

Korrespondenz-Seminar der LSGM 2007/8

Klasse 7, Serie 7

Aufgabe 1 Beweise die folgenden Sätze über reelle Zahlen x, y :

a) Wenn $x, y > 0$, dann gilt $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$.

b) Wenn $x, y > 0$, dann gilt $x(x + 1) + \frac{y^2}{x} \geq x^2 + 2y$.

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 4.3 (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) sowie in „Regeln“ (1), (2.2.1) und (2.2).

Aufgabe 2 Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen über natürliche Zahlen a, b und c :

a) Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, dann $b \mid c$.

b) Wenn $a \mid b$ und $a \mid c$, dann $a^2 \mid bc$.

c) Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$, dann $ab \mid c$.

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.2 (Teilbarkeitslehre) und in „Regeln“ (1), (2.1) und (2.2).

Aufgabe 3 Es sein n eine natürliche Zahl und es sei $z = 46^n - 12^{2n}$.

Beweise, dass dann stets gilt $1972 \mid z$.

Hinweis. Rückwärtsarbeiten! Die Zahl 1972 lässt sich als Produkt aus drei Primzahlpotenzen zerlegen. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.3 (Rechnen mit Kongruenzen).

Aufgabe 4 Ermittle die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen über dem Bereich der rationalen Zahlen.

a)

$$\frac{3-x}{66} - \frac{3x+1}{154} = \frac{2-x}{42} - \frac{3x-1}{231}.$$

b)

$$\frac{3x-7}{4x-6} - \frac{3}{5} = \frac{1}{3} - \frac{x+6}{10x-15}.$$

Hinweis. Wiederhole dazu im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt (Regeln für das äquivalente Umformen).

Aufgabe 5 Ein Kraftfahrer fuhr mit seinem PKW von A nach B . Nach einer Fahrzeit von 20min hatte er eine Panne, die in 30min behoben werden konnte. Nach weiteren 12min Fahrzeit musste er an einer geschlossenen Bahnschranke 4min warten. Bis dahin hatte er

40 km zurückgelegt. Die Fahrt von der Bahnschranke nach B begann um 11:06 Uhr und verlief ohne Aufenthalt. In B angekommen stellte der Kraftfahrer fest, dass er von der Abfahrt an der Bahnschranke bis zur Ankunft in B genau die Hälfte der Zeit benötigt hatte, die insgesamt von der Abfahrt in A bis zur Ankunft in B vergangen war. Es sei angenommen, dass der Kraftfahrer auf jedem Teilstück dieses Weges mit der gleichen Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr.

- a) Zu welcher Uhrzeit traf der Kraftfahrer in B ein?
- b) Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h?
- c) Wie viele Kilometer hatte er insgesamt von A nach B zurückgelegt?

Letzter Einsendetermin: 21. Juni 2008