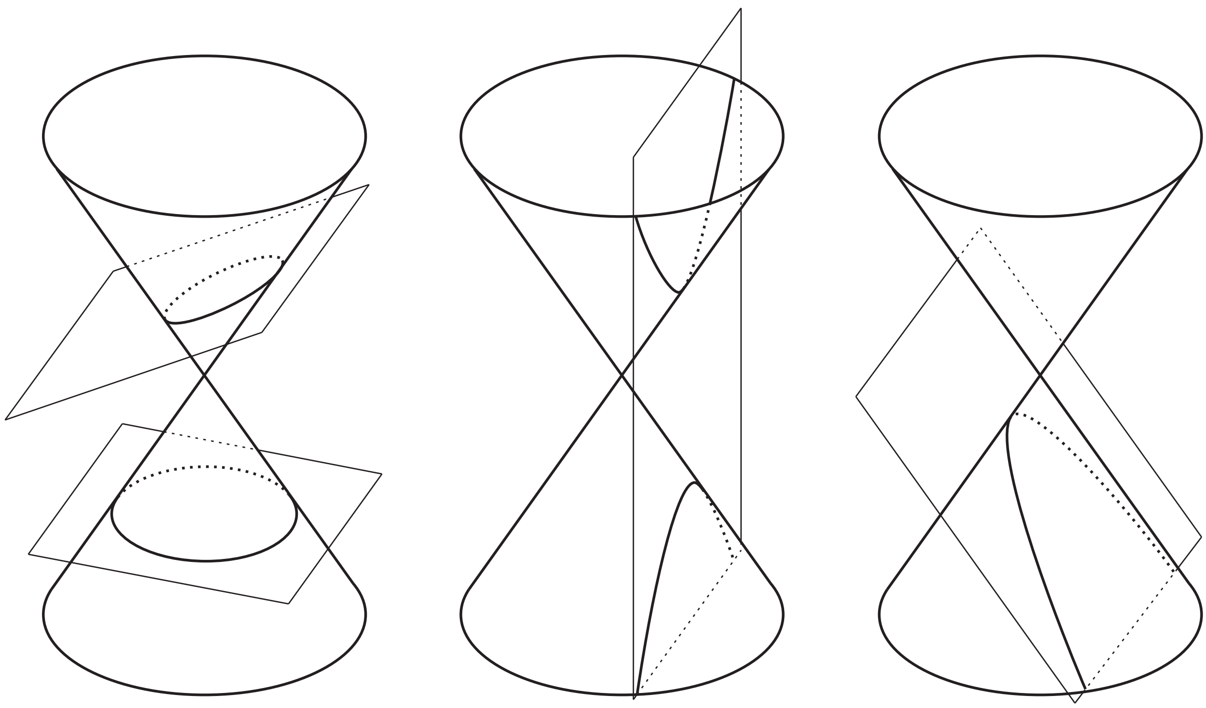
Bericht vom
2. Leipziger Seminar am 4. Februar 2006

Kegelschnitte

In diesem Teil wollen wir uns mit den sogenannten Kegelschnitten beschäftigen. Zunächst wollen wir uns anschaulich klar machen, was Kegelschnitte sind. Wenn wir von einem Kegel sprechen, meinen wir eigentlich einen *Doppelkegel* und von diesem auch eigentlich nur den Mantel, also keinen Vollkegel. Außerdem soll der Kegel keine Grundfläche haben, sondern *unendlich* nach oben und unten ausgedehnt sein.



Kreis und Ellipse Hyperbel Parabel

Nun betrachten wir zusätzlich eine Ebene. Es ist leicht zu sehen, dass *jede* Ebene den Kegel schneiden muss. Welche Gestalt hat nun die Menge der Punkte, die sowohl auf dem Kegel als auch auf der Ebene liegen? Oder: Von welcher Art ist die Schnittkurve von Kegel und Ebene? Es kann vorkommen, dass die Schnittkurve nur aus einem Punkt besteht oder aus zwei sich schneidenden Geraden (Wie muss die Ebene dafür liegen?). Wir werden später sehen, dass die anderen auftretenden Schnittkurven Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln sind – aber dazu müssen wir natürlich zuerst einmal wissen, wie solche Kurven eigentlich genau definiert sind.

Wir haben hier also ein Problem, welches wir uns mit ein paar Skizzen verdeutlicht haben. Wie wollen wir nun weiter vorgehen? Einerseits können wir *geometrisch* argumentieren, d.h. wir zeichnen Bilder, sprechen über Punkte, Geraden und Ebenen, über Abstände und Winkel.
Andererseits können wir auch so vorgehen, dass wir unsere geometrischen Gebilde in Gleichungen übersetzen. Tatsächlich habt ihr in der Schule schon etwas in dieser Richtung kennen gelernt. Statt Geraden zu zeichnen, kann man sie auch als Gleichung der Form

$$y = mx + n$$

darstellen. Das ist natürlich *keine* Gerade – das ist nur eine Gleichung! Erst dadurch, dass wir x und y als Koordinaten von Punkten im $\mathbb{R}^2$ *interpretieren*, wird die Gleichung für uns eine „Geradengleichung“.
Nun kann man z.B. den Schnittpunkt von zwei Geraden berechnen, indem man das Gleichungssystem löst, dass aus den beiden Gleichungen der Geraden besteht. Am einfachsten macht man dies durch Gleichsetzen.
Auf gleiche Art und Weise können wir nun versuchen, Gleichungen für Kegel und Ebenen zu finden. Eine Kegelgleichung sieht z.B. so aus:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Die erste Schwierigkeit besteht hier schon darin, dass sich diese Gleichung nicht mehr nach einer Variable auflösen lässt (Beachte: $\sqrt{z^2} = |z|$.) Deswegen wird auch das Rechnen etwas komplizierter. Aber davon ganz abgesehen: Wie ein Kegel sieht diese Gleichung einfach nicht aus. Sie mag zwar weniger Platz einnehmen und eleganter sein, aber auch weniger erhellend. Wir wollen daher diesen Weg hier nicht weiter verfolgen, sondern uns der geometrischen Methode bedienen.

