

Kozi Klasse 6 - Lösungen zur Serie 3

1. Orangen werden zu einer dreieckigen Pyramide gestapelt. Die Orangen einer Schicht befinden sich immer in den Lücken der nächst tieferen Schicht, wobei eine Lücke immer durch drei aneinandergrenzende Orangen gebildet wird. Eine einschichtige Pyramide besteht nur aus einer Orange, eine zweischichtige somit aus 4 Orangen. Aus wie vielen Orangen besteht eine siebenschichtige Pyramide? Wie viele Schichten kann man mit 300 Orangen höchstens aufbauen und wie viele Orangen bleiben dann übrig?

Zusatz: Aus wie vielen Orangen besteht eine Pyramide mit n Schichten?

Lösung: Jede Schicht der Pyramide ist ein aus Zeilen von Orangen gebildetes Dreieck. Jede Zeile enthält eine Orange mehr als die (in der gleichen Schicht) überliegende Zeile (s. Bild). Eine Schicht mit nur einer Zeile besteht aus einer Orange. Eine Schicht mit zwei Zeilen aus $1 + 2 = 3$ Orangen, eine mit drei Zeilen aus $1 + 2 + 3 = 6$ Orangen und eine Schicht mit n Zeilen aus $1 + 2 + \dots + n$ Orangen.

Jede Schicht enthält wiederum eine Zeile mehr als die darüberliegende Schicht. Damit enthält eine siebenschichtige Pyramide die oberste Schicht mit einer Orangen, die zweite Schicht mit 3 Orangen, die dritte Schicht mit 6, die vierte mit 10, die fünfte mit 15, die sechste mit 21 und die siebente mit 28 Orangen. Eine siebenschichtige Pyramide enthält also $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 = 84$ Orangen.

Eine achtschichtige Pyramide hat dann $84 + 36 = 120$, eine neunschichtige $120 + 45 = 165$, eine zehnschichtige $165 + 55 = 220$, eine elfschichtige $220 + 66 = 286$ und eine zwölfschichtige $286 + 78 = 364$ Orangen. Da $286 < 300 < 364$ ist, kann man mit 300 Orangen also eine elfschichtige Pyramide bauen und behält $300 - 286 = 14$ Orangen übrig.

Zusatz: Nach obiger Erklärung enthält eine n -schichtige Pyramide die folgende Anzahl von Orangen (die einzelnen Schichten sind in den Klammern zusammengefasst):

$$\begin{aligned} 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3 + 4) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ = n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 2 + \dots + 1 \cdot n \end{aligned}$$

Die Gleichheit erhält man wenn man die einzelnen Summanden umsortiert, die 1 kommt n -mal vor (nämlich in jedem Summanden), die 2 kommt $n - 1$ -mal vor (überall außer im ersten Summanden), usw. bis zur n , die nur einmal, nämlich im letzten Summanden vorkommt.

2. Ein Paar (p, q) von Primzahlen heißt „Primzahlzwilling“, wenn $q - p = 2$ gilt. So ist z. B. $(11, 13)$ ein Primzahlzwilling.
- Gib drei weitere Primzahlzwillinge an!
 - Warum muss die Summe $p + q$ der einzelnen Primzahlen bei allen Primzahlzwillingen immer durch 4 teilbar sein?
 - Beweise, dass die Summe $p + q$ sogar immer durch 12 teilbar ist, wenn p und q größer als 3 sind!
 - Drei Primzahlen p, q und r heißen „Primzahltrilling“, wenn $r - q = q - p = 2$ gilt. Zeige, dass $(3, 5, 7)$ der einzige Primzahltrilling ist!

Lösung:

a) z.B. $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(17, 19)$

b) Da 4 keine Primzahl ist, kann $(2, 4)$ kein Primzahlzwilling sein. Also kann es keinen Primzahlzwilling mit einer 2 geben. Also sind die Primzahlen p und q immer ungerade. p muss also die Form $2 \cdot n + 1$ haben für eine natürliche Zahl $n \geq 1$. Dann ist $q = p + 2 = 2 \cdot n + 1 + 2 = 2 \cdot n + 3$. Also gilt

$$p + q = 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 4 \cdot n + 4 = 4 \cdot (n + 1)$$

und damit ist $p + q$ durch 4 teilbar.

