# Bericht vom
# 3. Leipziger Seminar am 6. Mai 2006

## Polynome

Ein Teil der letzten Serie war folgende Aufgabe:

**Aufgabe 6-3** *Das Polynom $P(x) = x^3 + 7x^2 + 4x + c$ (mit einer reellen Zahl $c$) habe drei reelle Nullstellen $x_1, x_2$ und $x_3$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Man zeige: $x_3 - x_1 > 6$.*

Ausgehend davon wollen wir uns einmal etwas näher mit Polynomen beschäftigen – vor allem mit den Grundlagen, die wir zur Lösung dieser Aufgabe benötigen. Dazu gehört natürlich als erstes die Frage, was genau eigentlich ein Polynom ist.

**Definition:** Ein *(reelles) Polynom* ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n$ eine natürliche Zahl ist und die *Koeffizienten* $a_i$ reell sind.
Ist $a_n \neq 0$, so nennen wir $a_n$ den *Leitkoeffizienten* und $n$ den *Grad* des Polynoms – geschrieben: deg $p$ vom englischen Wort für Grad „degree“.

So ist zum Beispiel ein Polynom ersten Grades eine lineare Funktion $x \mapsto mx + n$ mit Anstieg $m \neq 0$. Ist $m = 0$ und $n \neq 0$, so erhalten wir Polynome nullten Grades und das sind genau die konstanten Funktionen (ohne das *Nullpolynom*, $p(x) = 0$). Welchen Grad hat das Nullpolynom? Unsere Definition liefert darauf keine Antwort, da das Nullpolynom keine von Null verschiedenen Koeffizienten besitzt. Wir definieren hier einfach den Grad des Nullpolynoms als Null.
Welchen Grad haben die Polynome $(x^2+2)(x^4+3x+2)$ und $(x+1)^2 - x^2$? Haben wir allgemein zwei Polynome $p$ und $q$, was gilt dann für $\deg(pq)$ und $\deg(p+q)$? Dabei setzen wir natürlich voraus, dass das Produkt, die Summe bzw. die Differenz zweier Polynome wieder ein Polynom ist, sonst könnten wir den Grad gar nicht bilden. Doch das ist immer so (Warum?). Im Gegensatz dazu ist der Quotient zweier Polynome i.A. kein Polynom, so wie der Quotient zweier ganzer Zahlen keine ganze Zahl mehr sein muss. Aber sein kann! Wie z.B. $\frac{6}{2} = 3$.
Das ist immer genau dann der Fall, wenn der Nenner ein Teiler des Zählers ist. Bei Polynomen ist das ganz analog, so ist z.B. $\frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$. Und wie bei den ganzen Zahlen führt uns das auf die Begriffe der Teilbarkeit von Polynomen und der Division mit Rest:

**Satz:** Seien $p, q$ Polynome. Dann gibt es genau zwei Polynome $s, r$ mit

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ und } \deg(r) < \deg(s).$$

Das Polynom $r$ nennen wir den *Rest* der Division und ist dieser das Nullpolynom, so sagen wir: $p$ ist durch $q$ *teilbar* (geschrieben: $q|p$).

Doch wann sind zwei Polynome eigentlich gleich? Polynome sind Funktionen und damit genau dann gleich, wenn ihre Funktionswerte für jede reelle Zahl übereinstimmen. Das ist aber ein Kriterium, was sich nicht leicht überprüfen lässt, schließlich können wir nicht unendlich viele Zahlen einsetzen. Doch nehmen wir mal an, wir haben zwei gleiche Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$. Dann wissen wir insbesondere $p(0) = q(0)$, also $a_0 = b_0$. Damit erhalten wir

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x,$$

also auch

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = b_m x^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2} + \cdots + b_1.$$

Das gleiche Argument wie oben ergibt dann $a_1 = b_1$ usw. Am Ende sehen wir, dass die Polynome dann und nur dann gleich sind, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen, also $a_i = b_i$ ist. Insbesondere müssen ihre beiden Grade gleich sein. Dieses Kriterium ist sehr nützlich und wir werden es oft benötigen. Seine Anwendung werden wir als *Koeffizientenvergleich* bezeichnen.
Wenden wir uns nun den Nullstellen von Polynomen zu. Sei $p(x)$ ein Polynom (nicht das Nullpolynom) mit Nullstelle $x_1$. Dann teilt das lineare Polynom $x - x_1$ unser Polynom $p$. Warum? Benutzen wir hier die Division mit Rest von oben, dann gibt es zwei Polynome $s, r$ mit $p(x) = (x - x_1)s(x) + r(x)$ und der Grad von $r$ ist kleiner als $\deg(x - x_1) = 1$. Also ist $r$ einfach ein konstantes Polynom, $r(x) = c$. Da nun $x_1$ eine Nullstelle ist, haben wir aber auch $0 = p(x_1) = (x_1 - x_1)s(x_1) + c$. Damit ist $c = 0$, also $(x - x_1)|p(x)$. Wir nennen $(x - x_1)$ einen *Linearfaktor* von $p$. Finden wir noch eine weitere Nullstelle $x_2$, so gilt $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)t(x)$ mit einem Polynom $t$. Beweise diese Aussage (Nutze noch einmal die Division mit Rest.)! Hat das Polynom nun $n$ reelle Nullstellen, so haben wir

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)u(x)$$

mit einem Polynom $u$ und wir erhalten für den Grad von $p$: $\deg(p) = n + \deg(u)$. Da der Grad eines Polynoms ($p(x) \neq 0$) nicht negativ ist, kann ein Polynom also maximal so viele Nullstellen haben, wie sein Grad angibt. Wir kennen das schon von quadratischen Polynomen. Diese können keine, eine oder zwei Nullstellen haben, aber nicht mehr. Nehmen wir nun an, unser Polynom $p$ ist $n$-ten Grades und habe auch wirklich $n$ reelle Nullstellen. Dann sagt uns obige Gleichung, dass das Polynom $u$ Grad Null hat, also ein konstantes Polynom ist. Zusammenfassend wissen wir also nun:

Ein Polynom $n$-ten Grades mit den Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ kann immer in der Form

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

geschrieben werden, wobei $a$ wieder der Leitkoeffizient ist. Da dieser Faktor die Nullstellen nicht beeinflusst, betrachten wir im Weiteren nur *normierte* Polynome – das sind solche, bei denen der Leitkoeffizient Eins ist.