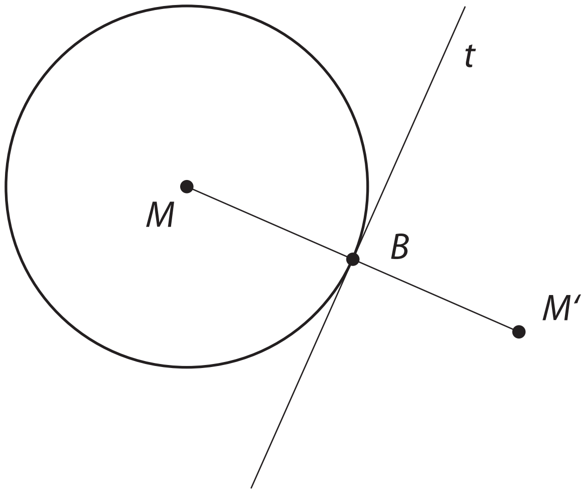
Ebene Kurven

Die einfachste Kurve, die wir uns ansehen wollen, ist der Kreis. Ein **Kreis** besteht aus der Menge von Punkten einer Ebene, die von einem gegebenen Punkt M dieser Ebene einen festen Abstand r haben. Der Punkt M heißt Mittelpunkt des Kreises und r ist sein Radius. Bezeichnen wir mit $d(P, M)$ den Abstand eines Punktes M von einem Punkt P, so können wir den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r wie folgt formal definieren:

$$k(M, r) := \{P \mid d(P, M) = r\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Jeder Kreis $k(M, r)$ ist **konvex**, d.h. es gibt durch jeden Punkt B des Kreises eine Gerade, die (außer im Punkt B) nur außerhalb des Kreises verläuft. Diese Gerade durch B heißt **Tangente** an k im Punkt B.

Wir wissen bereits aus der elementaren Geometrie, dass die Tangente durch B senkrecht auf der Strecke $\overline{MB}$ steht. Trotzdem wollen wir uns noch einmal ansehen, wie man diese Tatsache aus der obigen Definition beweist:



Es sei t die Tangente im Punkt B. Weiter sei M' der Punkt, der aus M durch Spiegeln an t hervorgeht. Nach der Definition des Kreises ist jeder Punkt $B' \neq B$ auf t von M weiter entfernt als B, d.h. $\overline{MB}$ ist die kürzeste Verbindung zwischen M und t. Die Länge einer solchen Verbindungsstrecke nennen wir den Abstand von M zu t und werden ihn künftig mit $d(M,t)$ bezeichnen. Es gilt also mit dieser Bezeichnung $\overline{MB} = d(M,t)$. Aus Symmetriegründen folgt weiter $\overline{M'B} = d(M,t)$. Aus diesen beiden Tatsachen erhalten wir, dass der Streckenzug MBM' die kürzeste Verbindung zwischen M und M' ist. Da aber nach Definition die Stecke $\overline{MM'}$ die kürzeste Verbindung zwischen M und M' ist, muss der Streckenzug MBM' mit $\overline{MM'}$ zusammenfallen und somit bei B ungeknickt verlaufen. Da aber $\overline{M'B}$ das Spiegelbild von $\overline{MB}$ ist, muss somit $\overline{MB}$ senkrecht auf t stehen. $\square$

Als nächstes betrachten wir die **Ellipse**. Sie ist definiert als die Menge aller Punkte, deren Abstandssumme von zwei Punkten F_1, F_2 gleich einem festen Wert a ist, formal also:

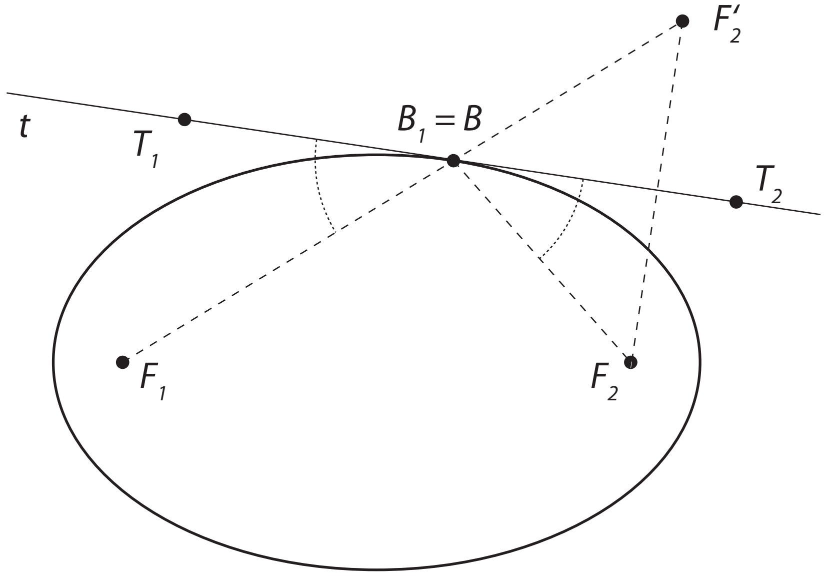
$$e(F_1, F_2, a) = \{P \mid d(F_1, P) + d(F_2, P) = a\}$$

Die Punkte F_1 und F_2 heißen **Brennpunkte** der Ellipse. Ist P ein Punkt der Ellipse, so heißen die beiden Strecken $\overline{F_1P}$ und $\overline{F_2P}$ **Brennstrahlen** zum Punkt P. Anschaulich ist sofort klar, dass die Ellipse wie der Kreis konvex ist, es existiert also in jedem Punkt der Ellipse eine Tangente, die ganz außerhalb der Ellipse verläuft.

Woher kommt der Name „Brennstrahlen“? Dies erinnert uns sehr an Physik, insbesondere an Optik. Und tatsächlich: Stellen wir uns vor, dass ein Lichtstrahl vom Punkt F_1 ausgesandt wird. Jeder solche Strahl wird die Ellipse treffen. Stellen wir uns weiter die Ellipse als spiegelnd vor, so wird dieser Strahl direkt in den Punkt F_2 reflektiert.

