Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

Prof. Hans-Gert Gräbe, Institut f. Informatik, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
email: graebe@informatik.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2005/06 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 4

Hinweise zu den Aufgaben

In Aufgabe 1 und 2 geht es um das Lösen diophantischer Gleichungen. Diese hängen eng mit linearen Kongruenzen zusammen, die schon Thema in der Aufgabenserie 2 waren. Lest dazu bitte vorher das beiliegende Arbeitsmaterial „Diophantische Gleichungen“ und schaut auch noch einmal in den Text über „Lineare Kongruenzen – Teil 2“. Beide Texte findet ihr auch auf der LSGM-Webseite zum Korrespondenzseminar.

Aufgabe 3 und 4 sind wieder Aufgaben, in denen es ums Vertauschen von Ziffern geht, und für die es wichtig ist, eine aussagekräftige Umsetzung in mathematische Formeln zu finden. In Aufgabe 3 sollt ihr die Technik des indirekten Beweises verwenden. Schaut dazu auch im Arbeitsmaterial „Diophantische Gleichungen“ den dort geführten indirekten Beweis an.

In der Aufgabe 5 schließlich geht es um die graphische Lösung von Ungleichungen, in denen einfache Funktionen vorkommen. Dazu sollt Ihr Euch einen Überblick über das Aussehen der Graphen verschiedener Funktionen erarbeiten, die aus einigen „besonderen“ Funktionen und linearen Funktionen zusammengesetzt sind. Versucht dazu, von den einzelnen Teilen, also den Funktionen $|x-1|$, $\operatorname{sgn}(2x+5)$, $\left\lfloor -\frac{x}{2}+1 \right\rfloor$ usw. den jeweiligen Graphen zu zeichnen (pro Teilaufgabe in ein extra Koordinatensystem) und die für die Lösung relevanten Teile zu markieren. Hier noch einmal die Definitionen für die „besonderen“ Funktionen:

$|x|$ ist die *Betragsfunktion*, d.h. „x ohne Vorzeichen“

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$\lfloor x \rfloor$ ist die *Gauß-Klammer*, d.h. die größte ganze Zahl, die x nicht übersteigt
(also z.B. $\lfloor 1,32 \rfloor = \lfloor 1,33 \rfloor = \lfloor 1,45 \rfloor = \lfloor 1,98 \rfloor = 1$, $\lfloor -0,25 \rfloor = -1$).

$\operatorname{sgn}(x)$ ist die *Signum- oder Vorzeichen-Funktion*, d.h.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Unser **nächstes Arbeitstreffen** findet wie geplant **am Samstag, dem 28. Januar 2006** statt. Wir treffen uns wieder um 9:30 Uhr beim Pförter im Hauptgebäude der Universität am Augustusplatz.

Eure Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr zum Arbeitstreffen mitbringen oder **bis zum 31. Januar 2006** einschicken an die Adresse

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Prof. H.-G. Gräbe.

Die Aufgaben

1. Ermittle alle geordneten Paare ganzer Zahlen $(x; y)$, die folgende Gleichung erfüllen:

a) $29\,x + 27\,y = 56$ b) $331\,x - 724\,y = 461$

2. Ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 700 so als Summe zweier natürlicher Zahlen darzustellen, dass die eine Zahl bei Division durch 17 den Rest 3 und die andere Zahl bei Division durch 23 den Rest 21 lässt! (6 Pkt.)

3. Beweise die folgende Aussage indirekt: (6 Pkt.)

Es gibt keine dreistellige natürliche Zahl z_1, aus der man nach Vertauschen der ersten mit der dritten Ziffer eine natürliche Zahl z_2 erhält, die viermal so groß ist wie z_1.

4. Wir betrachten zweistellige natürliche Zahlen x, y und stellen fest, dass es Paare $(x; y)$ mit folgender Eigenschaft gibt: (6 Pkt.)

- Tauscht man die Ziffern von x gegeneinander aus und addiert zu der so entstandenen Zahl x' die Zahl 9, so erhält man die Zahl y.
- Tauscht man die Ziffern von y gegeneinander aus und addiert zu der so entstandenen Zahl y' die Zahl 9, so erhält man die Zahl x.

Ein solches Paar ist z.B. $(25; 61)$, denn es gilt $52 + 9 = 61$ und $16 + 9 = 25$.

Wir nennen die Zahlen eines solchen Paares $(x; y)$ *einander zugeordnet*.

a) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die als Elemente solcher Paare auftreten können.

b) Ermittle alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind.

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die »03«) so ist die einstellige Zahl zu verwenden, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel 3).

5. Ermittle die Lösungsmengen folgender Ungleichungen auf grafischem Wege: (6 Pkt.)

a) $|x-1| + \operatorname{sgn}(2\,x+5) \leq \dfrac{7}{2}$ b) $|x-3,5| - \left\lfloor -\dfrac{x}{2} + 2 \right\rfloor \leq 1$