

# Bericht vom

## 2. Leipziger Seminar am 29. Januar 2005

### Aufgabendiskussion Serie 4

#### zu Aufgabe 4-3

Zur Lösung dieser Aufgabenstellung benötigt man die Teilbarkeitsregeln für die Division durch 2 bis 8. Viele Teilbarkeitsregeln kennen wir, z.B.:

Eine Zahl  $a$  ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre *Quersumme*  $Q(a)$ , d.h. die Summe ihrer Ziffern, durch 3 teilbar ist.

Die Teilbarkeitsregel der 11 ist dagegen schon etwas komplizierter:

Eine Zahl  $a$  ist genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre *alternierende Quersumme*  $Q_{alt}(a)$ , d.h. die letzte Ziffer minus die vorletzte plus die vorvorletzte usw., durch 11 teilbar ist.

Doch was machen wir, wenn wir eine Teilbarkeitsregel einmal nicht kennen oder einfach nur vergessen haben? Wir werden im Folgenden eine Möglichkeit kennenlernen Teilbarkeitsregeln kennen zu lernen. Dazu stellen wir uns eine  $n$ -stellige Zahl im Dezimalsystem vor:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + a_3 10^3 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1}$$

Die Frage, ob  $a$  durch eine Zahl  $b$  teilbar ist, entspricht der Frage, ob  $a \equiv 0 \pmod{b}$  ist, also kurz:

$$b|a \iff a \equiv 0 \pmod{b}$$

(Eine Einführung in lineare Kongruenzen ( $\equiv$ ) ist im Bericht des 1. Leipziger Seminars vom 13. November 2004 zu finden.)

#### **Teilbarkeit durch 3:**

Es gilt  $10^i \equiv 1 \pmod{3}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , da  $10^i - 1 = 99 \dots 999$  immer durch 3 teilbar ist. Damit gilt:

$$a \equiv 0 \pmod{3} \iff Q(a) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \equiv 0 \pmod{3}$$

**Aufgabe 1** Zeige, dass eine Zahl genau dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

## Teilbarkeit durch 7:

Wir schauen uns die Reste der Zehnerpotenzen bei Division durch 7 an:

$$\begin{aligned}10^0 &\equiv 1 \pmod{7} \\10^1 &\equiv 3 \pmod{7} \\10^2 &\equiv 2 \pmod{7} \\10^3 &\equiv -1 \pmod{7} \\10^4 &\equiv -3 \pmod{7} \\10^5 &\equiv -2 \pmod{7} \\10^6 &\equiv 1 \pmod{7}\end{aligned}$$

Ab 6 wiederholen sich die Reste und wir erhalten

$$\begin{aligned}a \equiv 0 \pmod{7} &\iff a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + \dots \equiv 0 \pmod{7} \\&\iff Q_{alt(a)}^3 := [a_2a_1a_0] - [a_5a_4a_3] + [a_8a_7a_6] - \dots \equiv 0 \pmod{7},\end{aligned}$$

wobei  $[xyz] = 100x + 10y + z$  ist.  $Q_{alt(a)}^3$  ist die *alternierende 3er Quersumme*.

**Aufgabe 2** Beweise die oben angegebene Teilbarkeitsregel für die 11 und zeige, dass eine Zahl auch genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre 2er Quersumme,  $Q^2(a) = [a_1a_0] + [a_3a_2] + \dots$ , durch 11 teilbar ist.

Unsere Strategie beim Finden von Teilbarkeitsregeln ist es demnach, so lange die Reste der Zehnerpotenzen zu berechnen, bis die Folge dieser Reste periodisch wird.

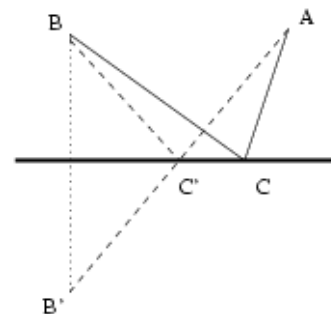
**Aufgabe 3** Zeige, dass diese Folge immer periodisch ist. Wie ist das bei Division durch 4, wie lautet hier die Teilbarkeitsregel?