Bei jeder Reflexion ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel, so sollte es also auch hier sein. Aber die Ellipse ist „krumm“ – wie messen wir da überhaupt Winkel? Die Antwort ist, dass ein Strahl im Punkt P der Ellipse genau so reflektiert wird, als würde er an der Tangente an die Ellipse im Punkt P reflektiert werden. In diesem Sinne ist diese Tangente eine gute Nährung an die Ellipse im Punkt P. Wollen wir also beweisen, dass ein Lichtstrahl, der von F_1 ausgeht und die Ellipse im Punkt B trifft nach F_2 reflektiert wird, müssen wir zeigen, dass die Winkel, die die Brennstrahlen $\overline{F_1B}$ und $\overline{F_2B}$ mit der Tangente in B bilden, gleich groß sind. Kurz (vgl. Skizze):

$$\measuredangle F_1BT_1 = \measuredangle F_2BT_2.$$



Zum Beweis: Wir wenden ein Prinzip der Bewegungsgeometrie an, dass wir schon einmal im letzen Jahr im zweiten Leipziger Seminar verwendet haben – das Skript dazu ist unter

http://lsgm.uni-leipzig.de/KorrespondenzSeminar/Klasse-9/lesem2.pdf

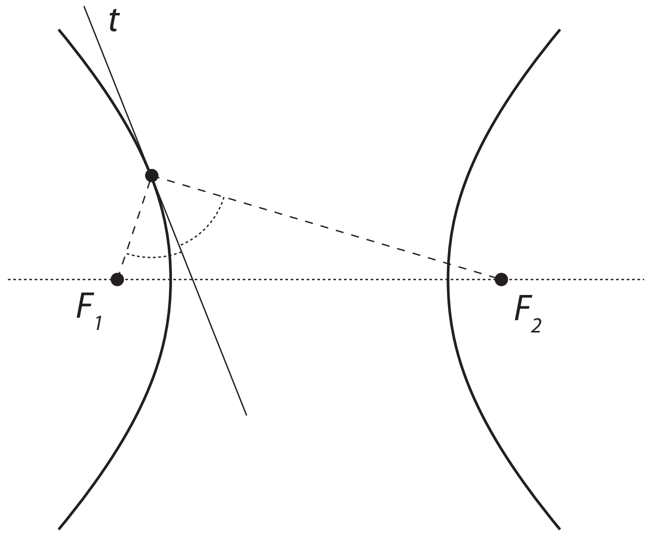
einzusehen. Um den kürzesten Streckenzug von F_1 nach F_2 zu finden, der die Tangente t berührt, spiegeln wir F_2 an t und erhalten einen Punkt F_2'. Die Strecke $\overline{F_1F_2'}$ ist die kürzeste Verbindung zwischen F_1 und F_2' und schneidet ferner t in einem Punkt B_1. Nach Konstruktion von F_2' ist somit der Streckenzug $F_1B_1F_2$ die kürzeste Verbindung von F_1 und F_2, die t berührt.

Die Winkel $\measuredangle F_1B_1T_1$ und $\measuredangle F_2'B_1T_2$ sind als Scheitelwinkel gleich groß. Folglich sind nach Konstruktion von F_2' auch $\measuredangle F_1B_1T_1$ und $\measuredangle F_2B_1T_2$ gleich groß. Wir müssen uns nun nur noch davon überzeugen, dass B_1 mit B zusammenfällt.

Dies folgt aber sofort aus der Konvexität der Ellipse: Da jeder Punkt $X \neq B$ von t *außerhalb* der Ellipse liegt, ist auch $d(F_1, X) + d(F_2, X)$ echt größer als $d(F_1, B) + d(F_2, B)$. Folglich ist die kürzeste Verbindung von F_1 und F_2, die t berührt, gerade durch den Streckenzug F_1BF_2 gegeben. Da wir aber schon wissen, dass $F_1B_1F_2$ die kürzeste Verbindung dieser Art ist, folgt $B = B_1$ und damit die Behauptung. $\square$

Die Punkte der Ellipse sind dadurch charakterisiert, dass die *Summe* der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten einen bestimmten Wert a hat. Fordern wir stattdessen, dass die *Differenz* den Wert a hat, erhalten wir die **Hyperbel**. Uns soll aber dabei das Vorzeichen nicht interessieren: ob die Differenz also a oder $-a$ ist, ist für uns gleich. Formal also:

$$h(F_1, F_2, a) = \{P \mid |d(F_1, P) - d(F_2, P)| = a\}$$



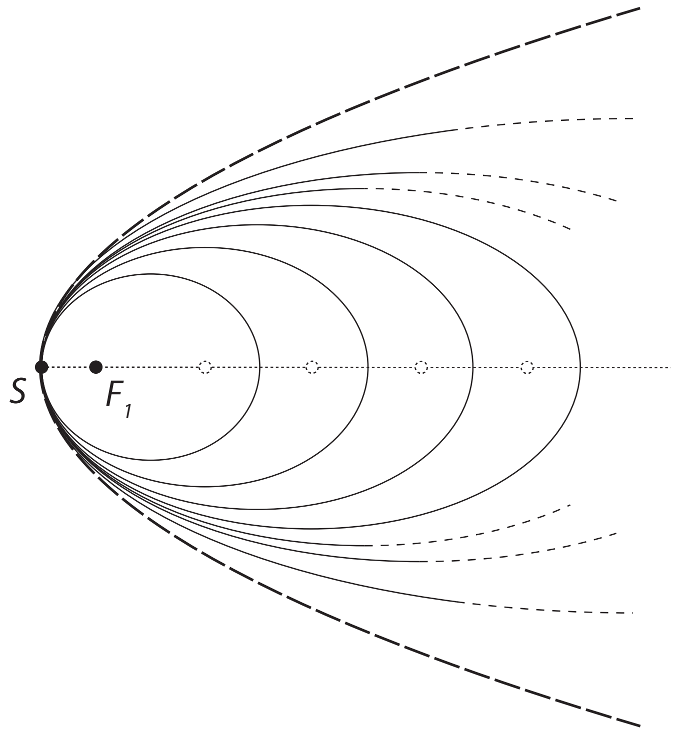
Die Hyperbel ist ebenso wie der Kreis und die Ellipse konvex. Dies heißt hier, dass die Tangente stets ganz zwischen den beiden Ästen verläuft (mit Ausnahme des Berührungspunktes.) Ganz ähnlich wie bei der Ellipse beweist man, dass die Tangente im Punkt B den Winkel zwischen den beiden Brennstrahlen $\overline{F_1B}$ und $\overline{F_2B}$ halbiert.

