Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

Prof. Hans-Gert Gräbe, Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2006/07 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 3

1. Sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Durch den Mittelpunkt E der Kante $\overline{AB}$ sei eine Ebene so gelegt, dass sie diese Kante nicht enthält und dass sie zur Kante $\overline{BD}$ und zur Kante $\overline{AC}$ parallel verläuft.

Ermittle den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder in Abhängigkeit von a. (6 Pkt.)

2. Gegeben sind eine Winkelgröße α und eine Streckenlänge s. Zu konstruieren sind alle untereinander paarweise nicht kongruenten Vierecke $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $ABCD$ ist ein Rhombus;
(2) $|\angle BAD| = \alpha$;
(3) $|AC| + |BD| = s$.

a) Konstruiere ein solches Rhombus für $\alpha = 35°$ und $s =10\,\text{cm}$.

Gib eine Konstruktionsbeschreibung an und untersuche, unter welchen Bedingungen an α und s Lösungen existieren. (Determination)

b) Beweise: Wenn ein Viereck die Bedingungen (1) – (3) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren. (Vollständigkeit der Lösung)

c) Beweise: Wenn ein Viereck wie beschrieben konstruiert wurde, dann erfüllt es die Bedingungen (1) – (3). (Korrektheit der Lösung) (6 Pkt.)

3. Es gibt Paare $(x; y)$ zweistelliger natürlicher Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Vertauscht man die Ziffern einer der beiden Zahlen und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, dann erhält man die andere Zahl des Paares.

Ein solches Paar ist etwa $(25; 61)$, denn es gilt $52 + 9 = 61$ und $16 + 9 = 25$.

a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die als Elemente solcher Paare auftreten können.

b) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind. (6 Pkt.)

4. In einem Abteil eines Zuges fuhren genau vier Personen mit den Namen Fischer, Götting, Hauser und Jordan. Ihre Berufe waren (nicht unbedingt in dieser Reihenfolge) Astronom, Poet, Schriftsteller, Dramatiker. Es stellte sich heraus, dass jeder genau ein Buch mitgebracht hatte, das von einem der drei anderen Reisenden geschrieben war.

Von den Reisenden ist folgendes bekannt:

(a) Keiner brachte ein Buch mit, welches er selbst geschrieben hatte.
(b) Der Poet las ein Theaterstück.
(c) Götting hatte sich für die Reise eines der Werke Jordans mitgebracht.
(d) Der Schriftsteller, ein junger Mann, hatte eben sein erstes Werk veröffentlicht und gab offen zu, dass ihn Astronomie nicht interessiert und er deshalb auch kein Buch über Astronomie mitgebracht hat.
(e) Fischer und Götting vertieften sich in die Lektüre, nachdem sie die mitgebrachten Bücher ausgetauscht hatten.
(f) Der Astronom schrieb ein Astronomiebuch, der Poet einen Gedichtband, der Schriftsteller ein Prosawerk und der Dramatiker ein Theaterstück.

Untersuche, ob sich allein aus diesen Angaben eine Zuordnung zwischen den Namen, den Berufen und den gelesenen Büchern eindeutig ermitteln lässt. Ist dies der Fall, dann gib diese Zuordnung an. (6 Pkt.)

5. Der ganzzahlige Nenner eines Bruchs sei um 30 größer als sein ganzzahliger Zähler. Addiert man sowohl zum Zähler als auch zum Nenner jeweils die ganze Zahl a, dann erhält man den Kehrwert des Ausgangsbruchs.

a) Für welche Werte von a gibt es keinen derartigen Bruch?

b) Wie heißen die zu $a = -32$ und $a = 8$ gehörenden Brüche? (6 Pkt.)

Hinweise zu den Aufgaben:

Mit der Aufgabe 1 steht erstmals in diesem Schuljahr eine Aufgabe der räumlichen Geometrie auf dem Programm. Fertige zur Veranschaulichung der Situation ein sauberes Schrägbild an und stelle zunächst eine Vermutung über die Art der ebenen Schnittfigur an, die auch durch Punkte auf anderen Kanten des Tetraeders (welche? warum?) geht. Diese Vermutung muss dann natürlich auch bewiesen werden. Dazu sind Aussagen über Parallelität von Ebenen und Geraden im Raum hilfreich. Überlege dann, welche Größen zur Bestimmung des Flächeninhalts einer solchen Figur benötigt werden und wie sich diese aus der bekannten Kantenlänge a des Tetraeders berechnen lassen.

Die Aufgaben 3 – 5 sind Standardaufgaben, in denen logisches und arithmetisches Argumentieren geübt werden soll. Die größte Hürde ist die Umsetzung in mathematische Formeln bzw. (in Aufgabe 4) die genaue und wasserdichte logische Argumentation.

Aufgabe 2 ist eine Konstruktionsaufgabe. Eine solche Aufgabe besteht aus mehreren Arbeitsaufträgen, die in der Aufgabenstellung explizit aufgelistet sind, wobei ich in den Klammern leicht andere Begriffe zur Erklärung verwendet habe als im originalen Aufgabentext. Für diese Aufgabe ist – wie oft bei Geometrieaufgaben – eine geschickt eingezeichnete Hilfslinie der Schlüssel zur Lösung.

Konstruktionsaufgaben werden wir auch beim **zweiten Arbeitstreffen** besprechen, welches wie geplant am 27. 1. 2007 in Räumen der Universität stattfinden wird. Bitte beachtet, dass die Universität das Hauptgebäude geräumt hat. Wir treffen uns deshalb um 9:30 Uhr

beim Pförtner im Cityhochhaus !!

Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr **bis zum 15. Januar 2007** einschicken wie immer an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Bitte teilt mir spätestens mit den Lösungen zu dieser Serie auch mit, ob ihr am Arbeitstreffen teilnehmt.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben sowie euch und euern Eltern ein besinnliches Weihnachtsfest und alles Gute im neuen Jahr wünscht Euch

Prof. H.-G. Gräbe.