**Aufgabe 4** Finde Teilbarkeitsregeln bei Division durch 13, 37 und 101.

## Bewegungsgeometrie und Extremalaufgaben

Ein Aufgabentyp in der Geometrie fragt nach extremalen Umfängen, Flächen oder Ähnlichem. Viele von ihnen kann man elementar mit Bewegungen lösen, wie z.B.:

**Aufgabe 5** Alexander soll von  $A$  nach  $B$  laufen und muss die Wand mindestens einmal berühren. Welchen Punkt der Wand sollte er ansteuern, damit sein Weg minimal wird?



*Lösung:* Wir spiegeln den Punkt  $B$  an der Wand und erhalten  $B'$ . Berührt Alexander die Wand im Punkt  $C$ , so ist der Streckenzug  $ACB$  genauso lang wie der Streckenzug  $ACB'$ . Es genügt also, den Streckenzug  $ACB'$  zu minimieren. Nach der Dreiecksungleichung ist dieser minimal, wenn  $C$  auf der Strecke  $\overline{AB'}$  liegt (das ist im Bild Punkt  $C'$ ). Damit gilt für den kürzesten Weg das Reflexionsgesetz:

$$\text{Einfallswinkel} = \text{Ausfallswinkel}.$$

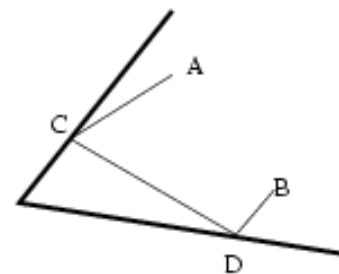
Dieses Gesetz kennen wir von der Reflexion des Lichtes an einem Spiegel und wir haben gesehen, dass sich das Licht hier so ausbreitet, dass es den kürzesten Weg zurücklegt und damit wegen der konstanten Lichtgeschwindigkeit auch am wenigsten Zeit benötigt. Allgemein formuliert man dies in der Physik im *Fermatschen Prinzip*: Lichtstrahlen breiten sich so von  $A$  nach  $B$  aus, dass die dafür benötigte Zeit extremal ist.

Im Falle konstanter Lichtgeschwindigkeit entspricht diese Forderung auch einem extremalen Weg. Ändert sich jedoch das Medium und damit die Lichtgeschwindigkeit, wie z.B. beim Übergang von Luft zu Wasser ist der Weg i.a. nicht mehr extremal. Hier gilt dann das Snellius'sche Brechungsgesetz, welches mit Hilfe des Fermatschen Prinzips hergeleitet werden kann.  $\square$

Bei der letzten Aufgabe haben wir *Reflexion* benutzt, um einen Streckenzug zu minimieren. Grundidee dabei ist es, den gegebenen Streckenzug durch Reflexion so in einen Streckenzug gleicher Länge zu überführen, dass der erhaltene Streckenzug durch einfaches Verbinden der Endpunkte minimiert werden kann. In obiger Aufgabe mussten wir also an der Wand spiegeln, um die Bedingung zu erfüllen, dass Alexander die Wand berührt.

Ihr könnt versuchen, auch die folgenden Aufgaben analog zu lösen:

**Aufgabe 6** Jetzt steht Alexander vor einer Ecke, soll von  $A$  nach  $B$  laufen und dabei die beiden Wände mindestens einmal berühren. Welche Punkte der Wände sollte er ansteuern, damit sein Weg minimal wird?



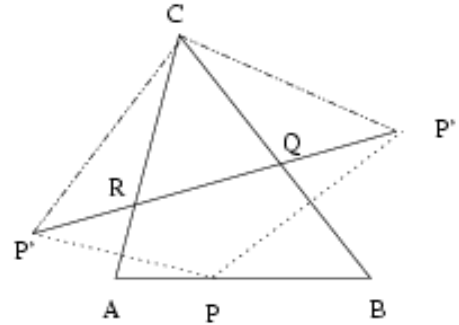
**Aufgabe 7** Eine Billardkugel befindet sich auf einem rechteckigen Billardtisch. In welche Richtung muss die Kugel angestoßen werden, damit sie jede Bande (Kante) einmal berührt und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

Auch die nächste Aufgabe lässt sich mittels Reflexion lösen:

**Aufgabe 8** Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck  $\triangle ABC$ . Gesucht sind Punkte  $P$ ,  $Q$  bzw.  $R$  auf den Kanten  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  bzw.  $\overline{AC}$ , so dass das Dreieck  $\triangle PQR$  minimalen Umfang hat.