Aufgabe 1 *Führe diesen Beweis aus.*

Aufgabe 2 *Aus der Schule sind Hyperbeln als Graph der Funktion $y = 1/x$ bekannt. Zeige, dass dies tatsächlich eine Hyperbel gemäß obiger Definition ist. Überlege zunächst, wo die Brennpunkte der Hyperbel sind.*

Die komplizierteste ebene Kurve, die wir uns schließlich noch anschauen wollen, ist die Parabel. Die Parabel ist kompliziert, weil wir sie als Grenzkurve immer größer werdender Ellipsen ansehen wollen, anstatt nur eine Definition „vom Himmel fallen zu lassen".

Wir beginnen mit einer beliebigen Ellipse. S sei der Schnittpunkt der Gerade h durch F_1 und F_2, der näher an F_1 liegt, wie in der folgenden Skizze verdeutlicht. Wir bewegen nun F_2 auf der Gerade h immer weiter von F_1 weg. Zu jeder Position von F_2 gehört eine Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2, die außerdem durch S geht. Wenn F_2 immer weiter wegbewegt wird, ändert sich diese zugehörige Ellipse immer weniger. Wir definieren die **Parabel** als die Kurve, der sich diese Ellipsenschar annähert. In der Skizze ist die äußerste gestrichelt gezeichnete Kurve eine Parabel.



Wir wollen aus dieser Definition noch eine zweite, handlichere Charakterisierung der Parabel herleiten. Dazu überlegen wir uns folgendes: Für einen Punkt B, der nahe bei S liegt, ist $\overline{BF_2}$ annähernd parallel zu h, wenn F_2 gegen unendlich strebt (vgl. nachfolgende Skizze).

Wir errichten in einem beliebigen festen Punkt L auf der Strecke $\overline{F_1F_2}$ eine Senkrechte g zu $\overline{F_1F_2}$. Weiter sei L' der Fußpunkt des Lotes von B auf g. Dann gilt näherungsweise für einen konstanten Wert a:

$$a = \overline{F_1B} + \overline{BF_2} = \overline{F_1B} + \overline{BL'} + \overline{LF_2}.$$

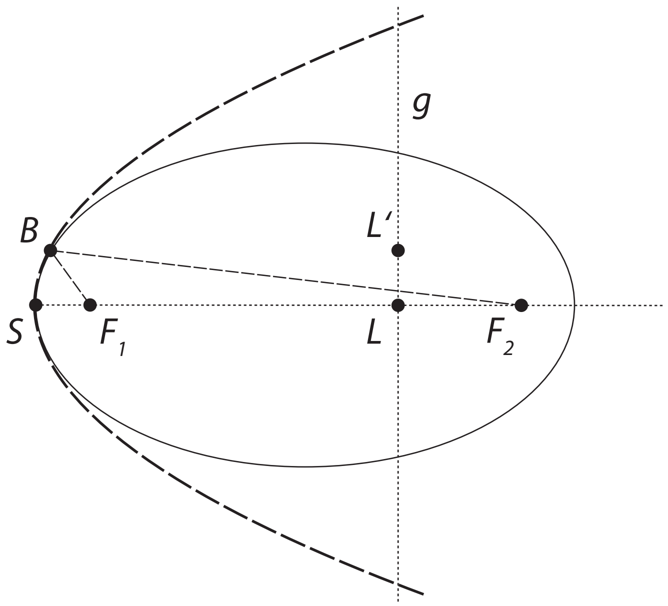
Also:

$$\overline{F_1B} + \overline{BL'} = a - \overline{LF_2}$$

Wenn wir nur B wandern und F_2 fest lassen, so ist auch $a - \overline{LF_2}$ konstant, d.h. für jede Ellipse der Ellipsenschar gilt näherungsweise:

$$\overline{F_1B} + \overline{BL'} = \text{const.}$$

Je größer $\overline{F_1F_2}$ ist, umso „genauer“ gilt diese Konstanz, d.h. für die Grenzkurve (also die Parabel) wird diese Gleichung exakt erfüllt sein.



Wir können damit also festhalten: Die Parabel ist die Kurve aller Punkte, für die die Abstandssumme zu einem Punkt F_1 und einer Gerade g konstant ist, formal:

$$p(F_1, g, a) = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, g) = a\}.$$

Dies wollen wir noch etwas umformen. Wir ziehen eine Parallele l zu g, die von S den Abstand $\overline{SF_1}$ hat, und zwar so, dass S zwischen l und g liegt.

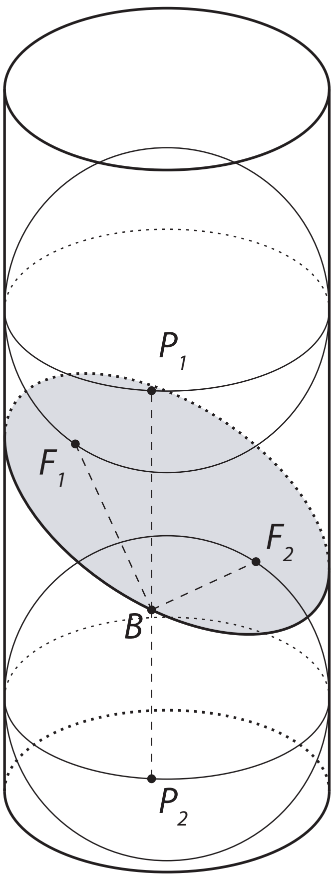
Aufgabe 3 *Zeige, dass in dieser Situation für einen beliebigen Punkt P der Parabel gilt: $d(P, F_1) = d(P, l)$. Zeige umgekehrt, dass jeder Punkt, der diese Gleichung erfüllt, auch auf der Parabel liegt.*

Die Gerade l heißt **Leitlinie** der Parabel. Mit Hilfe der Leitlinie können wir nun die Definition der Parabel so fassen, wie sie in den meisten Büchern zu finden ist: Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einer festen Geraden l und einem Punkt F den gleichen Abstand haben.

