Leipziger SchülerGesellschaft für Mathematik
http://lsgm.uni-leipzig.de

c/o LSGM, über Mathematisches Institut, Univ. Leipzig, 04009 Leipzig
Tel. 0341-9732116 (d), 0341-4792026 (pr)
email: Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de

Korrespondenz-Seminar 2005/06 der LSGM
Klasse 8 – Aufgabenserie 3

Hinweise zu den Aufgaben

Aufgabe 1 ist eine Aufgabe aus der räumlichen Geometrie. Zur Bestimmung der Längen der gesuchten Strecken bietet sich der Satz des Pythagoras an. In welchen der vielen rechtwinkligen Dreiecken ist er zielführend anzuwenden?

Aufgabe 2 ist eine Konstruktionsaufgabe. Fertige dir für die Analyse der Aufgabe zunächst eine Skizze an und finde Beziehungen zwischen Winkeln heraus, die für die Lösung nützlich sein könnten. Zur Erinnerung noch einmal die Liste der Fragen und Aufträge, die zur vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe zu bearbeiten sind:

- Konstruktionsbeschreibung;
- Nachweis, dass die so konstuierten Gebilde die Aufgabenstellung erfüllen (jedes Gebilde ist also Lösung – Existenznachweis);
- Nachweis, dass keine anderen Gebilde die Aufgabenstellung erfüllen (es wurde keine Lösung übersehen – Einzigkeitsnachweis);
- Untersuchung, für welche Kombinationen der Vorgabewerte die Konstruktion ausgeführt werden kann (Determination)

In Aufgabe 3 ist wesentlich, dass *positive* Zahlen $r,\ s$ zu finden sind, denn $r = z,\ s = 0$ wäre eine zu einfache Lösung. Überlege im Teil c), ob die Zahl 3 durch andere Primzahlen ersetzt werden könnte.

Diesmal ist Aufgabe 4 eine Textaufgabe, zu deren Lösung zunächst eine Umsetzung in mathematische Symbolik sinnvoll ist.

In Aufgabe 5 kommen wir auf das Thema „Lösen von Ungleichungen“ zurück, das wir zum Arbeitstreffen bereits ausführlich besprochen haben. Zeige, was du dabei gelernt hast, und führe die erforderlichen Fallunterscheidungen aus!

Eure Lösungen zu diesen Aufgaben könnt ihr **bis zum 30. Dezember 2005** einschicken an die Adresse

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig.

Viel Spaß und Erfolg beim Lösen der Aufgaben wünscht Euch

Prof. H.-G. Gräbe.

Die Aufgaben

1. Sei $ABCDEFGH$ ein Würfel (Grundfläche $ABCD$, Deckfläche $EFGH$) mit der Kantenlänge a und P bzw. Q der Diagonalenschnittpunkt der Seitenfläche $BCGF$ bzw. $EFGH$. (6 Pkt.)

a) Berechne den Umfang des Dreiecks APQ.

b) Beweise, dass dann stets $|\angle PBQ| = |\angle PQB|$ gilt.

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zu konstruieren sind alle Punkte X, Y, welche die folgenden Bedingungen erfüllen: (7 Pkt.)

$$\text{(a) } X \in \overline{AC},\ A, C \neq X \quad \text{(b) } Y \in \overline{BC},\ B, C \neq Y \quad \text{(c) } |AX| = |XY| = |YC|$$

3. Es gilt der folgende Satz: (6 Pkt.)

Wennn m und n positive ganze Zahlen sind und $z = m^2 + 3n^2$ gilt, dann gibt es stets zwei positive ganze Zahlen r und s, so dass $z^2 = r^2 + 3s^2$ gilt.

a) Ermittle solche Zahlen $r,\ s$ für $m = 1,\ n = 2$.

b) Beweise diesen Satz.

c) Gib eine (gültige) Verallgemeinerung dieser Satz an, indem du die Voraussetzungen abschwächst?

4. Klaus überprüft während der Ferien seine Vokabelkenntnisse in Englisch. Als er unter den 2555 Wörtern, die er im Laufe der Zeit sorgfältig in sein Vokabelheft eingetragen hat, die Anzahl z_1 derjenigen Wörter ermittelt, die er noch nicht beherrscht, und danach die Anzahl z_2 der übrigen Wörter, stellt er beim Aufschreiben dieser beiden Zahlen fest, dass $z_1 > z_2$ ist und dass er beim Aufschreiben genau zwei Ziffern verwendet hat, und zwar immer abwechselnd, wobei die an erster Stelle stehende Ziffer bei beiden Zahlen dieselbe ist.

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben die beiden Zahlen z_1 und z_2 eindeutig ermitteln lassen und gib diese beiden Zahlen an. (6 Pkt.)

5. Ermittle die Lösungsmengen jeder der folgenden Ungleichungen im Bereich der reellen Zahlen:

a) $(3 - x)(5x - 2) < (1 - 5x)(x + 7)$ (2 Pkt.)

b) $\dfrac{5}{3 - x} - 5 > 0$ (3 Pkt.)