*Lösung:* Wir versuchen zuerst eine einfachere Aufgabe zu lösen: Wir lassen den Punkt  $P$  auf  $AB$  fest und suchen erst einmal unter diesen Bedingungen nach Punkten  $Q$  und  $R$ , die den Umfang minimieren. Diese Aufgabe wird analog zu den obigen gelöst, indem wir  $P$  sowohl an der Kante  $\overline{AC}$  als auch an der Kante  $\overline{BC}$  spiegeln und damit die Punkte  $P'$  und  $P''$  erhalten.

Verbinden wir  $P'$  und  $P''$  so ergeben die Schnittpunkte dieser Strecke mit  $\overline{AC}$  bzw.  $\overline{BC}$  die gesuchten Punkte  $Q$  und  $R$  (Zeige, dass das erhaltene Dreieck minimal ist. *Tipp:* Dreiecksungleichung!).



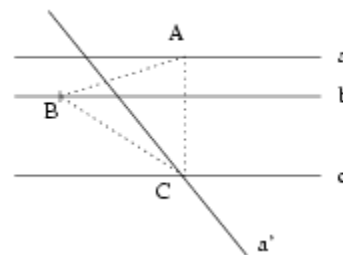
Damit haben wir zu einem festen Punkt  $P$  ein Dreieck mit minimalem Umfang  $u_P$  gefunden. Wir versuchen nun  $P$  so zu bestimmen, dass  $u_P$  minimal wird. D.h. wir suchen den Punkt  $P$  auf  $\overline{AB}$ , so dass die Strecke  $\overline{P'P''}$  minimal ist. Wir bemerken, dass das Dreieck  $\triangle P'P''C$  gleichschenkelig ist, da wegen der Spiegelung  $\overline{PC} = \overline{P'C} = \overline{P''C}$  gilt. Weiterhin ist der Winkel  $\angle P'CP'' = 2\angle ACB$  und damit unabhängig von der Wahl des Punktes  $P$ . Die Streckenlänge  $\overline{P'P''}$  und folglich der Umfang des gesuchten Dreiecks ist somit am kürzesten, wenn die Strecke  $\overline{CP}$  am kürzesten ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\overline{CP}$  die Höhe des Dreiecks ist. Aus Symmetriegründen ist das einbeschriebene Dreieck mit geringstem Umfang das Höhenfußpunktdreieck.  $\square$

**Aufgabe 9** Was ändert sich, wenn wir in der vorherigen Aufgabe die Voraussetzung der Spitzwinkligkeit fallen lassen?

Bis jetzt haben wir immer nur das Prinzip der Reflexion verwendet. Als nächstes wollen wir Aufgaben mittels Drehungen lösen.

**Aufgabe 10** Gegeben sind drei parallele Geraden. Finde auf jeder Geraden jeweils einen Punkt, so dass diese drei Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

*Lösung:* Wir bezeichnen die Geraden mit  $a$ ,  $b$  und  $c$ , wobei  $b$  die mittlere Gerade sei. Wir wählen auf  $b$  einen beliebigen Punkt  $B$ , der ein Eckpunkt unseres gesuchten Dreiecks sein soll. Nun drehen wir die



Gerade  $a$  um  $60^\circ$  um den Punkt  $B$ . Die gedrehte Gerade schneidet die Gerade  $c$  im Punkt  $C$ , dem auf der Urbildgeraden  $a$  der Punkt  $A$  entspricht. Nach Konstruktion ist das erhaltene Dreieck  $\triangle ABC$  gleichseitig, da der Winkel  $\angle ACB$  gerade  $60^\circ$  beträgt und  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .  $\square$

Eine andere Standardaufgabe, die Drehung verwendet, ist die Suche nach dem *Fermatpunkt* eines spitzwinkligen Dreiecks. Das ist ein Punkt, so dass die Summe der Abstände von diesem Punkt zu den Eckpunkten des Dreiecks minimal ist (siehe Wahlaufgabe B der 4.Serie).

**Aufgabe 11** Gegeben sind zwei sich schneidende Kreise. Einer der beiden Schnittpunkte sei  $P$ . Wir betrachten Geraden durch  $P$ , die den ersten Kreis außer in  $P$  noch in  $A$  und den zweiten Kreis außer in  $P$  in  $B$  schneiden. Finde unter all diesen Geraden, jene, für die gilt  $\overline{AP} = \overline{BP}$ .