Variante in Worten: Zwischen den beiden Primzahlen eines Zwillings liegt genau eine Zahl. Da diese um eins kleiner ist als q und um eins größer ist als p , ist die Summe $p + q$ das Doppelte dieser mittleren Zahl. Da die Primzahlen von Zwillingen immer ungerade sind (siehe oben), ist die mittlere Zahl gerade, also durch 2 teilbar. Ihr Doppeltes ist dann durch 4 teilbar. Damit ist auch $p + q$ durch 4 teilbar.

c) Man weiss von b), dass die Summe durch 4 teilbar ist. Um zu zeigen, dass sie sogar durch 12 teilbar ist, muss man noch die Teilbarkeit durch 3 zeigen. Man weiss, dass von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen immer eine durch 3 teilbar ist. Die Primzahlen p und q sind aber größer als 3 und können somit nicht mehr durch 3 teilbar sein. Von den Zahlen $p, p + 1, p + 2 = q$ muss also $p + 1$ durch 3 teilbar sein. Wegen $p + q = 2 \cdot p + 2 = 2 \cdot (p + 1)$ ist also auch $p + q$ durch 3 teilbar.

d) $(3, 5, 7)$ ist ein Primzahltrilling. Jeder weitere Primzahltrilling müsste mit $p > 3$ beginnen. Betrachten wir die aufeinander folgenden Zahlen

$$p, p + 1, q = p + 2, p + 3, r = p + 4.$$

Von drei aufeinanderfolgenden Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar. Da p und $q = p + 2$ Primzahlen größer als 3 sind, muss $p + 1$ durch 3 teilbar sein. Dann ist aber auch $r = p + 4$ durch 3 teilbar sein. Das kann aber nicht sein, da r eine Primzahl größer 3 sein soll. Also kann es keinen weiteren Primzahltrilling geben.

3. Baue vier Würfecken (Tetraeder mit drei gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke als Seitenfläche und einem gleichseitigem Dreieck) wie in der beiliegenden Anleitung. Stelle zwei davon so, dass ihre Grundflächen zusammen ein Quadrat

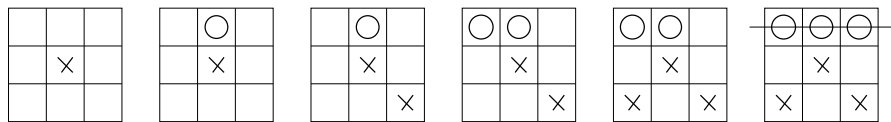
ergeben. Dann stelle die anderen beiden so auf eine Spitze, dass alle vier Tetraeder von außen betrachtet einen Würfel ergeben (Achtung nicht stabil!). Von außen sieht das jetzt aus wie ein Würfel, doch die Tetraeder füllen das Innere nicht vollständig aus. Wieviel Volumen ist im Inneren noch frei (Gib die Kantenlänge deines Würfels mit an) und was für ein Körper würde noch hineinpassen, um alles auszufüllen? (Das Volumen eines Tetraeders war ein Drittel Grundfläche mal Höhe.)

Lösung: Wir berechnen das Volumen des hohlen Inneren durch die Differenzmethode, d.h. das Volumen des Hohlraums ergibt sich aus dem Volumen des Würfels minus dem Volumen der vier Tetraeder. Sei a die Kantenlänge des Würfels. Dann hat der Würfel das Volumen a^3 . Ein solches gebautes Tetraeder hat als Grundfläche ein gleichseitiges rechtwinkliges Dreieck mit Seitenlänge a und als Höhe ebenfalls a . Damit ist das Volumen des Tetraeders $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}a^2) \cdot a = \frac{a^3}{6}$. Also ist das Volumen des Hohlraums: $a^3 - 4 \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$. Der Hohlraum hat die Form eines regelmäßigen Tetraeders

4. In der Bibliothek des Grafen Dracula gibt es keine zwei Bücher, deren Inhalt aus gleich vielen Wörtern bestehen. Die Anzahl der Bücher ist größer als die Summe der Anzahl der Wörter jedes einzelnen Buches. Diese Aussagen genügen, um den Inhalt mindestens eines Buches aus Draculas Bibliothek genau zu beschreiben. Was steht in diesem Buch? Kann man auch den Inhalt weiterer Bücher vorhersagen oder deren Anzahl? Begründe!