Doch wie kann uns die Zerlegung in Linearfaktoren bei der Nullstellensuche helfen? Bei quadratischen Polynomen ist es einfach, die Nullstellen zu berechnen. Dafür haben wir eine Lösungsformel. Doch was ist bei Polynomen höheren Grades? Für Polynome dritten Grades gibt es zwar auch noch eine solche Formel (die *Cardanische Formel*) und auch für Polynome vierten Grades gibt es einen Algorithmus, aber schon für Polynome fünften Grades gibt es keine solche Lösungsformel.
Wie können wir uns da weiterhelfen? Im Allgemeinen nur über Näherungen, doch es gibt manchmal Möglichkeiten eine Nullstelle zu erraten. Das geht natürlich nur dann, wenn diese entsprechend „schön“ sind. Damit meinen wir zumeist ganzzahlige oder rationale Nullstellen. Nach beliebigen reellen Zahlen zu suchen, ist recht aussichtslos. Wir beschränken uns hier erst einmal auf die Suche nach ganzzahligen Nullstellen und zwar bei ganzzahligen Polynomen, also solche Polynome bei denen alle Koeffizienten ganzzahlig sind. Sei nun $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und sei $x_1 \in \mathbb{Z}$ eine ganzzahlige Nullstelle von $p$. Einsetzen in die Polynomgleichung ergibt dann

$$0 = p(x_1) = {x_1}^n + a_{n-1}{x_1}^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0.$$

Da $x_1$ Null teilt, muss es auch die rechte Seite der Gleichung teilen, also auch $a_0$. Haben wir also ein ganzzahliges Polynom und hoffen wir, dass es eine ganzzahlige Nullstelle hat, so müssen wir nicht alle ganzen Zahlen durchprobieren, sondern nur solche, die das Absolutglied $a_0$ teilen. Schauen wir uns ein Beispiel an: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$. Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ und $\pm 12$ in Frage. Durch Einsetzen finden wir: $\pm 1$ sind keine Nullstellen, aber der nächste Versuch mit 2 ist ein Treffer. Jetzt können wir weiterprobieren, ob es noch andere ganzzahlige Nullstellen gibt. Da könnten wir Glück haben. Doch auf diese Weise würden wir nie herausfinden, ob 2 vielleicht eine doppelte Nullstelle ist.
Was heißt das? Als wir oben die Zerlegung in Linearfaktoren besprachen, schlossen wir nicht aus, dass einige Nullstellen doppelt, dreifach oder öfter auftreten können. Genau das kann passieren, z.B. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$ hat 1 als dreifache

Nullstelle. Mit dem Probieren würden wir zwar herausfinden, dass 1 eine Nullstelle ist, doch ob es eine einzige einfache Nullstelle oder eine dreifache Nullstelle ist, bliebe uns verborgen. Oder vielleicht gibt es noch andere nicht ganzzahlige Nullstellen? Wenn wir die Zerlegung in Linearfaktoren $(x-1)^3$ nicht gekannt hätten, fiele uns die Beantwortung dieser Frage nicht so leicht.
Doch auch hier helfen uns die Linearfaktoren wieder weiter. Ist $x_1$ Nullstelle von $p$, so gilt $p(x) = (x - x_1)s(x)$, d.h. wir müssen nur das Polynom $s$ finden. Eine Möglichkeit ist *Polynomdivision.* Diese funktioniert im Prinzip wie das schriftliche Dividieren – schauen wir uns das am Beispiel von $(x^3-3x^2+3x-1) : (x-1)$ an. Wir teilen den Summanden des Dividenden mit der höchsten Potenz, also $x^3$, durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz, hier $x$, und erhalten den ersten Summanden des Quotienten, $x^2$. Wie beim schriftlichen Dividieren multiplizieren wir nun $x^2$ mit dem Divisor und schreiben dieses Produkt unter den Dividenden, um diese beiden dann zu subtrahieren.

$$\begin{array}{l}
\phantom{-}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x-1) = x^2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)\phantom{+3x-1}} \\
\phantom{-(x^3} - 2x^2 + 3x - 1
\end{array}$$

Diese Differenz betrachten wir nun als eine Art neuen Dividenden und fahren analog fort bis der Grad der Differenz kleiner als der des Divisors ist:

$$\begin{array}{l}
\phantom{-}(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x-1) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{-(x^3 - x^2)\phantom{+3x-1}} \\
\phantom{-(x^3} - 2x^2 + 3x - 1 \\
\phantom{-(x}\underline{-(-2x^2 + 2x - 1)} \\
\phantom{-(x^3 - 2x^2 + 3}x - 1 \\
\phantom{-(x^3 - 2x^2 +}\underline{-(x - 1)} \\
\phantom{-(x^3 - 2x}\text{Rest}: \quad 0
\end{array}$$

Der Rest 0 bedeutet hier, wie beim schriftlichen Dividieren natürlich auch, dass $x - 1$ ein Teiler von $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ist, also 1 eine Nullstelle ist.

**Aufgabe 1** *Überlege Dir, warum dieser Algorithmus funktioniert. Wir können natürlich nicht nur durch Linearfaktoren teilen, sondern auch durch Polynome höheren Grades. Berechne:* $(x^3-3x^2+3x-1) : (x^2-2x+2)$ *und* $(x^3+3x^2-4x-12) : (x-2)$.