## Graphentheorie & Visualisierungen

In diesem Teil wollen wir uns mit Graphen beschäftigen. Was ist eigentlich das besondere an Graphen? Die Antwort ist, dass uns Graphen einen bestimmten Sachverhalt deutlicher machen können, weil sie ihn uns buchstäblich vor Augen führen, oder anders gesagt, weil Graphen ein Problem *visualisieren*. Wir wollen zunächst noch einmal an einem Beispiel verdeutlichen, dass Visualisierungen sehr nützlich sein können.

**Aufgabe 12** Alexander und Bettina spielen folgendes Spiel: Aus den Ziffern von 1 bis 9 wählen sie abwechselnd jeder eine Ziffer, dabei dürfen die Ziffern aber nicht doppelt gewählt werden. Also: Was Alexander wählt, kann Bettina nicht mehr wählen und umgekehrt. Gewonnen hat nun, wer als erster mit *genau drei* seiner Zahlen die Summe 15 bilden kann. Wie sehen die optimalen Strategien für Alexander und Bettina aus?

*Lösung:* Zunächst scheint das Spiel recht kompliziert zu sein und wirklich gern wird das wohl auch niemand spielen, wenn man nicht gerade besonders gut im Kopfrechnen ist. Erstaunlich ist aber, dass man das Spiel in ein viel einfacheres übersetzen kann! Wie lassen sich alle Ziffernkombinationen, mit denen man gewinnt, übersichtlich aufschreiben?

Wir wissen bereits, dass sich *alle* diese Kombinationen in einem eindeutig bestimmten magischen Quadrat wiederfinden lassen (siehe Abbildung) – und zwar gerade als die Waagerechten, Senkrechten und Diagonalen.

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Damit also Alexander als Summe bilden 15 kann, muss er alle Ziffern einer Waage-rechten, Senkrechten oder Diagonalen wählen. Außerdem muss er aber noch darauf achten, dass Bettina nicht *vor* ihm drei solche Ziffern wählt.

Dieses Spiel kennen wir jetzt aber! Das ist nichts anderes als das wohlbekannte Tic-Tac-Toe, dass wohl jeder schon einmal heimlich in einer langweiligen Schulstunde gespielt hat. Durch eine geschickte Übersetzung haben wir also erreicht, dass man überhaupt nicht mehr rechnen muss.  $\square$

So ähnlich lassen sich nun auch viele verschiedene Aufgaben in Graphen über-setzen oder etwas gewählter: sich durch Graphen visualisieren. Häufig hat man dann die eigentliche Aufgabe gelöst, wenn man im entsprechenden Graphen einen bestimmten Weg findet. Wichtige Typen dabei sind:

1. Finde einen (möglichst kurzen) Weg von Knoten  $A$  zu Knoten  $B$ .
2. Finde einen Weg, der jede Kante genau einmal benutzt.
3. Finde einen Weg, der alle genau einmal Knoten besucht.

Wir schauen uns zunächst zwei Aufgaben zum ersten Typ an.

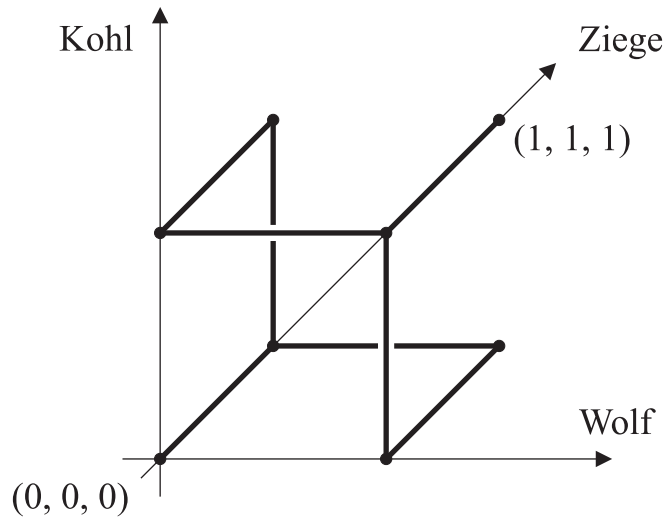
**Aufgabe 13** Wir nehmen uns folgendes bekannte Rätsel vor: Ein Mann will einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf heil über einen Fluss bringen. Er kann dazu ein Boot benutzen, dass aber leider so klein ist, dass nur er und eventuell noch der Wolf *oder* die Ziege *oder* der Kohlkopf auf das Boot passen. Wenn er nun eines seiner Dinge auf die andere Flussseite bringt, muss er also zwei unbeaufsichtigt lassen. Sollten nun Ziege und Kohl allein auf der gleichen Flussseite warten müssen, so hat der Mann bei seiner Rückkehr zwar eine etwas dickere Ziege, aber keinen Kohlkopf mehr. Bleiben Ziege und Wolf allein auf einer Flussseite, so wird der Wolf die Ziege fressen. Wie bringt der Mann Wolf, Ziege und Kohlkopf nun auf die andere Seite?

