. Außerdem ist sie durch 2 und 5, aber nicht durch 4 teilbar.“

b) Sören sagt: „Meine Hausnummer ist eine zweistellige Primzahl und hat als Ziffern ebenfalls Primzahlen. Wenn ich die Ziffern vertausche, ist die neue Zahl wieder eine Primzahl, die aber größer als die Hausnummer ist.“

c) Tina sagt: „Meine Hausnummer ist ebenfalls eine zweistellige Primzahl. Wenn ich das Fünffache der Einerziffer und das Vierfache der Zehnerziffer addiere, erhalte ich wieder meine Hausnummer.“

Bestimme die jeweiligen Hausnummern und begründe.
Lösung:

a) Da Ralfs Hausnummer durch 2, 3, 5 und 7 teilbar ist, muss sie durch 30 teilbar. Folgende Zahlen zwischen 100 und 200 sind durch 30 teilbar: 120,150 und 180. Davon ist aber 120 durch 4 und 180 durch 9 teilbar, bleibt als Ralfs Hausnummer also nur noch 150.

b) Folgende Ziffern sind Primzahlen: 2, 3, 5 und 7. Wenn eine 2 eine Ziffer der Hausnummer wäre, wäre entweder die Hausnummer oder die Zahl mit den vertauschten Ziffern durch 2 teilbar und damit keine Primzahl. Bleiben also die Zahlen: 33, 35, 37, 53, 55, 57, 73, 75 und 77. Davon sind nur 37, 73 Primzahlen deren Ziffernvertauschung auch wieder eine Primzahl ist und nur die 37 ist kleiner als die Ziffernvertauschung und damit Sörens Hausnummer.

c) Tinas Hausnummer ist zweistellig. Sie hat also die Form $a \cdot 10 + b$, wobei a die Zehnerziffer und b die Einerziffer ist. Es muss also gelten $5 \cdot b + 4 \cdot a = a \cdot 10 + b$ und damit $6 \cdot a = 4 \cdot b$, also $3 \cdot a = 2 \cdot b$. Damit teilt 3 $2 \cdot b$ und damit b. b kann also nur $0, 3, 6$ oder 9. Eine Zahl, die auf 0 oder 6 kann aber keine Primzahl sein. Bleibt $b = 3$ oder $b = 9$. Im zweiten Fall wäre $a = 6$ und die Hausnummer 69 und damit keine Primzahl. Im ersten Fall ist $a = 2$ und die Hausnummer 23 eine Primzahl.

3. Die 3. Aufgabe ist die Faltaufgabe auf dem Extrablatt.
Lösung Der dritte Winkel der Dreiecke ergibt sich immer mittels der Innenwinkelsumme:
a) Den rechten oberen Winkel nach Anleitung zum 30°-Winkel falten, den linken oberen Winkel halbieren (45°). Der dritte Winkel ist dann 105°.
b) Den rechten oberen Winkel nach Anleitung zum 30°-Winkel falten. Das dadurch entstandende Dreieck hat als weitere Innenwinkel 60° und 90°. Halbiert man den rechten Winkel, so hat das linke der entstandenden Teildreiecke die Innenwinkel 60°, 45° und 75°.
c) Den rechten oberen Winkel nach Anleitung zum 30°-Winkel falten und dann noch einmal halbieren. Da man beim 30°-Winkel falten, schon einen 60°-Winkel erhalten hat, hat man jetzt insgesamt das gesuchte Dreieck mit dem dritten Winkel von 105°.
d) Den rechten oberen Winkel nach Anleitung zum 30°-Winkel falten und wieder auffalten. Den oberen Teil des Blattes entlang

der kurzeren Seite des entstandenen rechtwinkligen Dreiecks nach unten falten. Das entstandende Dreieck ist gleichseitig, also alle Innenwinkel sind $60°$ groß.
e) Hat man einmal ein gleichseitiges Dreieck gefaltet (z.B. wie in d) oben), knickt man jede Seitenmitte einmal ein und faltet jeweils die gegenüberliegende Ecke auf diese Seitenmitte, dann entsteht die Form eines Tetraeders.

4. Tante Agatha ist ermordet worden, und zwar von einem Bewohner ihres Hauses. Dort wohnen Agatha, der Butler und Charles, und niemand sonst. Ein Mörder hasst immer das Opfer und ist niemals reicher als das Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha nicht hasst. Tante Agatha hasst jeden, außer den Butler. Wenn Charles Tante Agatha hasst, dann hasst er auch den Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher als Tante Agatha ist, und jeden, den Tante Agatha hasst. Niemand hasst alle.
Wer ermordete Tante Agatha? Begründe!
Lösung: Wir kürzen ab: Agatha - A, Butler - B, Charles - C.