Zylinder- und Kegelschnitte

Wir kommen nun zurück zu unserem Ausgangsproblem: Welche Art von Kurven entstehen, wenn eine Ebene einen Doppelkegel schneidet? Kreise entstehen, wenn die Schnittebene senkrecht zur Kegelachse steht – das ist völlig klar. Zum Nachweis, dass tatsächlich Ellipsen entstehen und nicht irgendwelche Ostereier, benutzen wir sogenannte **Dandelin-Kugeln**, die nach dem belgischen Mathematiker Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) benannt sind.
Wir illustrieren dieses Prinzip an einem Zylinderschnitt. Dazu werde ein Zylinder von einer zur Zylinderachse geneigten Ebene geschnitten. Um zu zeigen, dass die Schnittkurve eine Ellipse ist, müssen wir zeigen, dass es zwei Brennpunkte gibt,

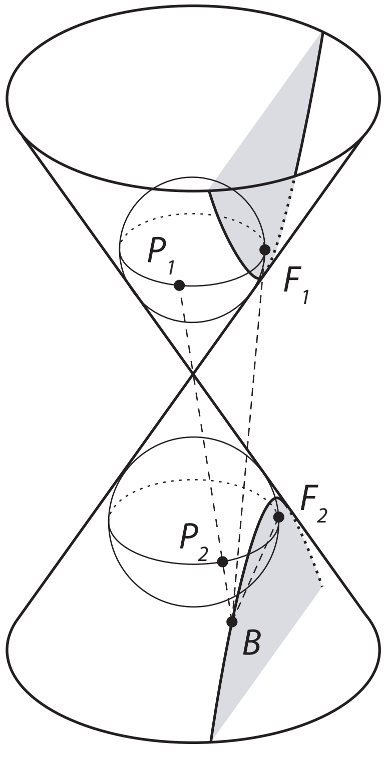
so dass die Summe der Abstände eines jeden Punktes der Schnittkurve von eben jenen beiden Brennpunkten konstant ist.



Unser größtes Problem ist dabei, diese Brennpunkte überhaupt zu finden. Wir „schieben“ daher von oben und unten Kugeln in den Zylinder, die den gleichen Radius wie der Zylinder haben sollen. Und zwar schieben wir sie soweit, bis sie die Schnittebene berühren. Die Berührungspunkte nennen wir F_1 und F_2 und wir werden nun sehen, dass dies schon die Brennpunkte der Ellipse sind.
Sei nämlich B ein beliebiger Punkt der Schnittkurve. Wir legen eine Gerade durch B, die ganz im Zylindermantel verläuft. Diese Gerade berührt die beiden Kugeln in Punkten den P_1 und P_2. Nach Konstruktion sind sowohl $\overline{BF_1}$ als auch $\overline{BP_1}$ Tangenten an die obere Kugel. Aus Symmetriegründen sind aber alle Tangentenabschnitte von einem festen Punkt aus gleich lang, d.h. wir haben $\overline{BF_1} = \overline{BP_1}$. Völlig analog erhalten wir $\overline{BF_2} = \overline{BP_2}$. Also folgt:

$$\overline{BF_1} + \overline{BF_2} = \overline{BP_1} + \overline{BP_2} = \overline{P_1P_1} = \text{const.}$$

Damit ist alles gezeigt. Diesen Beweis können wir leicht auf den Fall des Kegels übertragen (nur die Skizze wird etwas komplizierter.)



Wenn die Schnittebene des Kegels sich nun stärker neigt und die Ellipsen immer länger werden, entsteht schließlich eine Parabel. Dies sehen wir einfach, weil wir die Parabel ja schon als Grenzkurve von immer länger werdenden Ellipsen erkannt haben.
Bleibt schließlich noch der Fall der Hyperbel – in diesem Fall ist die Ebene so stark geneigt, dass sie beide Hälften des Doppelkegels schneidet. Auch hier können wir mit Dandelin-Kugeln arbeiten, die wir wie in der Skizze angedeutet in den Kegel legen. Wieder gilt $\overline{BF_1} = \overline{BP_1}$ und $\overline{BF_2} = \overline{BP_2}$, also

$$\overline{BF_1} - \overline{BF_2} = \overline{BP_1} - \overline{BP_2} = \overline{P_1P_2} = \text{const.}$$

Damit ist alles gezeigt.

Unendliche Summen

Der griechische Held Achilles trat im sportlichen Wettkampf gegen eine Schildkröte an. Da Achilles zehn mal so schnell ist, gibt er der Schildkröte einen Vorsprung von 100 Fuß. Doch dann, so argumentierte der griechische Philosoph Zenon von Elea, braucht er gar nicht mehr anzutreten, denn:

- Hat Achilles die 100 Fuß Vorsprung geschafft, ist die Schildkröte 10 Fuß vor ihm.
- Hat Achilles auch diese 10 Fuß durchlaufen, ist die Schildkröte schon 1 Fuß weiter.
- Ist Achilles diesen Fuß gelaufen, hat die Schildkröte noch einen Vorsprung von $0,1$ Fuß.

  $\vdots$

Also: Nie wird Achilles die Schildkröte erreichen, da diese immer wieder ein Stück vorangekommen ist.

Zenon lebte um 450 v.Chr. und der Wettlauf von Achilles mit der Schildkröte ist wohl die bekannteste seiner Paradoxien.

Wo liegt denn der Fehler in dieser Argumentation?

