LEIPZIGER SCHÜLERGESELLSCHAFT FÜR MATHEMATIK

http://lsgm.uni-leipzig.de

Dr. Hans-Gert Gräbe, apl. Prof. am Inst. f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2007/08 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 6

1. Ermittle die Erfüllungsmenge der folgenden Gleichungen auf grafischem Wege: (6 Pkt.)

a) $2 - \frac{1}{3}x \leq 4 - |x-4|$

b) $\operatorname{sgn}\left(\frac{2}{3}x + 2\right) + \left|\frac{1}{2}x - 1\right| \leq 3$

c) $\left\lfloor \frac{1}{2}x + 2 \right\rfloor + |2-x| \leq 4\,.$

2. Beweise folgenden Satz: (6 Pkt.)

Wenn J den Flächeninhalt, u den Umfang und r die Länge des Inkreisradius eines Dreiecks bezeichnet, so gilt $r = \frac{2\,J}{u}$.

3. Wir bezeichnen mit $a(n)$ die Anzahl der Teiler der positiven natürlichen Zahl n. So gilt z. B. $a(12) = 6$, da die Zahl $n = 12$ genau die sechs Teiler $1, 2, 3, 4, 6, 12$ besitzt. (6 Pkt.)

a) Berechne $a(n)$ für die folgenden neun Zahlen $n \in \{2; 4; 8; 3; 27; 6; 54; 72; 180\}$.

b) Finde eine Formel für die Berechnung von $a(n)$ für gegebenes n. Verwende dabei die (eindeutige) Zerlegung $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ von n in ein Produkt von Primzahlpotenzen.

c) Beweise diese Formel!

4. Die durch den Eckpunkt C eines Dreiecks ABC verlaufende Winkelhalbierende schneide den Umkreis k dieses Dreiecks im Punkt D. (6 Pkt.)

a) Was lässt sich über die Lage von D auf dem Umkreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ aussagen? Formuliere einen entsprechenden Satz und beweise ihn (direkt).

b) Bilde eine wahre Umkehrung dieses Satzes und beweise sie indirekt.

5. Für ein Eisenbahnnetz mit n Stationen wurden so viele Arten von Fahrkarten gedruckt, dass es für die Reise von jeder Station zu jeder anderen eine eigene Fahrkarte gab. Dabei ist die Fahrkarte von A nach B eine andere Fahrkarte als die von B nach A.

Dieses Eisenbahnnetz wurde um k Stationen erweitert. Um auch für jede der dadurch neu entstandenen Verbindungen eine eigene Fahrkarte zu haben, mussten 46 Arten neuer Fahrkarten gedruckt werden.

Untersuche, ob man aus diesen Angaben die Zahlen n und k eindeutig ermitteln kann und gib alle Lösungen an!

Hinweise zu den Aufgaben:

In der ersten Aufgabe geht es um die grafische Lösung von Ungleichungen, in denen einfache Funktionen vorkommen. Ziel ist es, dass Ihr Euch einen Überblick über das Aussehen der Graphen verschiedener Funktionen erarbeitet, die aus linearen und einigen „besonderen“ Funktionen zusammengesetzt sind.

Versucht dazu – vielleicht nach einer kleinen Umstellung der Ausdrücke –, von den einzelnen Teilen, also den Funktionen $|x-4|$, $\operatorname{sgn}\left(\frac{2}{3}x+2\right)$, $\left|\frac{1}{2}x-1\right|$, $\left\lfloor\frac{1}{2}x+2\right\rfloor$ usw. den jeweiligen Graphen zu zeichnen (pro Teilaufgabe in ein extra Koordinatensystem) und die für die Lösung relevanten Teile zu markieren.

Hier noch einmal die Definitionen für die „besonderen“ Funktionen:

$|x|$ ist die *Betragsfunktion*, d. h. „x ohne Vorzeichen“

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$\lfloor x \rfloor$ ist die *Gauß-Klammer*, d. h. die größte ganze Zahl, die x nicht übersteigt
(also z. B. $\lfloor 1{,}32 \rfloor = \lfloor 1{,}33 \rfloor = \lfloor 1{,}45 \rfloor = \lfloor 1{,}98 \rfloor = 1$, $\lfloor -0{,}25 \rfloor = -1$).

$\operatorname{sgn}(x)$ ist die *Signum- oder Vorzeichen-Funktion*, d.h.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Aufgaben dieser Art haben wir zum Arbeitstreffen besprochen.

In Aufgabe 2 geht es um Beziehungen zwischen geometrischen Bestimmungsstücken. Überlege dazu, wo der Inkreismittelpunkt I liegt und welche Eigenschaften er hat. Vielleicht hast du eine Idee, wenn du die Strecken $\overline{AI}, \overline{BI}$ und $\overline{CI}$ einzeichnest?

Auch in Aufgabe 4 geht es um eine wichtige Eigenschaft von Winkelhalbierenden im Dreieck. Typisch für solche geometrischen Sätze ist deren Umkehrbarkeit. Während es in Teil a) also um eine Aussage der Form „Wenn D der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit den Umkreis ist, dann hat D die und die Eigenschaft“, so ist in Teil b) eine Umkehrung der Form „Wenn D auf dem Umkreis liegt und die und die Eigenschaft hat, dann ist es der Schnittpunkt des Umkreises mit der Winkelhalbierenden“. Im Beweis solcher Aussagen kann die (schon bewiesene) Aussage aus a) verwendet werden. Ein indirekter Beweis verläuft dann meist so: „Sei D ein Punkt mit den und den Eigenschaften, aber nicht der Schnittpunkt. Dann gibt es neben D auch noch den Schnittpunkt selbst, also D'. Nach a) wissen wir, dass auch D' die und die Eigenschaften hat. Aber ..., deshalb gibt es keine zwei Punkte mit der und der Eigenschaft. Also muss $D = D'$ sein.“ Die Pünktchen musst du natürlich durch eine eigene Argumentation ausfüllen.

Aufgabe 3 und 5 haben beide etwas mit dem Finden von Formeln zu tun. Untersuche zunächst genügend Beispiele, versuche einen systematischen Weg zu finden und setze diesen dann in mathematische Formeln um.

Lösungen zu dieser Aufgabenserie kannst du **bis zum 5. Mai 2008** einschicken an

Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht

Dr. H.-G. Gräbe.