Haben wir nun einen Linearfaktor abgespalten, können wir das Restpolynom nutzen, um weitere Nullstellen zu suchen, oder die *Vielfachheit* einer Nullstelle, also ob es eine einfache, doppelte,... Nullstelle ist, zu untersuchen. Das ist zumeist einfacher, da bei Abspaltung eines Linearfaktors ein Polynom mit einem Grad um

eins niedriger als der des Ausgangspolynoms entsteht. Bei Polynomen dritten Grades ist das besonders einfach, da wir dann ein quadratisches Polynom erhalten, für welches wir ja eine Lösungsformel haben.
Die Polynomdivision ist allerdings nicht die einzige Möglichkeit dieses Restpolynom zu erhalten. Wir werden jetzt das *HORNER-Schema* kennenlernen, mit welchem man auch Linearfaktoren abspalten und auch Funktionswerte von Polynomen ausrechnen kann. Zugegeben, den Wert des Polynoms an einer Stelle $x$ können wir auch durch einfaches Einsetzen ausrechnen. Doch umso höher $x$ wird, umso aufwendiger ist das Ganze. Bei einem Polynom vierten Grades müssten wir einmal $x^4$ ausrechnen, uns das Ergebnis merken, $x^3$ ausrechnen und beide, mit gewissen Koeffizienten, addieren usw. Dabei haben wir, als wir $x^4$ ausrechneten, schon $x^3$ mitberechnet. Hätten wir diese Information da schon genutzt, hätten wir uns das zweite Ausrechnen von $x^3$ ersparen können. Genau darauf beruht das Hornerschema. Wir können unser Polynom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x_1 + a_0$ nämlich auch folgendermaßen schreiben: $((\cdots(a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots)x + a_1) + a_0$. Beim Berechnen fangen wir mit der innersten Klammer an und müssen nur $n$-mal mit $x$ multiplizieren. Schematisch können wir das wie folgt darstellen. Wir nutzen dafür wieder unser altes Beispiel $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ und suchen den Funktionswert an der Stelle 5.

$$a_3 = 1 \qquad a_2 = -3 \qquad a_1 = 3 \qquad a_0 = -1$$

$$\begin{tikzcd}
 & & 5 \arrow[d, "+a_2"] & 10 \arrow[d, "+a_1"] & 65 \arrow[d, "+a_0"] \\
x = 5 & a_3 = 1 \arrow[ur, "\cdot x"'] & 2 \arrow[ur, "\cdot x"'] & 13 \arrow[ur, "\cdot x"'] & 64 = p(5)
\end{tikzcd}$$

Beim Einsetzen kommen wir natürlich auch auf $5^3 - 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 1 = 125 - 75 + 15 - 1 = 64$. Doch müssen wir dabei nicht nur mehr Rechenoperationen ausführen, sondern auch mit größeren Zahlen rechnen. (Allgemein müssen wir aufpassen, dass wir in die oberste Zeile des Schemas auch wirklich alle Koeffizienten schreiben, sprich auch alle Nullen, z.B. bei $x^3 - 1$ steht dann da $1\ 0\ 0\ \ -1$.). Doch das ist nicht der einzige Nutzen dieses Schemas. Was passiert, wenn wir eine Nullstelle einsetzen? In unserem Beispiel sähe das dann so aus:

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & 1 & -3 & 3 & -1 & \\
 & & 1 & -2 & 1 & \\
x = 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & = p(1)
\end{array}$$

Wir erhalten 0. Das ist nicht weiter überraschend, schließlich wussten wir schon, dass 1 Nullstelle ist. Doch die anderen Koeffizienten der letzten Zeile ergeben das Restpolynom $x^2 - 2x + 1$. Das ist immer so, wenn wir eine Nullstelle einsetzen. Warum? Sei $x_0$ diese Nullstelle. Dann lauten diese Koeffizienten $a_n,\ a_nx_0 +$

$a_{n-1}$, $(a_nx_0+a_{n-1})x_0+a_{n-2},\ldots$, als Polynom $a_nx^{n-1}+(a_nx_0+a_{n-1})x^{n-2}+((a_nx_0+a_{n-1})x_0+a_{n-2})x^{n-3}+\cdots$. Multiplizieren wir dieses mit dem Linearfaktor $x-x_0$, so erhalten wir unser ursprüngliches Polynom. Es ist also genau das Polynom, was wir suchen – das, welches nach dem Abspalten des Linearfaktors $x-x_0$ übrigbleibt. Wir können also auch das Hornerschema zum Testen von Nullstellen nutzen, und sobald wir eine gefunden haben, haben wir auch sofort das Restpolynom.

**Aufgabe 2** *Finde mit Hilfe des Hornerschemas* $(x^3+3x^2-4x-12):(x-2)$.

Wir haben jetzt schon einiges über Nullstellen von Polynomen herausgefunden. Wie weit kommen wir denn damit in unserer ursprünglichen Aufgabe? Dort hatten wir ein Polynom $P(x)=x^3+7x^2+4x+c$ dritten Grades mit drei reellen Nullstellen $x_1,x_2,x_3$. Wie wir uns vorhin überlegt haben, muss $P$ dann auch in der Form $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ darstellbar sein. Multiplizieren wir diese Linearfaktoren aus, erhalten wir

$$P(x)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3.$$

Doch wir wissen auch, dass $P(x)=x^3+7x^2+4x+c$ ist. Beide Polynome sind gleich und das bedeutet: Ihre Koeffizienten müssen übereinstimmen. In Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 7 &= a_2 &&= -(x_1+x_2+x_3)\\ 4 &= a_1 &&= x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\\ c &= a_0 &&= -x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, die die Koeffizienten des Polynoms als symmetrische Polynome in den Nullstellen darstellen, bilden den *Satz des Vieta* – hier: für Polynome dritten Grades.