Es ist klar, dass nach den ersten 100 Fuß die Schildkröte wirklich noch 10 Fuß Vorsprung hat und nach den dann folgenden 10 Fuß noch einen Fuß Vorsprung usw. Dann kann der Fehler nur im letzten Satz „Nie wird...“ verborgen sein? Die Argumentation deutet an, dass es sich bei der Summe all dieser Strecken um eine unendliche Strecke handelt, für die Achilles dann auch unendlich viel Zeit benötigt. Doch das stimmt nicht. Sicher, wenn man unendlich oft 1 Fuß addiert, erhält man eine unendliche Strecke, doch hier werden die einzelnen Streckenlängen immer kleiner und da kann es vorkommen, dass diese unendliche Summe einen endlichen Wert annimmt – wir sagen: *Die Summe konvergiert.* Bei Achilles und der Schildkröte treffen wir auf die folgende unendliche Summe:

$$A = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = 110 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i}$$

Diese Summe gehört zu den *geometrischen Reihen* $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ Für $|q| > 1$ werden die Summanden vom Betrag immer größer, damit kann dann die Reihe nicht konvergieren. Auch für $q = 1$ und $q = -1$ haben wir keine Konvergenz. Warum?

Wir wollen uns nun überlegen, ob diese Reihe für $|q| < 1$ konvergiert. Dazu schauen wir uns zuerst endliche Summen an, die sogenannten *Partialsummen*. Diese haben die Form: $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Durch Multiplikation mit $(1-q)$ sehen wir, dass

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

gilt. Was passiert nun, wenn n immer größer wird? Dann wird der Betrag von q^{n+1} immer kleiner, nähert sich immer mehr der Null an. Das heißt je größer n ist, umso weniger fällt der Summand q^{n+1} ins Gewicht und damit ist $S = \frac{1}{1-q}$. Im Falle unseres Achilles' haben wir $A = 110 + \frac{1}{1-0{,}1} = 111{,}\bar{1}$ und genau nach dieser Strecke holt Achilles die Schildkröte ein. Alle oben angesprochenen Zeitpunkte liegen *vor* diesem Treffpunkt.

Wir haben nun gesehen, dass eine unendliche Summe auch einen endlichen Wert annehmen kann, also konvergieren kann. Eine notwendige Bedingung dafür ist, dass der Betrag der einzelnen Summanden immer kleiner wird. Doch reicht das schon aus? Konvergiert jede Reihe, deren Summanden einen immer kleineren Betrag haben – man sagt: *Ist diese Bedingung hinreichend?* Dazu schauen wir uns eine andere berühmte Reihe an, die *harmonische Reihe*:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Diese erfüllt die Bedingung, dass die einzelnen Summanden betragsmäßig immer kleiner werden. Doch schauen wir uns wieder die Partialsummen an: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$. Dann sehen wir:

$$\begin{array}{lclcccc}
S_2 & = & 1 + \frac{1}{2} & & & & \\
S_4 & = & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & \geq & S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} & = & 2 \\
S_8 & = & 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{8} & \geq & S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} & = & 2 + \frac{1}{2} \\
S_{16} & = & 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{16} & \geq & S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} & = & 3 \\
 & \vdots & & & & & \\
S_{2^n} & \geq & S_{2^n} + 2^{n-1}\dfrac{1}{2^n} & & = & \dfrac{n+2}{2} &
\end{array}$$

Die Partialsummen wachsen unbeschränkt und damit kann die harmonische Reihe auch nicht konvergieren. Die obige Bedingung ist also *nicht* hinreichend.
Allgemein ist es sehr schwer zu sagen, ob eine Reihe konvergiert und wenn ja, ist es meistens noch schwerer, den Grenzwert zu bestimmen. Eine Methode Nicht-Konvergenz nachzuweisen, haben wir schon bei der harmonischen Reihe angewendet: Wir haben eine *Minorante* gefunden, von der wir wussten, dass sie unbeschränkt wächst, *divergiert*. Eine Minorante ist eine andere Reihe, die gliedweise

einen kleineren oder gleichen Betrag hat, als unsere ursprüngliche Reihe, d.h. der Betrag des i-ten Summanden der Minorante ist kleiner als der Betrag des i-ten Summanden der Ausgangsreihe. Im obigen Falle war dies

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots \geq 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}}+\ldots$$

Hat eine Reihe eine divergente Minorante, so divergiert auch diese Reihe.

Finden wir dagegen zu einer Reihe eine *Majorante*, also eine Reihe deren Summanden gliedweise einen mindestens gleichgroßen Betrag haben, und konvergiert diese Majorante, so muss auch unsere Ausgangsreihe konvergieren. Betrachten wir das folgende Beispiel:

$$S = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$$

Ist $m \leq n$, so gilt $\frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}$. Schätzen wir also alle Summanden $\frac{1}{i}$ für $2^n \leq i < 2^{n+1}$ mit $\frac{1}{(2^n)^2}$ ab, erhalten wir die folgende Majorante von S

$$\begin{aligned} T &= 1+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^2}}_{4\ \textit{Summanden}}+\cdots+\underbrace{\frac{1}{(2^n)^2}+\cdots+\frac{1}{(2^n)^2}}_{(2^{n+1}-2^n)\ \textit{Summanden}}+\cdots \\ &= 1+\frac{4}{2^2}+\cdots+\frac{2^{n+1}-2^n}{(2^n)^2}+\cdots \\ &= 1+1+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \end{aligned}$$

Unsere Majorante T ist die geometrische Reihe für $q = \frac{1}{2}$, von der wir wissen, dass sie konvergiert und damit konvergiert auch unsere Reihe der Kehrwerte der Quadratzahlen. Und wir haben allgemein wieder einen Satz gefunden:

Hat eine Reihe eine konvergente Majorante, so konvergiert auch diese Reihe.

Wir wissen jetzt zwar, dass unsere Reihe konvergiert, doch wir kennen den Grenzwert nicht. Im Falle dieser Reihe ist es auch recht kompliziert, und wir können den Grenzwert hier nicht berechnen. Aber er ist bekannt und lautet $\frac{\pi^2}{6}$.

