
Dr. Hans-Gert Gräbe, apl. Prof., Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2007/08 der LSGM Klasse 8 – Aufgabenserie 4

1. Ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ ganzer Zahlen, die folgende Gleichung erfüllen:
(je 2 Pkt.)

a) $29x + 27y = 56$ b) $121x - 77y = 57$ c) $29x - 79y = 43$.

2. Ein Zahlentripel $(x; y; z)$ heißt *pythagoräisches Grundtripel* genau dann, wenn $x^2 + y^2 = z^2$ gilt und x, y, z teilerfremde natürliche Zahlen sind.

Beweise, dass für jedes pythagoräische Grundtripel folgende Sätze gelten: (6 Pkt.)

- Ist p eine Primzahl, so ist höchstens eine der drei Zahlen des Tripels durch p teilbar.
- Die Zahlen x, y sind niemals beide ungerade.
- z ist immer ungerade.

Benutze die Methode des indirekten Beweises, wo dies sinnvoll ist.

3. Ein Tetraeder $ABCD$ hat Kanten der Längen $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm, $|AC| = 8$ cm, $|AD| = 13$ cm, $|BD| = 13$ cm, und das Lot von D auf die Ebene durch ABC ist 12 cm lang.

Beweise, dass durch diese Angaben die Länge der Kante \overline{CD} eindeutig bestimmt ist und ermittle diese Kantenlänge. (6 Pkt.)

4. Über das Ergebnis eines 100 m-Llaufes mit sechs Teilnehmern, von denen keine zwei die gleiche Zeit liefen, wurden folgende vier Aussagen gemacht:

- A wurde nicht Zweiter oder B wurde Erster.
- A wurde Zweiter und C wurde Vierter.
- A wurde Zweiter und B wurde Dritter.
- C wurde Vierter oder B wurde Fünfter.

Ermittle, ob es möglich ist, dass (6 Pkt.)

- alle vier Aussagen wahr sind.
- genau zwei dieser Aussagen wahr sind.

- c) genau eine dieser Aussagen wahr ist.
- d) keine dieser Aussagen wahr ist.

Gib außerdem alle möglichen Reihenfolgen des Einlaufs an, bei denen genau drei dieser Aussagen wahr sind.

5. Beweise folgenden Satz über reelle Zahlen x, y : (6 Pkt.)

$$\text{Wenn } x, y > 0 \text{ und } x + y = 1, \text{ dann gilt stets } \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Untersuche, ob es ein solches Zahlenpaar gibt, für welches in der Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt.

Hinweise zu den Aufgaben:

In Aufgabe 1 geht es um das Lösen linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Solche Gleichungen bezeichnet man auch als *lineare diophantische Gleichung*. Sie haben sehr viel mit linearen Kongruenzen zu tun. Lies vor dem Lösen dieser Aufgabe das beiliegende Arbeitsmaterial *Lineare diophantische Gleichungen*.

In Aufgabe 2 geht es um Teilbarkeitsaussagen für pythagoräische Zahlentripel wie zum Beispiel (3; 4; 5) oder (5; 12; 13), für die $x^2 + y^2 = z^2$ gilt. Für die Teilaufgaben b) und c) ist es sinnvoll, mögliche Reste bei Division durch 4 zu betrachten und auf der Basis eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Welche Reste können Quadratzahlen bei Division durch 4 lassen?

Aufgabe 3 sieht aus wie eine Aufgabe aus der räumlichen Geometrie. In Wirklichkeit sind es aber nur mehrere Dreiecke, die gemeinsame Seiten haben. Untersuche, welche der Dreiecke rechtwinklig sind (wie bekommt man das raus, wenn die Seitenlängen gegeben sind?).

Aufgabe 4 ist eine Logikaufgabe, wo es vor allem darauf ankommt, präzise die Negation einer Aussage zu formulieren (denn eine Aussage ist ja genau dann falsch, wenn die Negation wahr ist) und in der Vielzahl der Fallunterscheidungen nicht die Übersicht zu verlieren.

In Aufgabe 5 schließlich geht es das erste Mal in diesem Schuljahr um den Beweis einer Ungleichung über den reellen Zahlen. Lies dazu vorher das beiliegende Arbeitsmaterial *Beweisen von Ungleichungen*.

Von der aktuellen Serie haben insbesondere die Aufgaben 1 und 2 Probleme bereitet. Auch die detailliertere Formulierung der Fragen in Aufgabe 2 hat nicht weitergeholfen. Wir werden beide zum nächsten **Arbeitstreffen** am Samstag, 26. Januar 2008, genauer besprechen. Wir treffen uns um 9.00 Uhr wie immer vor dem Eingang zum Uni-Interim im Städtischen Kaufhaus, Universitätsstraße 7. **Bitte teile mir mit, ob du am Arbeitstreffen teilnimmst.**

Lösungen zu dieser Aufgabenserie kannst du **bis zum 12. Februar 2008** einschicken an
Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht

Dr. H.-G. Gräbe.