**Aufgabe 3** *Finde durch Koeffizientenvergleich den Satz des Vieta für quadratische Polynome* $x^2+a_1x+a_0=(x-x_1)(x-x_2)$.

Allgemein findet man den Satz des Vieta für ein normiertes Polynom $n$-ten Grades:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\ a_{n-2} &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\ a_{n-3} &= -(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)\\ &\ \vdots\\ a_0 &= (-1)^n x_1x_2x_3\cdots x_n \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** *Wie ändert sich der Satz, wenn wir auch nicht normierte Polynome,* $a_n\neq 1$*, zulassen?*

Zurück zu unserer Aufgabe. Die Schwierigkeit bei diesen Aufgaben besteht meistens darin, das gesuchte Polynom – bei uns $(x_3 - x_1)$ – irgendwie mit Hilfe der Koeffizienten darzustellen. Meistens sind die gesuchten Polynome auch symmetrisch in den Nullstellen, z.B. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Solche Polynome können immer in den Koeffizienten dargestellt werden: $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = a_2^2-2a_1$.

**Aufgabe 5** *Drücke die folgenden Polynome mit Hilfe der Koeffizienten aus:*

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \quad x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_2.$$

Bei nichtsymmetrischen Polynomen ist das nicht möglich, aber man kann Ungleichungen finden, wie in unserer Aufgabe. Nach einigem Probieren finden wir:

$$\begin{aligned}(x_3 - x_1)^2 &= x_3^2 - 2x_1x_3 + x_1^2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3 \\ &= 49 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) - x^2 - 2x_1x_3 \\ &\geq 49 - 8 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = 37\end{aligned}$$

und damit $x_3 - x_1 > 6$.

## Zahlsysteme

In diesem Teil wollen wir uns mit Zahlsystemen beschäftigen. Ein Zahlsystem ist – zunächst ganz allgemein – ein System Zahlen aufzuschreiben. So ein System ist aber nicht natürlicherweise gegeben; genau wie bei unsere Sprache treffen wir hier eine Wahl. Unser dekadisches System zerlegt die Zahlen in Potenzen von zehn. So sagen wir z.B. „Fünfzehn“, also „Fünf und zehn“.
Es wäre aber auch eine Sprache denkbar, in der für jede Zahl ein völlig neues Wort erdacht wird. Das wäre zwar nicht unbedingt praktisch und in dieser Sprache könnte man auch nicht alle Zahlen benennen, aber bei den Farbennamen ist es bei uns ganz ähnlich.
Es gibt im Prinzip unendich viele Möglichkeiten, Zahlen darzustellen, aber wir wollen uns hier auf eine bestimmte Art der Darstellung einschränken, nämlich auf *Positionssysteme*. Die Idee dabei ist, dass die Ziffern ihre Bedeutung je nach der Position ändern, an der sie stehen. Das römische Zahlsystem ist kein Positionssystem, weil z.B. in LIII und MCLV die Ziffer L immer den gleichen Wert hat (nämlich 50), obwohl sie an verschiedenen Stellen steht.
Betrachten wir nun die Positionssysteme etwas genauer. Wählen wir uns eine Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, dann lässt sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ eindeutig in der Form

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b^i \tag{1}$$

darstellen, wobei $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$.
Was genau heißt das? Zunächst einmal sei bemerkt, dass die Summe nicht wirklich bis ins Unendliche läuft. Damit überhaupt etwas Endliches herauskommt, muss es ein $i$ geben, so dass $a_j = 0$ für alle $j \geq i$. Wir sagen in diesem Fall auch, dass die Summe „formal unendlich“ ist.
Wie gelangt man nun aus (1) zu einer Zahldarstellung? Sehen wir uns das Ganze einfach für die Zahl 1234 und die Basis $b = 10$ an. Es gilt:

$$1234 = 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^5 + \ldots \tag{2}$$

Strenggenommen dürften wir „1234“ und auch „10“ noch gar nicht schreiben, da wir erst erklären wollen, wie man zu einer solchen Darstellung kommt. In einen ähnlichen Zirkel gerät man, wenn man eine Sprache benutzt, um über Sprache zu reden.
Unsere Zerlegung von 1234 in Vielfache von Zehnerpotenzen liefert uns jedenfalls eine Zahldarstellung, nämlich in unserem Fall wieder die Darstellung 1234. Das ist also nur eine Kurzschreibweise für den langen Term auf der rechten Seite von Gleichung (2). Dass die Zwei an *dritter* Stelle von rechts steht, heißt also, dass sie als $2 \cdot 10^{3-1}$ als Summand in die dargestellte Zahl eingeht. Würde man das Positionssystem nicht kennen, würde man 1234 vielleicht eher als $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ lesen! Wir erkennen hier übrigens auch, wie wichtig die Null als Platzhalter ist, um z.B. 4 von 400 zu unterscheiden.
Wechseln wir nun die Basis und schauen uns an, wie wir 1234 zur Basis $b = 3$ darstellen können:

$$1234 = 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^1 \tag{3}$$

Im Dreiersystem hat unsere Zahl also die Darstellung 1200201. Damit Verwechslungen ausgeschlossen sind, wollen wir die Basis im Folgenden immer als Index anhängen, d.h. wir schreiben $(1200201)_3$ um deutlich zu machen, dass die Ziffernfolge 1200201 im Dreiersystem gelesen werden soll. Der Kürze halber lassen wir den Index im Zehnersystem meist fort, d.h. wir können z.B. schreiben:

$$1234 = (1234)_{10} = (2322)_8 = (3412)_7 = (1200201)_3 = (10011010010)_2.$$

**Aufgabe 6** *Überprüfe diese Gleichung.*

Die Systeme mit Basis 2, 3, 8 heißen (in dieser Reihenfolge) auch Binär-, Ternär- und Oktalsystem. Bei all diesen System haben wir höchstens zehn Ziffern gebraucht, im Binärsystem sogar nur zwei Ziffern! Wenn wir die Basis aber größer als 10 wählen, benötigen wir noch zusätzliche Symbole für die Ziffern. Üblicherweise nimmt man dann Buchstaben hinzu: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, \ldots$ Dabei ist der Wert von $A$ gerade 10 von $B$ 11 usw.