In anderen Fällen können auch wir hier schon Grenzwerte von Reihen bestimmen, wie wir es schon für die geometrische Reihe getan haben. Einige davon werden wir nachher noch besprechen, doch zuvor müssen wir noch einige Überlegungen zum Rechnen mit unendlichen Summen anstellen.

Wir haben oben beim Rechnen mit Reihen einfach immer einige Summanden zusammengefasst und stillschweigend angenommen, dass das Verhalten der Reihe (Konvergenz oder nicht) und gegebenenfalls der Grenzwert sich nicht ändert. Doch ist das denn wahr? Im Allgemeinen nicht! Im Allgemeinen können wir bei unendlichen Summen, im Gegensatz zu endlichen Summen, nicht einfach Summanden umordnen, vertauschen oder zusammenfassen. Schauen wir uns dazu das folgende einfache Beispiel an:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Was können wir mit dieser Reihe durch Zusammenfassen und Umordnen alles anstellen? Z.B. erhalten wir

$$\begin{aligned}&(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0\\ &1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\end{aligned}$$

oder, da die Summe aus sowohl aus unendlich vielen Einsen als auch Minus-Einsen besteht, eine divergente Reihe

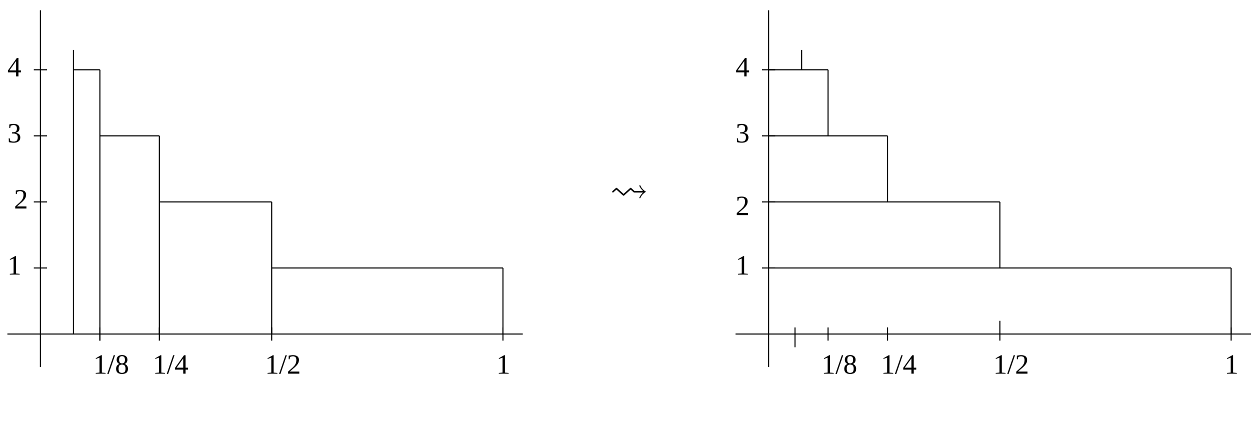
$$1+1-1+1+1-1+1+1-1+1+1-1+\cdots$$

Allerdings kann man zeigen, dass für eine Reihe, die nur aus nichtnegativen Summanden besteht, alle diese Umformungen den Grenzwert bzw. das Konvergenzverhalten nicht ändern. In unseren Fällen war dies so (und wir werden uns hier auch weiterhin nur mit Reihen befassen, deren Summanden alle positiv sind) und wir konnten die Summanden gefahrlos zusammenfassen. Genau solche Umformungen werden es uns in einigen Fällen ermöglichen, Grenzwerte von Reihen auszurechnen.

Als Beispiel befassen wir uns mit der Reihe

$$S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots$$

Die Nenner erinnern uns an die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ von der wir den Grenzwert schon kennen. Damit können wir diese Summe folgendermaßen als Fläche ansehen und eine Umordnung, also eine andere Teilung der Fläche, vornehmen.



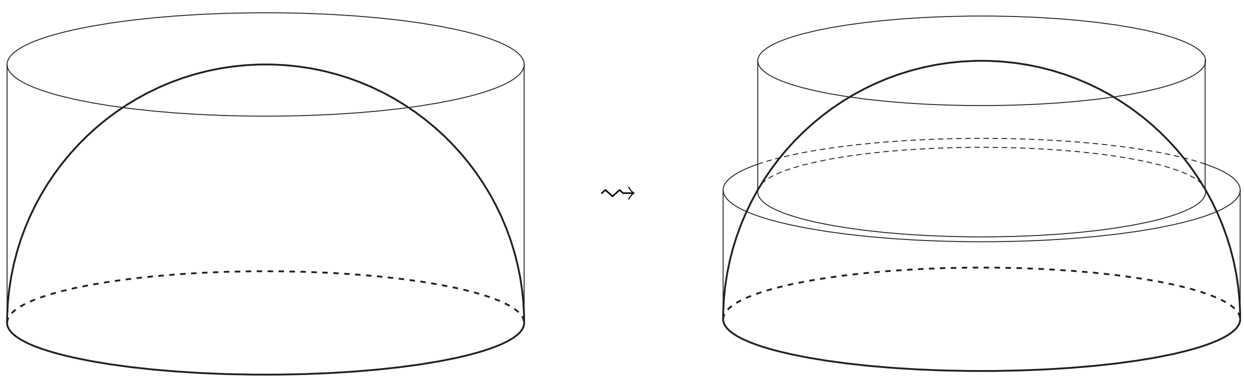
Damit erhalten wir

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 2$$

Als letztes wollen wir uns einer Anwendung zuwenden, bei der auch Summen und Grenzwerte und deren graphische Interpretation eine Rolle spielen: Wir wollen die Gleichung für das Volumen einer Kugel herleiten.