Lösung: Gibt es nur ein Buch, so darf in diesem kein Wort stehen. Gibt es zwei Bücher, eines mit a und eines mit b Wörtern, dann muss $a \neq b$ sein und $a + b < 2$. Damit darf in einem Buch wieder kein Wort stehen und das andere Buch muss genau ein Wort enthalten. Nehmen wir nun an, es gibt mehr als 2 Bücher, sagen wir n Bücher. Das 1. mit n_1 Wörtern, das 2. mit n_2 Wörtern usw. Dann muss $n > n_1 + n_2 + \dots + n_n$ sein. Da aber alle Bücher unterschiedlich viele Wörter enthalten müssen, ist die Summe auf der linken Seite mindestens so groß wie $0 + 1 + \dots + (n - 1)$. Das ist für $n > 2$ aber immer größer als n selbst, was obiger Ungleichung widerspricht. Es kann also nicht sein, dass es mehr als zwei Bücher gibt. Zusammengefasst muss es also entweder genau ein oder genau zwei Bücher geben. In beiden Fällen muss es ein Buch ohne Worte geben und vielleicht gibt es noch ein Buch mit einem Wort.

5. Tic-Tac-Toe ist ein kleines Spiel für zwei Personen. Auf einem 3×3 Felder großen Spielfeld machen die beiden Spieler abwechselnd ihre Zeichen (ein Spieler Kreuze, der andere Kreise) in ein noch freies Quadrat. Der Spieler, der als erstes drei seiner Zeichen in eine Reihe, Spalte oder eine der beiden Diagonalen setzen kann, gewinnt. Sind alle Quadrate besetzt, ohne dass ein Spieler gewonnen hat, endet das Spiel unentschieden. Ein mögliches Spiel wäre z.B.



In dem Beispiel hat der zweite Spieler gewonnen. Doch wie kann der erste Spieler spielen, damit (egal was der zweite Spieler macht) er nie verliert, er also immer ein Unentschieden oder einen Sieg erreicht.

Lösung :

1.Zug: Setze ein Kreuz in das mittlere Feld.

Jetzt hat der Gegner noch 8 Möglichkeiten zu setzen. Aber für die Strategie sind z.B. alle Eckfelder gleich, da man das Brett ja immer drehen kann und dann mit der Strategie für ein anderes Eckfeld fortfahren kann. Es reicht also eine Strategie für ein bestimmtes Eckfeld anzugeben, sagen wir das Eckfeld links oben. Genauso können die anderen 4 Nicht-Eckfelder gleich behandelt werden.

Fall 1 Der Gegner setzt in das obere linke Eckfeld. Dann setze ins untere linke Eckfeld.

1-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins obere rechte Eckfeld. Dann setze ins obere rechte Eckfeld. Sieg!

1-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins obere rechte Eckfeld. Setze ins mittlere Feld der oberen Zeile.

1-2-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins untere mittlere Feld. Dann setze du dorthin. Sieg!

1-2-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins untere mittlere Feld. Setze ins untere rechte Feld. Nun ist in jeder Zeile oder Spalte mindestens ein Kreuz. Damit kann der Gegner nicht mehr gewinnen und es gibt mindestens ein Unentschieden.

Fall 2 Der Gegner setzt in das obere mittlere Feld. Dann setze ins obere linke Eckfeld.

2-1 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug nicht ins untere rechte Eckfeld. Dann setze du dorthin. Sieg!

2-2 Der Gegner setzt seinen zweiten Zug ins untere rechte Eckfeld. Setze du ins untere linke Eckfeld.

2-1-1 Der Gegner setzt seinen dritten Zug nicht ins linke mittlere Feld. Dann setze du dorthin. Sieg!

2-1-2 Der Gegner setzt seinen dritten Zug ins linke mittlere Feld. Setze du ins obere rechte Eckfeld. Sieg!

Damit haben wir für jeden möglichen Zug des Gegners eine Antwort parat und egal, welche Züge der Gegner macht wir erreichen immer mindestens ein Unentschieden.