**Aufgabe 7** *Überprüfe folgende Gleichung:*

$$1234 = (4D2)_{16} = (31E)_{20}$$

**Aufgabe 8** *Zeige, dass folgende Gleichung richtig ist:*

$$(2GG)_{(41)_5} = (1621)_{(21)_4}$$

*Vielleicht wird jetzt auch deutlich, welche Tragweite die Konvention hat, den Index fortzulassen, wenn wir uns im Zehnersystem befinden.*

Wir wollen uns nun ansehen, wie wir eine Zahl von einem Zahlsystem in ein anderes übertragen. Man kann diese Aufgabe ohne größere Probleme durch geschicktes Probieren lösen, doch wir wollen einen Algorithmus benutzen, der etwas schneller ist. Dabei müssen wir nur fortlaufend durch die Basis $b$ teilen, in der wir die Zahl darstellen wollen. Wir sehen uns zunächst ein Beispiel an:

$$\begin{aligned} 1234 : 7 &= 176 \text{ Rest } 2 \\ 176 : 7 &= 25 \text{ Rest } 1 \\ 25 : 7 &= 3 \text{ Rest } 4 \\ 3 : 7 &= 0 \text{ Rest } 3 \end{aligned}$$

An den Resten können wir nun von unten nach oben die Darstellung der Zahl 1234 in der Basis 7 ablesen: $1234 = (3412)_7$.
Warum funktioniert dieses Verfahren? Sei $n \in \mathbb{N}$ die Zahl, deren Darstellung im $b$-System wir berechnen wollen. Wir wissen bereits, dass wir $n$ gemäß (1) darstellen können, nur die $a_i$ sind uns unbekannt. Da $b^0 = 1$ ist, können wir (1) auch so schreiben:

$$n = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b^i.$$

Nun ist aber $a_0 \in \{0, \ldots, b-1\}$, d.h. $a_0$ ist nicht durch $b$ teilbar. Andererseits ist natürlich jeder Summand der „großen“ Summe durch $b$ teilbar. Also erkennen wir: $n$ lässt bei Division durch $b$ den Rest $a_0$. Indem man dies nun induktiv weiter fortsetzt, erkennt man, dass der Algorithmus terminiert (denn unsere Summe ist ja nur *formal* unendlich) und tatsächlich das gewünschte Ergebnis liefert.
Dieses Verfahren erlaubt uns also, jede beliebige natürliche Zahl aus dem Zehnersystem in ein anderes System zu konvertieren. Aber die Division mit Rest hätten wir auch in einem anderen Zahlsystem als dem Zehnersystem durchführen können! Es ist aber für uns viel bequemer im Zehnersystem zu rechnen – zumal ja auch die meisten Taschenrechner die Ergebnisse im Zehnersystem anzeigen.
Wenn wir eine Zahl im $b$-System, $b \neq 10$, gegeben haben und wollen deren Darstellung im Zehnersystem, so rechnen wir einfach die rechte Seite von (1) aus. Wollen

wir schließlich eine Zahl im $b_1$-System in eine Zahl im $b_2$-System umrechnen, wobei $b_1 \neq 10 \neq b_2$, so können wir dies einfach tun, indem wir den Umweg über das Zehnersystem gehen. Alternativ kann man auch – wie schon erwähnt – die Division mit Rest gleich im $b_1$-System durchführen.
Wie rechnet man aber überhaupt in anderen Zahlsystemen? Manche Taschenrechner können in einigen ausgewählen Zahlsystemen rechnen, meistens im Binär-, Oktal- und Hexadezimalsystem (mit den Basen 2, 8 und 16). Was machen wir aber, wenn wir in einem anderen Zahlsystem rechnen wollen?
Nun, erinnern wir uns einmal an die frühe Schulzeit, in der wir noch keinen Taschenrechner hatten. Wir haben dort Zahlen durch „schriftliche" Rechenverfahren addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert. Genau dies klappt auch in anderen Zahlsystemen. Es klappt sogar ganz genauso und eigentlich ist dazu nichts weiter zu sagen. Man muss nur ein wenig aufpassen, dass man mit den Überträgen nicht durcheinander kommt. Wenn wir im z.B. Sechsersystem schriftlich addieren, so ergibt $3 + 4$ zum Beispiel „1 merke 1", weil $(3 + 4)_6 = (11)_6$.