Das Volumen einer Kugel mit Radius r ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, aber wie kann man diese Formel finden? Zuerst bemerken wir, dass es reicht, die Volumenformel für den Radius $r = 1$ zu zeigen. Denn das Volumen eines Körpers erhöht sich bei zentrischer Streckung mit dem Faktor r um den Faktor r^3 (Warum ist das so?). Doch wie können wir das Volumen der Einheitskugel errechnen? Die Idee ist, den Körper durch andere Körper anzunähern, von denen wir das Volumen kennen – und zwar sollen dies Zylinder sein. Wir setzen voraus, dass wir das Volumen eines Zylinders mit Radius r und Höhe h kennen: $\pi r^2 h$.

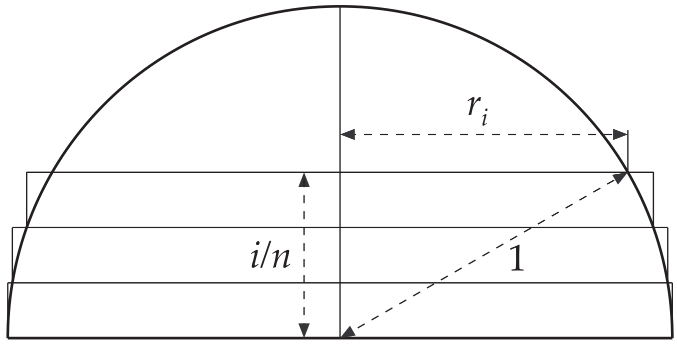
Schauen wir uns nur eine halbe Einheitskugel an, so ist ihr Volumen V' sicherlich kleiner als das Volumen des Zylinders mit 1 als Radius und Höhe – $V' < \pi$. Allerdings ist dies eine sehr grobe Abschätzung. Eine bessere erhalten wir, wenn wir zwei Zylinder nutzen:



Dann erhalten wir die Ungleichung

$$V' < \pi 1^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \pi \frac{7}{8}.$$

Nutzen wir nun gleich n Zylinder, wie in der nächsten Abbildung im Querschnitt dagestellt ist.



Dann hat der i-te Zylinder die Höhe $\frac{1}{n}$ und den Radius $r_i^2 = 1 - \frac{i^2}{n^2}$. Das Volumen des i-ten Zylinders ist somit

$$\pi r_i^2 \frac{1}{n} = \pi \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n},$$

und als Abschätzung für V' erhalten wir

$$V' \;<\; V_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n}.$$

Je größer n wird, desto besser ist die Abschätzung und im Grenzwert $n \to \infty$ erhalten wir V'.
Formen wir aber erst einmal V_n um,

$$V_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \pi \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n} \;=\; \pi \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3}\right),$$

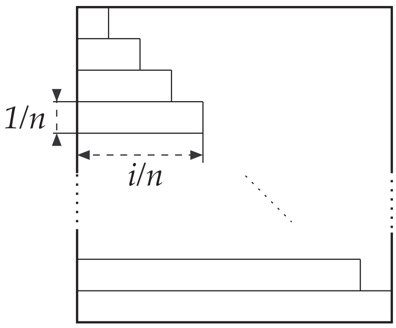
dann sehen wir, dass wir den Grenzwert der Summe

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3}$$

für $n \to \infty$ suchen.
Auch diese Summe wollen wir uns wieder graphisch veranschaulichen. Wir beginnen allerdings mit einer einfacheren Summe, doch das Prinzip werden wir auch auf unsere Summe übertragen können.

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n^2}$$

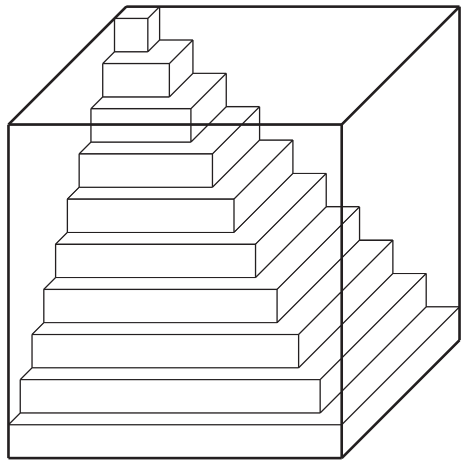
Diese Summe können wir uns als Summe der Flächeninhalte mehrerer rechteckiger Teilflächen in einem Quadrat der Seitenlänge 1 vorstellen, wie in der folgenden Skizze zu sehen ist:



Für große n nähert sich diese Fläche immer mehr der Dreiecksfläche an und im Grenzwert gilt $s_n \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$. [Achtung: Nur die Flächen nähern sich immer weiter an. Die Länge des Streckenzugs, der Treppe, ist für alle n gleich groß, nämlich 2 – Warum? – und nähert sich nicht der Länge der Diagonale an!]

Wie können wir dieses Vorgehen auf unsere Summe übertragen? Anstatt der Quadrate haben wir nun Kuben im Nenner der einzelnen Summanden stehen. Aus diesem Grund betrachten wir nun auch keine Teilflächen des Quadrates, sondern ein Teilvolumen des Würfels der Kantenlänge 1.

Für große n nähert sich diese Figur einer quadratischen Pyramide mit Höhe 1 an und diese hat das Volumen $\frac{1}{3}$. Damit haben wir, dass $\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{n^3}$ für $n \to \infty$ zu $\frac{1}{3}$ konvergiert. Also konvergiert $V_n = \pi(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i^2}{n^3})$ zu $V' = \frac{2}{3}\pi$. Wir haben nun das Volumen V' der Einheitshalbkugel hergeleitet und damit auch das Volumen der Kugel mit beliebigem Radius r als $\frac{4}{3}\pi r^3$ erhalten.



Anworten auf alle Fragen und Lösungen zu den Aufgaben, die offen geblieben sind, könnt Ihr uns gern zuschicken. Am besten an

Andreas Nareike
Eilenburger Straße 51
04509 Delitzsch

oder per E-Mail an

`nadgr@gmx.de` oder `andreas.nareike@gmx.net`

Natürlich nehmen wir auch Eure Fragen, Ideen und Anregungen zu diesen oder anderen Themen gern entgegen.

Nadine Große und Andreas Nareike