Kozi Klasse 6 - Lösungen zur Serie 4

1. Der Weihnachtsmann und seine Helfer nutzen in ihrer Werkstatt ihre eigene Währung: Ren. Es gibt allerdings nur 5 Ren-Scheine und 7 Ren-Scheine.

a) Der Weihnachtsmann will sich in seiner Pause ein Stück Stolle kaufen. Das kostet 1 Ren. Wie viele Ren muss er mindestens hingeben, damit er dass volle Wechselgeld zurück erhalten kann (Würde er einen 5 Ren Schein hinlegen, bekäme er z.B. nichts zurück, da es keinen 4 Ren oder noch kleineren Schein gibt.)?

b) In der Werkstatt gibt es auch Verkaufsautomaten. Allerdings akzeptieren nur Geld in exakter Höhe des Preises; sie geben also kein Wechselgeld und man darf auch nicht zuviel bezahlen. (Das Stück Stolle zu einem Ren kann also nicht am Automaten gekauft werden, da es keine 1 Ren-Scheine gibt.) Liste alle möglichen Preise auf, die nicht exakt bezahlt werden können. Begründe!

Lösung:

a) Wir überlegen uns, bei 1 beginnend, welche Zahlen bezahlbar sind. Sind zwei auf eineinanderfolgende Zahlen bezahlbar, so kann man die größere von beiden Zahlen hingeben und erhält die kleinere als Wechselgeld. Die ersten bezahlbaren Zahlen sind: 5, 7, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$. Die ersten aufeinanderfolgenden bezahlbaren Zahlen sind also 14 und 15. Er muss also mindestens 15 Ren hingeben.

b) Wenn man 5 aufeinanderfolgende Zahlen ($x, \ldots, x + 4$) findet, sind alle Zahlen, die größer als x bezahlbar. Da man immer einen 5-Ren Schein mehr nehmen kann, also z.B. $x + 13$ würde man dann wie den $x + 3$-Schein bezahlen und noch zwei 5-Ren Scheine hinzunehmen. Man muss also nur noch herausfinden, wann als erstes fünf aufeinanderfolgende bezahlbare Zahlen kommen. Dazu führt man die Reihe von oben einfach fort. Bezahlbar sind dann weiterhin $17 = 2 \cdot 5 + 7$, $19 = 5 + 2 \cdot 7$, $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $22 = 3 \cdot 5 + 7$, $24 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$, $25 = 5 \cdot 5$, $26 = 5 + 3 \cdot 7$, $27 = 4 \cdot 5 + 7$, $28 = 4 \cdot 7$. Also kann 24 die Rolle des obigen x üebernehmen und damit sind ab 24 alle Zahlen bezahlbar. Die einzigen nicht bezahlbaren Zahlen sind somit: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 23$.

2. Wir zerlegen eine Zahl N in seine Primfaktoren

$$N = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{k_1-\text{mal}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{k_2-\text{mal}} \cdots \underbrace{p_l \cdot \ldots \cdot p_l}_{k_l-\text{mal}},$$

hierbei sind p_1 bis p_l verschiedene Primzahlen. Z.B. ist $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ($p_1 = 2$ mit $k_1 = 2$ und $p_2 = 3$ mit $k_2 = 1$) und $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ (mit $p_1 = 3$ und $k_1 = 4$).
Mit $d(N)$ bezeichnen wir die Anzahl der Teiler der Zahl (einschließlich 1 und N), z.B. $d(12) = 6$, da 12 die Teiler $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ hat, und $d(81) = 5$, da 81 die Teiler $\{1, 3, 9, 27, 81\}$ hat.

a) Wenn $N = p^k$ ist, also nur eine Primzahl enthält, wie groß ist dann $d(N)$? Begründe!

b) Für beliebiges N (Zerlegung wie oben) ist $d(N) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdots (k_l + 1)$. Überlege Dir, dass das richtig ist, falls: $N = \underbrace{p_1 \cdot \ldots \cdot p_1}_{k_1-\text{mal}} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_2}_{k_2-\text{mal}}$ ist!

c) Von einer Zahl N wissen wir, dass N durch 18 teilbar ist und dass $d(N) = 10$ ist. Bestimme N! Gibt es nur ein solches N? Begründe!