*Lösung:* Wir wollen das Problem lösen, indem wir es in einen Graphen übersetzen. Wir können die Position von Wolf, Ziege und Kohlkopf als ein Tripel  $(w, z, k)$  darstellen, wobei jeder Eintrag entweder 0 oder 1 sein kann. Der erste Eintrag steht für den Wolf. Ist  $w = 0$  heißt dies, dass sich der Wolf auf dem Startufer befindet,  $w = 1$  bedeutet, dass der Wolf auf dem Zielufer ist. Genauso steht  $z$  für die Ziege und  $k$  für den Kohlkopf.

Die gesamten möglichen Verteilungen von Wolf, Ziege und Kohl auf die beiden Flussufer können wir uns gerade als die Ecken eines Würfels vorstellen. Der Ausgangspunkt ist nun durch  $(0, 0, 0)$  gegeben, das Ziel ist  $(1, 1, 1)$ . Da der Mann immer nur eines der drei Dinge bewegen kann, kann sich immer nur *ein* Eintrag des Tripels ändern, d.h. erlaubte Züge laufen nur entlang der Kanten des Würfels.

Allerdings sind nicht alle Kanten erlaubt. Die Kante von  $(0, 0, 0)$  zu  $(1, 0, 0)$  entspricht gerade dem Zug, dass der Mann den Wolf vom Start- zum Zielufer bringt (die Wolfkoordinate ändert sich von 0 zu 1), Ziege und Kohlkopf aber auf dem Startufer zurückbleiben – in diesem Fall würde aber die Ziege den Kohlkopf fressen, d.h. diese Kante ist kein erlaubter Zug.

Wenn man alle Kanten so überprüft hat, kann man die Kanten markieren, die gültigen Zügen entsprechen. Wir erhalten das nebenstehende Bild und erkennen, dass es zwei (kürzeste) Wege von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 1, 1)$  gibt. Einer davon entspricht folgender Lösung: Bringe erst die Ziege hinüber, dann den Wolf, nimm die Ziege wieder mit zurück, bringe den Kohlkopf zum Wolf, bringe die Ziege wieder hinüber.  $\square$



**Aufgabe 14 Türme von Hanoi** Der französische Mathematiker Edouard Lucas erfand 1883 eine kleine Geschichte, die als die Geschichte der Türme von Hanoi bekannt wurde: Im Großen Tempel von Benares, der die Mitte der Welt markiert, ruht eine Messingplatte, in der drei Diamantnadeln befestigt sind. Bei der Erschaffung der Welt hat Gott vierundsechzig Scheiben aus purem Gold auf eine der Nadeln gesteckt, wobei die größte Scheibe auf der Messingplatte ruht, und die übrigen, immer kleiner werdend, eine auf der anderen. Das ist der Turm von Brahma. Tag und Nacht sind die Priester unablässig damit beschäftigt, den Gesetzen von Brahma folgend, die Scheiben zu versetzen. Dabei darf immer nur eine Scheibe auf einmal umgesetzt werden, und zwar so, dass eine kleinere Scheibe auf eine größere gelegt wird. Wenn alle vierundsechzig Scheiben von dem Stapel, auf die Gott sie bei der Erschaffung der Welt gesetzt hat, auf einen der anderen Plätze gebracht sind, werden der Turm samt dem Tempel und allen Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt wird untergehen.

Überlege dir, wie man drei Scheiben umsetzen kann! (*Tipp:* Kodiere dazu die Position der Scheiben durch ein Tripel, wobei die  $i$ -te Ziffer angibt, auf welcher Nadel sich die  $i$ -te Scheibe befindet. Zeichne einen Graphen, der zeigt, welche Tripel durch einen Spielzug verbunden sind.)

Nur wenden wir uns dem zweiten Typ zu: Finden eines Weges, der jede Kante genau einmal benutzt.