**Aufgabe 9** *Nimm dir zwei beliebige zwei- oder dreistellige Zahlen im Zehnersystem, rechne diese in die Bases 2 und 7 um, und führe in diesen System die schriftliche Addition und Multiplikation durch. Rechne dann die Ergebnisse zurück ins Zehnersystem und vergleiche.*

Wenn du die Aufgabe wirklich ausgeführt hast oder wenigstens darüber nachgedacht hast, wirst du mehrere Dinge bemerkt haben. Zum einen ist das Rechnen im Binärsystem denkbar einfach und eigentlich nur eine Schreibübung. Das ist ein Grund, warum Computer im Binärsystem rechnen.
Andererseits ist das Multiplizieren in der Basis 7 recht kompliziert, und zwar aus dem einfachen Grund, dass wir das kleine Einmaleins im Siebenersystem nicht kennen. Dass etwa $(5 \cdot 4)_7 = (26)_7$ ist, müssen wir erst mühsam ausrechnen, z.B. indem wir 20 ins Siebenersystem umrechnen. Woher wissen wir aber, dass $5 \cdot 4 = 20$ ist? Das haben wir nicht etwa ausgerechnet, sondern durch ständiges Wiederholen vor langer Zeit auswendig gelernt. (Natürlich kann man auch einfach $4+4+4+4+4$ rechnen, aber normalerweise sollte man das Einmaleins auswendig können.)
Hätten wir nun statt des Zehnersystems das Siebenersystem in Gebrauch, so müssten wir auch viel weniger Multiplikationsaufgaben auswendig lernen. Allerdings müssten wir auch mehr schreiben, weil unsere Zahlen länger wären. Ganz extrem sieht man das im Zweiersystem: Da ist das kleine Einmaleins praktisch gar nicht vorhanden, allerdings bräuchten wir zum schriftlichen Rechnen wohl mindestens DINA3-Hefte.
Es scheint also für Zahlsysteme so etwas wie eine goldene Regel zu geben: „Je kleiner das Einmaleins, desto länger die Zahlen." Für unsere Positionssysteme, wie wir sie bisher angesehen haben, ist das auch ohne Zweifel richtig. Aber vielleicht

können wir durch einen genialen Trick das Einmaleins vereinfachen ohne dass die Zahlen länger werden?
Auch wenn dies von unserem bisherigen Standpunkt aus wie ziemlicher Hokus-Pokus klingt, ist es dennoch möglich, und wir müssen dazu nur eine kleine Änderung an unserem Positionssystem durchführen. Wir orientieren uns dabei am Zehnersystem. Statt die Ziffern aus der Menge $\{0, \ldots, 9\}$ zu wählen, lassen wir nun auch negative Ziffern zu. Wir wählen die $a_i$ in (1) aus der Menge $\{-5, \ldots, 5\}$, d.h. wir haben elf Ziffern. Wir notieren dabei $-a$ als $\bar{a}$.
Dieses System heißt *Doppelfünfsystem* und wir machen durch den Index $\bar{5}$ deutlich, dass wir im Doppelfünfsystem sind. So ist z.B.

$$(4\bar{5}\bar{3}27)_{\bar{5}} = 4 \cdot 10^4 + (-5) \cdot 10^3 + (-3) \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 34709.$$

Auch im Doppelfünfsystem können wir genauso schriftlich Addieren und Multiplizieren wie gewohnt. Wir müssen uns nur daran gewöhnen, dass Überträge negativ sein können. Obwohl die Zahlen im Doppelfünfsystem nicht länger sind als im Zehnersystem, ist unser Einmaleins beträchlich geschrumpft, wenn wir die Regeln für das Multiplizieren von ganzen (also insbesondere negativen) Zahlen hinzunehmen.

**Aufgabe 10** *Berechne zur Zahl* $(42\bar{6}3)_{\bar{5}}$ *das Negative im Doppelfünfsystem. Welche allgemeine Regel kannst du daraus erkennen? Beweise diese Regel.*

**Aufgabe 11** *Nimm dir wieder zwei beliebige zwei- oder dreistelle Zahlen im Zehnersystem, finde ihre Darstellung im Doppelfünfsystem, und addiere und multipliziere sie im Doppelfünfsystem. Rechne dann das Ergebnis zurück ins Zehnersystem und vergleiche.*

**Aufgabe 12** *Schaue dir andere Doppelsysteme an, z.B. das Doppeleinssystem und das Doppeldreisystem, und löse die vorhergehende Aufgabe auch für diese Systeme.*

Wir haben bisher durch (1) nur eine Darstellung für *natürliche* Zahlen geliefert. Ohne weiteres können wir aber die Darstellung verallgemeinern. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Darstellung der Form:

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i b^i. \tag{4}$$

Wir schreiben dann $a_{-n}$ gerade als $n$-te Nachkommastelle. Diese Darstellung ist aber nicht mehr eindeutig und außerdem ist dies nicht mehr immer eine Summe mit endlich vielen Summanden. So liefert z.B. $1/3$ für $b = 10$ unendlich viele Summanden, denn die entsprechende Kommazahl lautet $0,\bar{3} = 0,33333\ldots$ Aus dem letzten Seminar wissen wir aber schon, dass es auch unendliche Summen gibt, die trotzdem einen endlichen Wert liefern. Das Skript dazu findest du hier:

Ein Beispiel für die Nichteindeutigkeit ist $1 = 0,\bar{9}$. Wie kann man mathematisch exakt argumentieren, dass diese Gleichheit besteht? Im letzten Seminar haben wir auch die wichtige geometrische Reihe und deren Grenzwert behandelt. Zur Erinnerung: Es ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{falls } |x| < 1.$$

Auch die Aussage $1 = 0,\bar{9}$ ist eine Gleichung dieses Typs. Wir können nämlich (für beliebige Basis $b \geq 2$) schreiben:

$$\sum_{i=-1}^{\infty} (b-1)b^i \;=\; (b-1)\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b^i} \;=\; \frac{b-1}{b}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b}{b^i}$$

$$= \frac{b-1}{b}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b^{i-1}} \;=\; \frac{b-1}{b}\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^i \;=\; \frac{b-1}{b}\frac{1}{1-\frac{1}{b}} \;=\; 1.$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt die Formel für die geometrische Reihe benutzt, in der wir $x = 1/b$ setzen. Dies dürfen wir, da für $b \geq 2$ sicher $|1/b| < 1$ ist. Wir haben also folgende Gleichungen hergeleitet:

$$\begin{aligned} (0.\bar{1})_2 &= 1 \\ (0.\bar{2})_3 &= 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Indem wir eine solche Gleichung durch die Basis dividieren oder mit der Basis multiplizieren, erhalten wir auch noch Gleichungen wie die folgenden:

$$\begin{aligned} (1.\bar{1})_2 &= (10)_2 = 2 \\ (0.0\bar{2})_3 &= (0.1)_3 \\ (31.\bar{3})_4 &= (32)_4 \end{aligned}$$

