Kozi Klasse 6 - Lösungen zur Serie 1

1. Finde alle Lösungen für $ab \times ab = ccb$! Dabei stehen verschiedene Buchstaben für unterschiedliche Ziffern, gleiche Buchstaben für gleiche Ziffern. Keine der Zahlen beginnt mit 0. Beschreibe Deinen Lösungsweg!

Lösung: a muss kleiner als 4 sein, da sonst das Quadrat von ab vierstellig ist. Desweiteren kann b nur eine der Ziffern $0, 1, 5$ oder 6 sein, da b^2 auf b enden soll. 0 fällt aber auch weg, da das Quadrat von 0 auf zwei Nullen enden muss. Bleiben für a nur $1, 2$ oder 3 und für b $1, 5$ oder 6. Wir probieren diese Fälle aus:
$ab = 15$: $(ab)^2 = 225$ ist Lösung mit $c = 2$.
$ab = 16$: $(ab)^2 = 256$ keine Lösung.
$ab = 21$: $(ab)^2 = 441$ ist Lösung mit $c = 4$.
$ab = 25$: $(ab)^2 = 625$ keine Lösung.
$ab = 26$: $(ab)^2 = 676$ keine Lösung.
$ab = 31$: $(ab)^2 = 961$ keine Lösung.
Ab 32 sind die Quadratzahlen schon vierstellig. Damit gibt es zwei Lösungen.

2. Anna und Bodo unterhalten sich.
Bert: Anne, wie alt bist du eigentlich?
Anne: Das verrate ich nicht. Aber vor einem Jahr war mein Vater doppelt so alt wie ich.
Bert: Das ist interessant. Doch damit kann ich noch gar nicht wissen, wie alt du bist.
Anne: Mein Vater und ich sind zusammen 47 Jahre alt.
Bert: Ah! Das sind jetzt genug Informationen um herauszufinden, wie alt dein Vater und du seid.
Hat Bodo recht? Wenn ja, wie alt sind die beiden und warum reichte die erste Information von Anna noch nicht aus, um das herauszufinden. Begründe deine Antwort.

Lösung ohne Variablen: Wenn Anna und ihr Vater heute zusammen 47 Jahre alt sind, dann waren sie vor einem Jahr zusammen 45 Jahre alt. Damals war der Vater doppelt so alt wie Anna. Die 45 Jahre verteilen sich also zu 2 Teilen auf den Vater und zu einem Teil auf Anna. Das sind insgesamt 3 Teile. Damit entspricht ein Teil $45 : 3 = 15$ Jahren. Vor einem Jahr war somit Anna 15 und der Vater 30. Damit sind sie heute 16 und 31.
Die erste Information reicht noch nicht aus, um das Alter zu bestimmen, da es bis dahin noch mehrere Möglichkeiten gibt, z.B. Anne 14 und Vater 27.

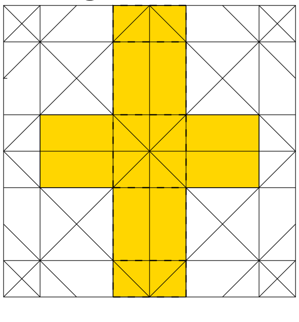
Lösung mit Variablen: Wir führen Variablen für das Alter von Anna und ihrem Vater ein. Das heutige Alter von Anna (in Jahren) sei a und das ihres Vater (ebenfalls in Jahren) v. Vor einem Jahr war also Anna $a - 1$ Jahre alt und ihr Vater $v - 1$. Damals war der Vater doppelt so alt wie Anna. Wir erhalten also die erste Gleichung: $2 \cdot (a - 1) = v - 1$.
Diese Information reicht Bert noch nicht, um das Alter von Anna zu bestimmen, da diese Gleichung noch viele verschiedene Lösungen hat, z.B. $a = 11, v = 21$ oder $a = 10, v = 17$.
Als zweite Information wissen wir, dass Anna und ihr Vater zusammen 47 Jahre alt sind: $a + v = 47$.
Stellen wir diese Gleichung nach v um: $v = 47 - a$ und setzen dies in die erste Gleichung ein, so erhalten wir:

$$2 \cdot (a - 1) = 47 - a - 1, \qquad 2a - 2 = 46 - a, \qquad 3a = 48, \qquad a = 16$$

und damit $v = 31$. Durch Umformen der beiden Gleichungen erhalten wir also, dass es höchstens eine mögliche Lösung geben kann ($a = 16$ und $v = 31$). Die Probe liefert, dass es wirklich eine Lösung ist. Damit ist Anna 16 und ihr Vater 31 Jahre alt.