Lösung:

a) Da p eine Primzahl ist und selbst keine weiteren Teiler hat, sind die Teiler von p^k gegeben durch $1 = p^0$, $p = p^1$, $p^2, \ldots, p^k$. Also ist $d(p^k) = k + 1$.

b) Die Zahl N hat die Form $p_1^{k_1} p_2^{k_2}$. Ein Teiler hat dann auch die Form $p_1^{l_1} p_2^{l_2}$ mit $0 \leq l_1 \leq k_1$ und $0 \leq l_2 \leq k_2$ (Sind beide Exponenten 0, dann entsteht z.B. der Teiler 1, sind beide maximal entsteht die Zahl N selbst.) Für l_1 hat man also $k_1 + 1$ M¨oglichkeiten und für l_2 $k_2 + 1$ Möglichkeiten. Das ergibt insgesamt $(k_1 + 1)(k_2 + 1)$ Teiler. Die sind auch alle verschieden, da p_1 und p_2 verschiedene Primzahlen sind und damit keinen gemeinamen Teiler haben. Also ist $d(N) = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$.

c) Wir wissen, dass $d(N) = 2 \cdot 5$ ist, damit kann es in der Zerlegung von N höchstens 2 Primzahlen geben. Da N aber durch $18 = 2 \cdot 3^2$ teilbar ist, muss es mindestens zwei Primzahlen geben. Damit ist $N = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2}$ und $k_2 > 1$ (weil die 3 zweimal in 18 vorkommt. Damit ist $d(N) = 2 \cdot 5 = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$, also $k_1 = 1$ und $k_2 = 4$. Folglich kommt als N nur $2 \cdot 3^4 = 162$ in Frage und diese Zahl erfüllt auch die Aufgabenstellung.

3. Der bösartige Weihnachtself Weini verbreitet immer fiese Gerüchte. Aber man weiss, dass alle seine Gerüchte vollkommen gelogen sind und immer das Gegenteil richtig ist. Gestern behauptete er z.B.: „Es gibt ein Kind, zu dem der Weihnachtsmann nicht kommt.“ Da wir jedoch wissen, dass Weini immer lügt, wissen wir dann also: „Der Weihnachtsmann kommt zu allen Kindern.“! Was wissen wir aufgrund der folgenden fiesen Gerüchte Weinis? (Es reicht nicht, vor jede Aussage einfach ein „Nicht“ zu setzen, also bei obigen Beispiel einfach zu sagen „Es ist nicht wahr, dass es ein Kind gibt, zu dem der Weihnachtsmann nicht kommt.“)

a Alle Kinder bekommen einen Teddybären.

b Jedes Kind erhält keinen Ball.

c Es gibt ein Kind, dass keinen Kreisel bekommt.

d Es gibt kein Kind, zu dem das Christkind kommt.

e Kein Kind erhält kein Plätzchen.

f Alle Kinder haben keinen Wunschzettel geschrieben.

Zusatz Weini erhält einen Ball und einen Kreisel.

Lösung: Was ist das Gegenteil zu einer Aussage? Hat man eine Aussage und ihr Gegenteil so müssen alle denkbaren Fälle abgedeckt sein. Zur ersten Aussage „Alle Kinder bekommen einen Teddybären." kann also z.B. die Aussage „Kein Kind bekommt einen Teddybären." nicht das Gegenteil sein, da der Fall das z.B. nur jedes 2. Kind einen Teddybären erhält, nicht vorkommt. Das Gegenteil der Aussage wäre hier: „Ein Kind bekommt keinen Teddy". Damit wären alle Fälle abgedeckt, denn entweder bekommen alle Kinder einen Teddybären oder es muss mindestens ein Kind geben, dass keinen erhält. (Wenn man sagt „Ein Kind ..." heißt das immer „Es gibt mindestens ein Kind...". Wenn man sagen will, dass es keine zwei sind für die, die Aussage gilt, sagt man „Genau ein Kind...") Es gibt immer nur ein Gegenteil, aber das kann auf verschiedene Weisen formuliert werden. Man kann hier z.B. auch sagen: „Einige Kinder bekommen keinen Teddy." („Einige"heißt immer „es gibt mindestens eins". Also auch wenn es nur ein Kind gibt, dass keinen Teddy erhält, oder alle Kinder keinen Teddy erhalten, ist die Aussage noch immer richtig.) oder „Nicht jedes Kind erhält einen Teddy."Im folgenden ist immer nur eine Beispiel einer Formulierung für das Gegenteil angegeben:

a) Ein Kind bekommt keinen Teddy.

b) Ein Kind erhält einen Ball.

c) Jedes Kind kriegt einen Kreisel.

d) Es gibt ein Kind, zu dem das Christkind kommt.

e) Ein Kind erhält kein Plätzchen.

f) Ein Kind hat einen Wunschzettel geschrieben.

Zusatz Weini erhält keinen Ball oder keinen Kreisel. (Das schließt ein, dass er vielleicht auch nichts von beiden erhält.)

4. Paula und Quentin spielen folgendes Spiel: Vor ihnen liegen 3 Haufen, einer mit 2 Stäbchen, einer mit 3 Stäbchen und einer mit 4 Stäbchen. Die Spieler ziehen abwechselnd, Paula beginnt. In jedem Zug darf ein Spieler von einem Haufen eine beliebige Anzahl von Stäbchen nehmen (aber immer mindestens eines). Der Spieler, der das letzte Stäbchen nehmen muss, verliert.
Paula kann dieses Spiel immer gewinnen. Was muss dann ihr erster Zug sein? Begründe, dass dann Quentin nicht mehr gewinnen kann.
Tipp: Untersuche das Problem zuerst für kleinere Ausgangshaufen: auf jedem Haufen ein Stäbchen und auf zwei Haufen je zwei Stäbchen, der dritte Haufen ist leer.

Lösung: Wir überlegen uns als erstes ein paar einfache Gewinnstellungen für Paula.

1. Liegt ein Stapel mit $n > 1$ Stäbchen, dann kann Paula auf alle Fälle gewinnen, wenn sie alle Stäbchen bis auf eines wegnimmt. Dann muss Quentin das verbleibende nehmen und verliert.
2. Sind 2 Stapel auf dem Tisch. Ein Stapel mit einem Stäbchen und einer mit $n \neq 0$ Stäbchen. Leert Paula einen Stapel und Quentin, muss das letzte Stäbchen nehmen.

Damit sind folgende Stellungen Verluststellungen für Quentin:

a) ein Stapel mit einem Stäbchen

b) zwei Stapel mit je zwei Stäbchen, denn dann führt jeder Zug von Quentin auf eine Gewinnstellung von Paula

c) drei Stapel mit je einem Stäbchen. Denn hier hat Quentin nur eine Zugmöglichkeit, er muss einen Stapel wegenehmen - Gewinnstellung 2 für Paula.

Paula zieht nun als erstes 3 Stäbchen vom 4-Stapel. Denn sieht Quentin 3 Stapel mit 1, 2 bzw. 3 (abgekürzt durch $(1, 2, 3)$). Dann hat Quentin folgende Möglichkeiten:
$(0, 2, 3)$ Dann zieht Paula auf $(0, 2, 2)$ - Verluststellung b)
$(1, 1, 3)$ Dann zieht Paula auf $(1, 1, 1)$ - Verluststellung c)
$(1, 0, 3)$ Verluststellung b)
$(1, 2, 2)$ Dann zieht Paula auf $(0, 2, 2)$ - Verluststellung b)
$(1, 2, 1)$ Dann zieht Paula auf $(1, 1, 1)$ - Verluststellung c)
$(1, 2, 0)$ Verluststellung b)
Da dies alle Möglichkeiten sind, ist auch $(1, 2, 3)$ eine Verluststellung und damit gewinnt Paula.