Wir wollen nun als erstes einen Bruch $p/q$ im Zahlensystem zur Basis $b$ darstellen. Dazu stellen wir $p$ und $q$ im $b$-System dar und führen eine vollständige schriftliche Division durch. Auf diese Weise erhalten wir z.B. für $p = 3$ und $q = 8$:

$$\begin{aligned} 3 : 8 &= 0.375 \\ (11)_2 : (1000)_2 &= (0.011)_2 \\ (10)_3 : (22)_3 &= (0.\overline{10})_3 \end{aligned}$$

**Aufgabe 13** *Überprüfe diese Gleichungen, indem du die schriftliche Division selbst durchführst.*

Insbesondere erkennen wir an diesem Beispiel, dass es rationale Zahlen gibt, die nicht bezüglich jeder Basis periodisch sind. Woher weiß man nun, ob ein Bruch zu einer periodischen Kommazahl führt?

**Aufgabe 14** *Berechne die Kommazahlen für* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}$ *im* 11*er- und* 12*er-System. Welche Beobachtung kannst du dabei machen? (Tipp: Es hat etwas mit Primteilern zu tun.)*

Haben wir eine Darstellung der reellen Zahl $x \in (0,1)$ im $b_1$-System gegeben, so können wir diese auch direkt in eine Darstellung im $b_2$-System umrechnen. Dies tun wir folgendermaßen: Wir multiplizieren im $b_1$-System mit $b_2$. Den ganzen Anteil des Ergebnisses (d.h. was vor dem Komma steht) notieren wir, den gebrochenen Anteil (wenn vorhanden) multiplizieren wir wieder mit $b_2$ usw... Dies sieht man am schnellsten an einem Beispiel. Wir wollen die Zahl 0.384 ins 5er-System umrechnen:

$$\begin{array}{rcl} 0.384 \cdot 5 &=& 1.92 \qquad \Longrightarrow \quad 1 \\ 0.92 \cdot 5 &=& 4.6 \qquad \;\; \Longrightarrow \quad 4 \\ 0.6 \cdot 5 &=& 3 \qquad \quad \;\; \Longrightarrow \quad 3 \end{array}$$

Die notierten ganzen Anteile ergeben nun der Reihe nach die Nachkommastellen der Darstellung im $b_2$-System, d.h. aus unserem Beispiel lesen wir ab:

$$0.384 = (0.143)_5.$$

Dieses Rechenverfahren muss allerdings nicht zum Ende führen, denn im $b_2$-System könnte die Zahl $x$ ja eine periodische Darstellung haben. Wir geraten aber in diesem Fall in eine Schleife, aus der wir die Periode erkennen. Wenn aber $x$ irrational ist, führt der Algorithmus nicht zum Ende und auch nicht in eine Schleife und wir müssen trickreicher vorgehen – zumal ja auch schon mit einer nicht-periodischen, unendlich langen Zahl beginnen müssten.

**Aufgabe 15** *Berechne die Darstellungen von* 0.5 *im* $b$*-System für* $b = 1, \ldots, 9$*. Berechne außerdem die Darstellungen für* 0.375 *im 2er- und 3er-System und vergleiche mit den Ergebnissen von oben.*

**Aufgabe 16** *Überlege dir, warum das angegebene Rechenverfahren funktioniert.*

Wir wissen jetzt, wie man Zahlen in verschiedenen Systemen darstellt und in diesen rechnet. Das ist aber nicht nur eine Spielerei. Mitunter erkennt man bestimmte Sachverhalte viel besser, wenn man das Zahlsystem wechselt. Dazu wollen wir uns zwei Beispiele ansehen.
Als erstes schauen wir uns die Cantormenge an. Die Cantormenge ist definiert durch eine unendliche Folge von Schritten. Wir starten mit dem Intervall $[0, 1]$

und entfernen davon das mittlere Drittel, d.h. wir entfernen genauer alle Zahlen des offenen Intervalls $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Wir erhalten damit also die beiden Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$. Aus beiden Intervallen entfernen wir wieder die jeweiligen mittleren Drittel und erhalten vier Intervalle. Auch aus diesen Intervallen streichen wir die mittleren Drittel und so immer weiter. Graphisch lassen sich die ersten Nährungen der Cantormenge so darstellen:


Welche Zahlen bleiben nun übrig, welche werden nicht gestrichen? Sicher bleiben die Zahlen 0 und 1 in der Cantormenge, dann als nächstes $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Wir könnten nun versuchen, eine Formel für die Zahlen zu finden, die in jedem Schritt in der Cantormenge verbleiben.

Wir wollen aber anders vorgehen: Wir stellen die Zahlen im Intervall $[0, 1]$ in Ternärschreibweise dar, d.h. im Dreiersystem. Dabei stellen wir außerdem Zahlen, die in der $n$-ten Stelle auf 1 enden, durch die äquivalente periodische Weise dar, d.h. an die $n$-te Stelle schreiben wir eine 0 und auf alle folgenden eine 2. Zum Beispiel benutzen wir für

$$\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.0\bar{2})_3$$

die Darstellung ganz rechts.