3. Baue einen Origamiwürfel (Die Anleitung ist auf dem Extrablatt.) Schraffiere die Außenseite des Würfels und entfalte ihn wieder. Durch das Falten ist ein Muster von Faltlinien auf dem ursprünglichen Quadrat entstanden. Skizziere dieses Muster zusammen mit der Schraffur. Wie groß ist das Verhaltnis der Würfelkantenlänge zur Kantenlänge des Ursprungsquadrats? Berechne das Verhältnis der Oberfläche des Würfels zum Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats? Wieviel Volumen Luft musstest du in den noch platten Würfel pusten, damit er die richtige Form erhalten konnte?

Lösung:



Links sieht man das Faltmuster des Origamiwürfels und man erkennt (siehe gestrichelt umrundete Spalte), dass die Seitenlänge des Origamiwürfels vier Mal in die Seitenlänge des Ursprungsquadrat passt. Das Verhältnis ist also $1 : 4$. Nennen wir die Seitenlänge des Ursprungsquadrat a, hat der Origamiwürfel die Seitenlänge $\frac{a}{4}$. Die Fläche des Ursprungsquadrat ist a^2, die Oberfläche des Würfels $6 \cdot \left(\frac{a}{4}\right) = \frac{3}{8}a^2$. Das Verhältnis der Flächen ist also $1 : \frac{3}{8} = 8 : 3$.
Das Volumen des Würfels beträgt $\left(\frac{a}{4}\right)^3$, falls $a = 20cm$ war, wäre das Volumen dann $125cm^3$.

4. 1. Wenn die Aussage „David ist 10 Jahre alt und Eberhard singt gerne.“ falsch ist, welche der folgenden Aussagen ist dann immer richtig, falsch oder könnte stimmen aber wir wissen es einfach nicht? Begründe!
a) David ist keine 10 Jahre alt und Eberhard singt gerne.
b) David ist keine 10 Jahre alt oder Eberhard singt nicht gerne.
c) Entweder ist David keine 10 Jahre alt oder Eberhard singt nicht gerne.

d) David ist keine 10 Jahre alt und Eberhard singt nicht gerne.
2.Carlos sagt: „David lügt.“ David sagt: „Eberhard lügt.“ sagt: „Carlos und David lügen.“ Wer lügt hier nun wirklich, wer sagt die Wahrheit? Kann man das eindeutig herausfinden? Begründe!

Lösung: 1. Wenn eine Aussage falsch ist, dann ist immer ihr Gegenteil richtig. Um das Gegenteil zu finden, kann man sich überlegen, welche Fälle es geben kann. Die Aussage und ihr Gegenteil müssen dann immer alle Fälle abdecken. Für unsere Aussage gibt es folgende Fälle:
1. David ist 10 und Eberhard singt gerne.
2. David ist nicht 10 und Eberhard singt gerne.
3. David ist nicht 10 und Eberhard singt nicht gerne.
4. David ist 10 und Eberhard singt nicht gerne.
Der erste Fall ist die ursprungliche Aussage und damit sind 2-4 zusammen das Gegenteil. 2-4 kann man auch kürzer beschreiben durch „David ist keine 10 Jahre alt oder Eberhard singt nicht gerne.“ Das ist b), also stimmt b) immer. a) und d) sind dagegen möglich, weil sie den Aussagen 2. und 3. entsprechen. Sie können also stimmen, müssen aber nicht, da ja auch Aussage 4 eintreten könnte. Genauso kann c) stimmen, nämlich immer dann, wenn 2. oder 4. eintritt. c) kann aber auch falsch sein, nämlich wenn der dritte Fall eintritt.
Wenn wir wissen, dass der erste Fall falsch ist, können wir nur b) mit Sicherheit folgern.
2. Nehmen wir zuerst an, dass Carlos die Wahrheit sagt. Dann muss David lügen und damit Eberhard die Wahrheit sagen. Wenn Eberhard aber die Wahrheit sagt, dann lügt Carlos. Das ist ein Widerspruch. Also muss Carlos lügen und damit David die Wahrheit sagen und Eberhard lügen. Das geht auch auf, denn wenn Eberhard lügt, dann wissen wir, dass Carlos und David nicht gleichzeitig Lügner sind. Das stimmt, da Carlos lügt und David die Wahrheit sagt.