Aussage	Folgerungen
A hasst jeden, außer den B.	A hasst sich selbst und C.
C hasst niemanden, den A nicht hasst.	C hasst nicht B.
Wenn C A hasst, dann hasst er auch den B.	Da C nicht B hasst, hasst er auch nicht A.
Ein Mörder hasst immer das Opfer.	Da C A nicht hasst, kann er nicht der Mörder sein.
B hasst jeden, den A hasst.	B hasst A und C.
Niemand hasst alle.	B hasst sich selbst nicht.
B hasst jeden, der nicht reicher als A ist.	Da B sich nicht selbst hasst, muss er reicher sein als A.
Ein Mörder ist niemals reicher als das Opfer.	B ist reicher als A und damit nicht ihr Mörder.

Damit bleibt nur Agathas Selbstmord und das passt auch, da sie sich selbst hasst und natürlich auch nicht reicher sein kann als sie selbst. Man konnte also so schon relativ schnell sehen, dass Agatha selbst als Mörder in Frage kommt. Aber man muss die anderen Überlegungen doch noch ausführen, um sicher zu gehen, dass sonst kein anderer als Mörder in Frage kommt.

5. Uwe und Verena spielen ein Spiel. Vor ihnen liegen wieder mehrere Haufen mit Stäbchen. In jedem Zug darf man von einem Haufen beliebig viele Stäbchen (jedoch mindestens eins) nehmen oder einen anderen Haufen in zwei neue Haufen (mit mindestens jeweils einem Stäbchen) zerteilen. Gewonnen hat der Spieler, der das letzte Stäbchen nimmt. Uwe beginnt. Gezogen wird abwechselnd.

a) Wer kann immer gewinnen, wenn nur ein Haufen da ist?

b) Es liegen jetzt zwei Haufen auf dem Tisch mit jeweils einer Stäbchenanzahl von maximal 5. Überlege Dir, bei welchen Ausgangsstellungen, Uwe immer gewinnen kann. Begründe.

c) Angenommen wir haben zwei Ausgangsstellungen, die Verluststellungen sind, das heißt wenn Verena die richtige Strategie hat, kann Uwe keinesfalls gewinnen. Dann können wir beide zusammen auf den Tisch legen und erhalten eine neue Ausgangsstellung (z.B. erste Ausgangsstellung sind zwei Haufen mit jeweils einem Stäbchen und die zweite sind zwei Haufen mit jeweils zwei Stäbchen. Dann bestünde die neue Ausgangsstellung aus 4 Haufen, von denen zwei ein Stäbchen enthalten und die beiden anderen Haufen jeweils zwei Stäbchen.) Überlege Dir und begründe, dass die neue Ausgangsstellung dann auch eine Verluststellung ist.

d) Wie sollte der erste Zug von Uwe aussehen (um sicher gewinnen zu können), wenn vor ihm drei Haufen mit 2, 5 und 7 Stäbchen liegen? Begründe!

Lösung:

a) Uwe kann hier immer gewinnen, indem er einfach den gesamten Haufen nimmt.

b) H=Haufen, V= Verluststellung, G= Gewinnstellung

1.H	2.H	Stategie
1	1	V - man muss einen Haufen wegnehmen und Gegner gewinnt
1	> 1	G - vom zweiten Haufen soviel nehmen, dass nur ein Stäbchen bleibt. Der Gegner erhält obige Verluststellung.
2	2	V - nimmt man einen Haufen ganz, gewinnt der Gegner (siehe a)), sonst hat der Gegner $(1, 2)$ vor sich und gewinnt
2	> 2	G - vom zweiten Haufen soviel nehmen, dass nur zwei Stäbchen bleiben

und so kann man das fortführen. Also kann Uwe immer gewinnen, wenn beide Haufen unterschiedlich groß sind. Wenn beide Haufen gleich groß sind, ist es eine Verluststellung.

c) Macht der Gegner einen Zug in einer der beiden Stellungen, die diese zu einer Gewinnstellung macht, macht man in der gleichen Stellung einen Zug einen der diesen wieder zu einer Verluststellung (oder diese Stellung direkt gewinnt) macht. Der Gegner hat also immer zwei oder eine (falls die eine Stellung schon abgearbeitet ist) Verluststellung vor sich und kann somit nicht gewinnen.

d) Nach b) sind sowohl $2, 2$ als auch $5, 5$ Verluststellungen. Wegen c) ist damit auch $2, 2, 5, 5$ eine Verluststellung. Wenn Uwe also den 7er Haufen in 2 und 5 zerlegt, kann er immer gewinnen.