Mit dieser Sichtweise erkennen wir nun folgendes: Im ersten Schritt werden gerade alle die Zahlen gestrichen, die in jeder Darstellung mit $(0.1...)_3$ beginnen. Im zweiten Schritt werden alle die Zahlen gestrichen, die in jeder Darstellung mit $(0.01...)_3$ oder $(0.21..)_3$ beginnen. Allgemein werden im $n$-ten Schritte die Zahlen gestrichen, die in jeder Darstellung in der $n$-ten Nachkommstelle eine 1 haben. Damit haben wir aber die Cantormenge schon vollständig beschrieben: Sie enthält genau die Zahlen aus dem Intervall $[0, 1]$, die eine Ternärdarstellung mit ausschließlich den Ziffern 0 und 2 haben.

Die Cantormenge gibt uns außerdem ein weiteres Beispiel für die geometrische Reihe. Wir wollen berechnen, „wie viel“ vom Einheitsintervall eigentlich übrig bleibt. Im ersten Konstruktionsschritt ziehen von ihm ein Intervall der Länge $\frac{1}{3}$ ab, im zweiten Konstruktionsschritt streichen wir zwei Intervalle der Länge $\frac{1}{9}$, im dritten Konstruktionsschritt vier Intervalle der Länge $\frac{1}{27}$.

Was also vom Intervall $[0, 1]$ übrig bleibt, können wir deswegen so berechnen:

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 1 - \frac{1}{2} \left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i\right).$$

Wir erkennen ganz rechts wieder die geometrische Reihe und erhalten weiter:

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 - \frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Rein „längentechnisch“ bleibt also vom Intervall $[0, 1]$ gar nichts übrig – und das, obwohl ja die Cantormenge noch unendlich viele Punkte enthält!

**Aufgabe 17** *Betrachte für $n \in \mathbb{N}$ folgende Menge:*

$$A_n := \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2i-2}{2^n}, \frac{2i-1}{2^n}\right).$$

*Wie lassen sich die Zahlen charakterisieren, die in einer bestimmten Menge $A_n$ liegen? Berechne die „Länge“ der Mengen $A_n$. Welche „Länge“ hat der Durchschnitt von endlich vielen vorgegebenen $A_n$?*

Wir schauen uns nun noch ein anderes Beispiel dafür an, wie wir verschiedene Zahldarstellungen nutzen können. Es sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ die folgende Abbildung:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{falls } x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{falls } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wir wählen nun ein beliebiges $x \in [0, 1]$ und betrachten dazu eine Folge, die wir durch sukzessive Anwendung von $f$ bilden:

$$x_n = \begin{cases} x & \text{falls } n = 0 \\ f(x_{n-1}) & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Wie verhält sich diese Folge nun in Abhängigkeit des Startwerts $x$? Ist $x = 0$ oder $x = 1$, so erhalten wir offenbar eine konstante Folge. Die Folge mit $\frac{1}{4}$ mündet nach einem „Anfangsschlenker“ ebenfalls in den Wert 1 – und bleibt ab da konstant (Wir sagen: „Sie wird konstant“). Wählen wir aber z.B. $x = \frac{1}{3}$, so erhalten wir eine periodische Folge mit Periodenlänge 2.

**Aufgabe 18** *Untersuche, wie sich die Folge für die Startwerte* $0.71875$ *und* $\frac{17}{24}$ *verhält. Was passiert bei $x = 0.276$?*

**Aufgabe 19** *Gibt es auch Startwerte $x$, für die die Folge weder periodisch noch konstant wird? Beweise deine Vermutung.*

**Aufgabe 20** *Gibt es noch weitere Startwerte $x$ außer 0 und 1, für die* alle *Folgenglieder gleich sind?*

Wird eine Folge konstant, so sagen wir, sie wird periodisch mit Periodenlänge 1. Angenommen nun die Folge zum Startwert $x$ wird periodisch, woran erkennt man die Periodenlänge?
Wir untersuchen zunächst ein verwandtes Problem, indem wir statt $f$ die Funktion $f'$ benutzen, die wie folgt definiert ist:

$$f'(x) = \begin{cases} 10x & \text{falls } x \leq \frac{1}{10} \\ 10x - [10x] & \text{falls } x > \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $[10x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner als $10x$ ist. Hier ist es ziemlich leicht zu sehen, welche Startwerte in welche Periodenlängen resultieren. Die Multiplikation mit 10 bewirkt einfach eine Kommaverschiebung um eine Stelle nach rechts. Erhalten wir dadurch eine Zahl, die größer als 1 ist, vergessen wir was vor dem Komma steht und rechnen mit dem Nachkommateil weiter.
Daraus folgt sofort, dass etwa die Zahl $0.3626\overline{451}$ zu einer Folge führt, die ab dem fünften Folgenglied in eine Periode der Länge 3 mündet. Außerdem sehen wir, dass genau die Zahlen $0, 0.\overline{1}, 0.\overline{2}, \ldots, 0.\overline{8}, 0.\overline{9} = 1$ zu konstanten Folgen führen.
Diese Betrachtung legt nahe, unser ursprüngliches System in Basis 2 zu formulieren. Analog zur Basis 10 bewirkt im Zweiersystem eine Multiplikation mit 2 eine Verschiebung des Kommas um eine Stelle nach rechts. Wir erhalten also folgendes Ergebnis: Hat eine Zahl $x$ eine abrechende Darstellung im Zweiersystem, so mündet die entsprechende Folge in 1. Die Folge wird periodisch mit Periodenlänge $n \geq 2$, wenn $x$ auf eine Periode der Länge $n$ endet.

---

Anworten auf alle Fragen und Lösungen zu den Aufgaben, die offen geblieben sind, könnt Ihr uns gern zuschicken. Am besten an


Andreas Nareike
Eilenburger Straße 51
04509 Delitzsch

oder per E-Mail an

`nadgr@gmx.de` oder `andreas.nareike@gmx.net`


Natürlich nehmen wir auch Eure Fragen, Ideen und Anregungen zu diesen oder anderen Themen gern entgegen.


Nadine Große und Andreas Nareike