Zur Erinnerung: Ein Weg in einem Graph heißt *Eulerweg*, wenn er jede Kante genau einmal benutzt. Soll der Weg auch dort aufhören, wo er angefangen hat,

sprechen wir von einem *Eulerkreis*. Wir haben uns schon früher mit Eulerwegen und -kreisen beschäftigt und wir kennen auch ein Kriterium dafür, ob in einem Graphen ein Eulerkreis existiert:

*In einem Graphen existiert ein Eulerkreis genau dann, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.*

Nun versehen wir jede Kante in unserem Graphen noch mit einer Durchlaufrichtung, d.h. die Kanten werden Einbahnstraßen. Ein solcher Graph heißt *gerichtet*. Wir überlegen uns schnell, wie wir das obige Kriterium für solche gerichteten Graphen abändern müssen:

*In einem gerichteten Graphen existiert ein Eulerkreis genau dann, wenn in jedem Knoten genauso viele Kanten hineinführen wie aus ihm hinausführen.*

Wir wollen uns nun einem Problem zuwenden, dessen Studium auf gerichtete Graphen führt.

**Beispiel 15** Was ist das Besondere an der Ziffernfolge 0111010001? Laufen wir von links nach rechts entlang der Folge und betrachten immer drei nebeneinanderliegende Ziffern, so erhalten wir alle möglichen Tripel, die man mit den Ziffern 0 und 1 bilden kann – und jedes dieser Tripel *genau* einmal!

0111010001  
011  
111  
110  
101...

**Aufgabe 16** Finde eine Ziffernfolge, die alle möglichen Paare aus den Ziffern 0 und 1 enthält, und zwar jedes Paar genau einmal.

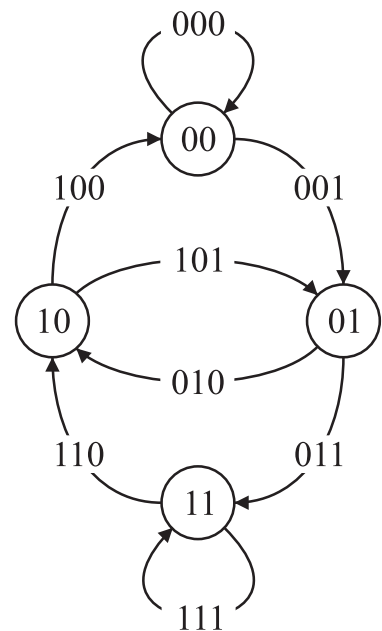
Fast natürlicherweise fragt man nun, ob es solche Ziffernfolgen auch für Quadrupel (Vier-Tupel) und Quintupel (Fünf-Tupel) aus 0 und 1 gibt. Und wie sieht es aus, wenn man z.B. eine Ziffernfolge haben möchte, die alle Quadrupel enthält, die man mit den Ziffern 0, 1 und 2 bilden kann?

Um solche Fragen zu klären, übersetzen wir das Problem wieder in einen Graphen. Wir überlegen uns dies am Beispiel der Tripel aus 0 und 1. Angenommen wir laufen von links nach rechts durch irgendeine Folge aus den Ziffern 0 und 1. Der Anfang sei 011. Wenn wir nun einen Schritt weiter nach rechts gehen, erhalten wir als zweites Tripel 110 oder 111, je nachdem ob unsere Folge nach der 011 mit 0 oder mit 1 weitergeht. Geht unsere Folge mit 0 weiter, erhalten wir also 110 und das dritte Tripel ist dann 100 oder 101, usw. Wir halten fest: Die letzten zwei Ziffern des aktuellen Tripels sind die ersten zwei Ziffern des nächsten Tripel.



Wir stellen dies nun übersichtlich in einem passenden Graphen dar. Dabei repräsentieren die Kreise die Knoten des Graphen. Startet man beispielsweise bei 00, so kann man dieses Paar etwa durch 1 fortsetzen und erhält das Tripel 001 (d.h. man nimmt den Weg 001.) Für das nächste Tripel ist dann der Anfang 01 usw.

Da wir jedes Tripel genau einmal erhalten wollen, müssen wir also einen Weg finden, der jede Kante genau einmal benutzt, d.h. wir suchen einen Eulerweg. Wir erhalten sogar einen Eulerkreis, denn wie man schnell prüft, führen aus jedem Knoten zwei Wege hinaus und zwei hinein.



