LEIPZIGER SCHÜLERGESELLSCHAFT
FÜR MATHEMATIK

http://lsgm.uni-leipzig.de

Dr. Hans-Gert Gräbe, apl. Prof., Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2007/08 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 3

1. Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit der Grundfläche $ABCD$ und der Kantenlänge a. Sei P der Diagonalenschnittpunkt der Seitenfläche $BCGF$ und Q der Diagonalenschnittpunkt der Seitenfläche $EFGH$. (6 Pkt.)

a) Ermittle den Umfang des Dreiecks APQ in Abhängigkeit von a.

b) Beweise, dass dann stets $|\angle PBQ| = |\angle PQB|$ gilt.

2. Gegeben sind die Streckenlängen b und c. Zu konstruieren sind alle Dreiecke, für die $|AC| = b,\ |AB| = c$ und $|\angle ACB| = 3\ |\angle CBA|$ gilt. (6 Pkt.)

a) Begründe, warum solche Dreiecke nicht existieren, wenn $b \geq c$ gilt.

b) Konstruiere ein solches Dreieck für $b = 5\,\text{cm},\ c = 7\,\text{cm}$.

c) Gib eine Konstruktionsbeschreibung und begründe, warum das von dir konstruierte Dreieck die geforderten Eigenschaften hat.

d) Untersuche, für welche Paare $(b; c)$ mit $b < c$ die Konstruktion c) ausführbar ist. Zeige, dass für diese Paare $(b; c)$ das so konstruierte Dreieck die geforderten Eigenschaften hat und es bis auf Kongruenz keine weiteren solchen Dreiecke gibt.

Beachte, dass die Aufgabenstellung detaillierter ist als im Chemnitzer Aufgabenblatt!

Hinweis: Die Hilfslinie CD durch den Punkt D auf der Strecke $\overline{AB}$, für den $|\angle DCB| = |\angle CBA|$ gilt, leistet gute Dienste.

3. Beweise, dass man unter 100 beliebigen aufeianderfolgenden positiven ganzen Zahlen stets eine Zahl finden kann, deren Quersumme durch 14 teilbar ist. (6 Pkt.)

4. Beweise, dass für natürliche Zahlen n die Zahl $z = 46^{2n} - 12^{2n}$ stets durch 1972 teilbar ist. (6 Pkt.)

5. Die bei einer Lotterie ausgeschütteten Gewinne waren sämtlich voneinander verschieden. Der höchste Gewinn war 88-mal so groß wie der niedrigste Gewinn. Jeder der drei höchsten

Gewinne unterschied sich vom nächst niedrigeren Gewinn um 15 000 Euro. Die übrigen Gewinne waren ebenfalls um einen gleichen Betrag abgestuft. Der kleinste Gewinn betrug 5 000 Euro, der drittniedrigste 18 000 Euro.

Ermittle die Anzahl der Gewinne und die insgesamt ausgeschüttete Gewinnsumme! (6 Pkt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

Aufgabe 1 ist eine Aufgabe aus der räumlichen Geometrie. Fertige dir zunächst eine Skizze an, in der alle relevanten Stücke zu sehen sind. Zur Bestimmung der Seitenlängen des Dreiecks APQ bietet sich der Satz des Pythagoras an. In welchen der vielen rechtwinkligen Dreiecke ist er zielführend anzuwenden? Suche dazu verschiedene Punkte, die in einer Ebene liegen, und stelle die Schnittfigur der jeweiligen Ebene mit dem Würfel in einer separaten Zeichnung dar.

Aufgabe 2 ist eine Konstruktionsaufgabe. Gegenüber dem Chemnitzer Aufgabenblatt habe ich die Aufgabe genauer unterteilt. Das Vorgehen in den angegebenen vier Schritten ist typisch für Konstruktionsaufgaben. Fertige dir für die Analyse auch dieser Aufgabe zunächst eine Skizze an und finde Beziehungen zwischen Winkeln heraus, die für die Lösung nützlich sein könnten. Beachte den gegebenen Hinweis und zeichne die genannte Hilfslinie ein! Zur Erinnerung und weiteren Referenz ist hier noch einmal die Liste der Fragen und Aufträge zusammengefasst, die zur vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe zu bearbeiten sind:

- Konstruktionsbeschreibung
- Nachweis, dass die so konstruierten Gebilde die Aufgabenstellung erfüllen
  (jedes Gebilde ist also Lösung – Existenznachweis)
- Nachweis, dass keine anderen Gebilde die Aufgabenstellung erfüllen
  (es wurde keine Lösung übersehen – Einzigkeitsnachweis)
- Untersuchung, für welche Kombinationen der Vorgabewerte die Konstruktion ausgeführt werden kann (Determination)

Wir werden das bereits aus Klasse 7 bekannte Thema „Konstruktionsaufgaben“ zum nächsten Arbeitstreffen noch einmal genauer besprechen.

Die restlichen drei Aufgaben gehören zum Standardrepertoire. Überlege für Aufgabe 3, wie sich die Quersumme aufeinanderfolgender Zahlen ändert – insbesondere beim Übergang über einen Hunderter. In Aufgabe 4 geht es um Teilbarkeit und Aufgabe 5 ist wieder eine Textaufgabe, wo die größte Hürde die Übersetzung des Problems in mathematische Formeln darstellt. Bitte beachte, dass deine Lösung mit einer Erklärung beginnt, was du mit den einzelnen von dir eingeführten Variablen genau bezeichnest, denn ich bin ja kein Hellseher.

Lösungen zu diesen Aufgaben kannst du **bis zum 4. Januar 2008** einschicken an

Dr. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Unser nächstes **Arbeitstreffen** findet wie geplant am 26. 01. 2008 statt. Details dazu kommen mit der nächsten Serie Anfang Januar.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben sowie dir und deinen Eltern ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute im Neuen Jahr wünscht

Dr. H.-G. Gräbe.