Wie schreibe ich das auf?

Nadine Große und Andreas Nareike

Warum sich abmühen?

Es ist wieder soweit, ich habe endlich die Aufgabe gelöst und nun sitze ich vor meinem leeren Blatt. Wie schreibe ich die Lösung auf? Und nicht nur wie, sondern auch: Warum eigentlich?

Weil ich muss, weil es ja schließlich meine Aufgabe ist. Nein, eben nicht! Gut, vielleicht ein wenig auch darum. Aber vor allem ist das Aufschreiben ein Schritt in meiner Lösung der Aufgabe – und noch nicht einmal der letzte. Es ist der Schritt, in dem ich meine Gedanken endgültig klar strukturiere und noch einmal alles durchgehe. Es ist der Moment, in dem ich meine Lösung so festhalten möchte, dass ich sie später immer noch verstehe.

Habe ich es geschafft mich so auf ehrliche Weise selbst zu überzeugen, wird es nun viel leichter, dass mein zu Papier Gebrachtes auch andere überzeugt, egal ob es ein Korrektor oder sonst ein interessierter Leser ist. Sicher werde ich vielleicht trotzdem manchmal noch einen Fehler übersehen, aber die Hoffnung, dass diese weniger werden, besteht.

Schreiben wie man spricht

Wenn ich die Lösung einer Aufgabe aufschreibe, hilft es mir ungemein zu überlegen, wie ich sie jemandem erklären würde. Auch wenn Mathematik viel mit Formeln und Zahlen zu tun hat, sollte meine Lösung immer die Form haben, dass ich sie auch vorlesen könnte. Aus diesem einfachen Vorsatz kann ich schon eine Menge Folgerungen ziehen.

Im Endeffekt ist die Lösung ein Text und als solcher soll sie auch verständlich sein. Natürlich will ich auch keinen Roman schreiben. Dennoch ist es ungünstig, die Kürze dadurch zu erreichen, dass ich die Hälte meiner Überlegungen nicht aufschreibe („… weil es dann viel zu lang wird!“). Vielmehr sollte meine *Argumentation* schon knapp und präzise sein, so dass es gar nicht so viel *gibt*, was man aufschreiben könnte.

Gegeben, gesucht …

Die Lösung zu einer Aufgabe beginne ich am besten damit, dass ich nochmal kurz aufschreibe, worum es geht. Es geht ja meist auch gar nicht so sehr darum, dass ich die richtige Antwort (z.B. 40320) finde. Vielmehr ist der Sinn, dass ich erkläre, wie ich die Antwort gefunden habe. Im Idealfall kann ich meine Lösung auch dann noch verstehen, wenn der Zettel mit dem Aufgabentext verloren gegangen ist.

Wenn meine Lösung aber z.B. nur aus der Zeile

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

besteht, brauche ich immer den Aufgabentext um zu verstehen, was ich da gemacht habe. Und auch wenn ich jemandem meine Lösung erklären soll, muss ich mir in diesem Fall erst *überlegen*, warum ich das gemacht habe – es steht ja nicht da.

Begriffe einführen

Bezeichnungen führe ich ein, damit der Text übersichtlicher und kürzer wird. Viele Dinge lassen sich auch nur umständlich sagen, wenn man keine zusätzlichen Bezeichnungen einführt. Das gilt noch mehr, wenn man etwas nur vorliest. Das sieht man sehr schön an folgendem mehr oder weniger bekannten Text:

> *When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who – well, if he broke his head, than his girl – not the other fellow's, but the fellow who was the – Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.*
>
> (aus: M. Kline, „Mathematics in Western Culture“)

Damit meine Bezeichnungen und Variablen aber wirklich nützlich sind, muss ich natürlich sagen, wofür genau sie stehen. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, z.B. *Sei n eine natürliche Zahl* oder auch *Die Menge aller roten Hüte bezeichnen wir mit R.* Natürlich geht auch *Sei* $n \in \mathbb{N}$, aber auch dann sollte man beim Schreiben immer an einen gesprochenen Satz denken.

Manchmal kann es etwas aufwändig sein, eine Bezeichnung einzuführen, aber andererseits muss es auch nicht unbedingt so kompliziert und formal wie möglich sein. Dazu zwei Beispiele: eines, das zeigt, wie man es eher nicht machen sollte und eines, das zeigt, wie es besser geht.

Schlechtes Beispiel
Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Seien $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{N}$ und $a_n \in \{1, 2, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{N}$. Weiter sei

$$m := \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \cdot 10^i.$$

Dann definieren wir

$$Q(m) := \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Aus mehreren Gründen finde ich diese Definition schwerfällig und eher verwirrend als erhellend. Manchmal benötige ich so eine Definition, wenn ich z.B. die a_i noch verwenden will. Meist aber geht es wesentlich kürzer und trotzdem ist klar, was gemeint ist:

> **Gutes Beispiel**
> Für eine natürlich Zahl m bezeichne $Q(m)$ die Summe ihrer Ziffern in Dezimaldarstellung.

Wenn schon klar ist, dass sowieso ausschließlich von Zahlen in Dezimaldarstellung die Rede ist, kann der Zusatz am Ende auch noch wegfallen.