5. Gustav und Helga spielen ein kleines Spiel. Sie haben 25 Stäbchen auf dem Tisch liegen. Ist ein Spieler am Zug, so kann er wählen, ob er 1, 2, 3 oder 4 Stäbchen vom Tisch nimmt. Gezogen wird abwechselnd. Gewonnen hat der Spieler, der die letzten Stäbchen vom Tisch nimmt. Gustav beginnt. Kann Helga durch cleveres Spiel immer einen Sieg erreichen? Wenn ja, wie? Wie sieht es bei 26 Stäbchen aus?
Was ist eine Strategie? Wenn die Aufgabe darin besteht, eine Strategie für einen Spieler in einem Zweipersonen-Spiel anzugeben, muss man einen Plan angeben, wie der Spieler in jeder denkbaren Spielsituation reagieren soll. Also egal was der andere Spieler macht, soll die Strategie, also der Plan, eine Handlungsanweisung geben.
Man kann sich das so vorstellen, als ob der Spieler ein Roboter wäre, dem man detailliert erklären muss, was er in welcher Situation zu tun hat. Aussagen wie: „Falls der Gegner ... macht, dann antworte so, dass der Gegner nicht gewinnen kann.“ wären da nur wenig hilfreich, da der Roboter ja nur stumpfsinnig das ausführen kann, was der Plan/ die Strategie ihm vorschreibt. Man muss da schon konkret werden, z.B.: „Falls der Gegner ... macht, dann bewege dich einen Schritt vor.“
Was wenn es mehrere Wege zum Ziel gibt? Im Allgemeinen gibt es nicht nur eine mögliche Strategie. Aber es reicht, eine anzugeben. Das ist, als wenn uns einmal jemand nach dem Weg zum Bahnhof fragt. Da geben wir ja auch nicht alle möglichen Wege an, einer reicht ja. Prinzipiell wäre es dann auch richtig den Fragenden einen Weg zu beschreiben, der über den Nordpol führt (auch wenn das in der Praxis nicht zu empfehlen ist!).
Natürlich ist es nicht falsch, mehrere mögliche Strategien anzugeben. Dabei muss aber sehr gut aufgepasst werden. Schreibt man nämlich z.B. Ziehe 2 oder 3 Stäbchen. Dann heißt das, dass jede der beiden Möglichkeiten richtig sein muss. Der Roboter hat ja keine Zusatzinformationen um zu entscheiden, welche dieser beiden Möglichkeiten er wann zu wählen hat. Er wählt also zufällig eine aus. Es ist also komplizierter eine Strategie so anzugeben, da man mehr überprüfen muss und dann auch wirklich zeigen muss, dass egal welche Möglichkeit der Roboter zufällig auswählt, die Strategie immer zum Ziel führt. Das ist im Zweifel aufwändiger und fehleranfälliger. Kann aber natürlich trotzdem richtig werden.
Wie finde ich die richtige Strategie?
Das kommt aufs Spiel an und ist manchmal auch gar nicht einfach. Oft empfiehlt es sich aber, „klein “ anzufangen (hier mit einer kleinen Stäbchenanzahl) und nach Verlust- und Gewinnpositionen zu suchen. Eine **Gewinnposition** ist eine Spielstellung (hier Anzahl der verbliebenen Stäbchen), in der der Spieler bei richtigem Spiel immer gewinnt, egal was der Gegner macht. In unserem Beispiel sind z.B. 1,2,3 und 4 alles Gewinnpositionen, da der Spieler, der dran ist, einfach nur alle wegnehmen muss und der Gegner nichts dagegen tun kann. Eine **Verlustposition** ist eine Spielstellung, wo jeder mögliche Zug auf eine Gewinnposition für den Gegner führt. Liegen z.B. 5 Stäbchen vor dir, kannst du nur 1-4 Stäbchen ziehen und in jedem Fall liegt vor deinem Gegner dann eine Gewinnposition. Liegen nun aber z.B. 6 Stäbchen vor dir, musst du nur ein Stäbchen ziehen und vor deinem Gegner liegen 5 Stäbchen also eine Verlustposition. Damit kannst du mit dieser Strategie - also in diesem Fall 1 Stäbchen zu ziehen immer gewinnen. Es ist also eine Gewinnposition. So kann man sich langsam auf 25 und mehr Stäbchen vorarbeiten.
Zusammenfassend:
Eine Spielstellung ist eine Gewinnposition, falls es (mindestens) **einen Zug gibt**, der zu einer Verlustposition führt.
Eine Spielstellung ist eine Verlustposition, falls es **jeder mögliche Zug** zu einer Gewinnposition führt. (Denn der Gegner kann ziehen wie er will und muss nicht ziehen, wie wir es uns wünschen.)

Lösung zur 5.Aufgabe: Helga kann folgende Strategie nutzen: Zieht Gustav x Stäbchen, zieht sie $5-x$ Stäbchen. Damit sind nach 2 Zügen noch 20 Stäbchen da, nach 4 Zügen noch 15, nach 6 Zügen noch 10 usw und im zehnten Zug kann Helga so die letzten Stäbchen nehmen. Gustav kann dagegen gar nichts tun, da er ja maximal 4 Stäbchen ziehen kann und Helga dadurch auch wirklich immer $5 - x$ Stäbchen ziehen kann.
Liegen 26 Stäbchen auf dem Tisch, kann Gustav immer gewinnen, indem er ein Stäbchen zieht. Dann liegen vor Helga noch 25 Stäbchen und sie befindet sich jetzt in der Situation von Gustav vorher. Wenn Gustav dann also die obige Strategie anwendet, wird er gewinnen.