In Geometrieaufgaben zeichne ich eine Skizze und beschrifte sie. Allerdings kann ich mittels einer Skizze keine Bezeichnungen einführen, sondern diese nur illustrieren. Zeichne ich einen Punkt M auf einer Strecke $\overline{AB}$, so sieht es vielleicht so aus, also wäre es der Mittelpunkt. Doch wenn ich meine Lösung später anschaue, werde ich mich fragen: „Soll das jetzt ein beliebiger Punkt sein oder doch der Mittelpunkt?"

Da ich eine Skizze schlecht vorlesen kann, ist sie allein auch keine Lösung. Ich schreibe einen Text dazu, der erklärt, was in der Skizze zu sehen ist und was ich mir dabei gedacht habe. In einer Skizze kann ich später auch nicht sehen, was ich zuerst gezeichnet habe und was zuletzt konstruiert – ein erklärender Text muss also dabei sein.

Stuktur geben

Ich möchte es also so einrichten, dass ich meine Lösung notfalls auch vortragen kann. Daher ist es besonders wichtig, dass ich nicht nur einzelne Formeln aneinanderreihe, sondern auch schreibe, was ich mache bzw. gleich machen werde und auch, warum ich dieses oder jenes mache.

Sehr selten beweise ich etwas mit nur einer Zeile, meist brauche ich schon mehrere Beweisschritte. Am besten sage ich also, was ich in einem bestimmten Schritt beweisen will und wann ich damit fertig bin, z.B. so:

> **Gutes Beispiel**
> ... also müssen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Objektes zeigen.
>
> 1. Zur Existenz:
> $\vdots$
>   Damit ist die Existenz gezeigt.
> 2. Zur Eindeutigkeit:
> $\vdots$
>   Wir sehen also, dass ein solches Objekt auch eindeutig ist.

Es gibt in unserer Sprache viel kleine Wörter, die eine logische Struktur erzeugen. Solche Wörter lernt man auch kennen, wenn man in einer Fremdsprache einen Kommentar oder eine Erörterung schreiben soll. Einige Beispiele für solche Wörter:

somit / daher / folglich / dann / also
wenn ..., dann / aus ... folgt, dass ...

Je nach Sprachgefühl und Kontext, kann ich eine Begründung lieber vor die zu begründende Aussage oder hinter diese stellen. Allerdings will ich lieber nicht beides gleichzeitig benutzen. Ich kann sagen: *Nach dem Strahlensatz gilt ...* oder *Weil die linke Seite der Gleichung 0 ist, ...* Wenn ich die Begründung nach der Aussage aufschreibe, dann z.B. so: *..., weil p eine Primzahl ist* oder *..., da ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck ist.* Ich vermeide aber so etwas:

Schlechtes Beispiel
Nach dem Satz des Pythagoras ist $\overline{AB} = 5$, weil das Viereck einen rechten Winkel bei C hat.

So ein Satz verwirrt nur, weil schon die Reihenfolge der Voraussetzungen nicht klar ist. Man muss erst innerlich nach Voraussetzung und Schlussfolgerung sortieren, bevor man sich über die Richtigkeit Gedanken machen kann. Das stört den Lesefluss und lenkt somit vom Wesentlichen ab, dem Inhalt. Viel besser klingt:

Gutes Beispiel
Das Viereck hat einen rechten Winkel bei C und somit ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AB} = 5$.

Hier steht die Begründung vor der Aussage. Alternativ geht es auch so:

Gutes Beispiel
Es ist $\overline{AB} = 5$, da das Viereck einen rechten Winkel bei C hat und sich daher der Pythagoras auf das Dreieck $\triangle ABC$ anwenden lässt.

Endlich Fertig?

So jetzt habe ich sie aufgeschrieben, die Lösung. Aber das war – wie gesagt – noch nicht der letzte Schritt. Ich lese mir jetzt alles noch einmal durch und achte dabei nicht nur auf den mathematischen Inhalt.

Die ganze Zeit war ich damit beschäftigt, mir über die Richtigkeit meiner Aussagen, die Begründungen meiner Schlüsse und die Strukturierung meiner Lösung Gedanken zu machen. Da kann es schon einmal vorkommen, dass ich im Eifer des Gefechts vielleicht ein Subjekt, ein Prädikat oder gleich einen halben Satz unterschlagen habe. Am besten spreche ich meinen Text beim Lesen gedanklich mit und versuche, mir die Lösung selbst noch einmal zu erklären.

Es ist auch immer gut, wenn man noch jemanden hat, der alles noch einmal durchsieht. Da erhalte ich meine Lösung vielleicht auch einmal im roten Zustand zurück, aber das ist gut so. Denn: Meine Lösung ist immerhin so klar, dass der Leser sagen kann, was er noch nicht begriffen hat oder wo vielleicht noch ein Schritt in der Begründung fehlt. Habe ich mich unklar ausgedrückt, kann der Leser nicht einmal mehr sagen, ob etwas falsch oder richtig ist und ich bekomme vielleicht nur ein riesiges Fragezeichen am Rand.