Der Graph für Quadrupel ist schon etwas größer, aber man kann ihn noch bequem aufmalen.

**Aufgabe 17** Zeichne einen Graphen analog zu dem obigen Graphen, um eine Folge aus den Ziffern 0 und 1 zu konstruieren, die jedes mögliche Quadrupel genau einmal enthält.

**Aufgabe 18** Versuche analog zum Beispiel oben einen Graphen zu zeichnen, der dazu benutzt werden kann, alle Paare aus den Ziffern 0, 1 und 2 zu konstruieren. *Tipp:* Beginne, indem du drei Knoten 0, 1 und 2 aufzeichnest, die sich auf den Ecken eines gedachten gleichseitigen Dreiecks befinden. Jetzt musst du eine Kante für jedes mögliche Paar aus den Ziffern 0, 1 und 2 einzeichnen. Wie viele Kanten musst du zeichnen?

Wenn du Lust hast, kannst du noch weitere Graphen zeichnen, z.B. für Tripel aus den Ziffern 0, 1 und 2, und dann daraus Ziffernfolgen abzulesen. Jetzt stellt sich uns aber doch die Frage, ob das überhaupt *möglich* ist. Es wäre doch schade, wenn man mit viel Aufwand einen Graphen für Quintupel aus den Ziffern 0, 1, 2 und 3 zeichnet und dann feststellt, dass man überhaupt keinen Eulerweg finden kann!

**Aufgabe 19** Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Zeige durch graphentheoretische Überlegungen, dass es stets möglich ist, eine Folge aus den ersten  $k$  Ziffern zu bilden, die jedes  $n$ -Tupel, welches aus den ersten  $k$  Ziffern besteht, als (zusammenhängende) Teilfolge enthält.

*Lösung:* Nehmen wir an wir wollen  $n$ -Tupel aus den ersten  $k$  Ziffern bilden. Die Knoten in unserem Graphen sind dann  $(n - 1)$ -Tupel und es gibt  $k$  Wege, die von jedem Knoten wegführen, denn an jedes  $(n - 1)$ -Tupel können alle  $k$  Ziffern

angehängt werden. Kurz gesagt: Jedes  $(n - 1)$ -Tupel ist das Anfangsstück von genau  $k$  aller  $n$ -Tupeln.

Andererseits ist natürlich klar, dass jedes  $(n - 1)$ -Tupel auch das Endstück von genau  $k$  der  $n$ -Tupeln ist. Jede der  $k$  Ziffern kann ja entweder am Anfang oder am Ende angehängt werden. Das bedeutet: In unserem Graphen führen von jedem Knoten genauso viele Kanten weg wie zu ihm hinführen. Also gibt in jedem dieser Graphen stets einen Eulerkreis.  $\square$

Wie fast überall in der Mathematik können wir mit einer kleinen Verallgemeinerung aber schon wieder an unsere Grenzen stoßen. Wie sieht es z.B. aus, wenn wir nicht alle Anordnungen der Ziffern 0 und 1 nebeneinander erzeugen wollen, sondern alle möglichen Anordnungen dieser Ziffern in einem  $(2 \times 2)$ -Quadrat?

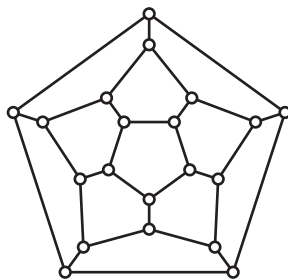
Dann müssten wir natürlich ein großes Quadrat (Wie groß müsste es sein?) mit folgender Eigenschaft benutzen: Die sämtlichen  $(2 \times 2)$ -Teilquadrate stellen gerade alle möglichen Anordnungen der Ziffern 0 und 1 in einem solchen Quadrat dar und keines der Teilquadrate findet sich doppelt.

Und was, wenn wir Würfel statt Quadrate nehmen? Oder Rechtecke. Sind eigentlich unsere Ziffernfolgen, mit denen wir begonnen haben, in irgendeiner Weise eindeutig bestimmt oder gibt es mehrere Möglichkeiten? Wenn ja, wie viele gibt es?

Zum Abschluss wollen wir uns nun noch kurz mit Wegen beschäftigen, die jeden Knoten genau einmal besuchen. Solche Wege heißen *Hamiltonwege*. Ein *Hamiltonkreis* ist ein Hamiltonweg, so dass der Anfangs- und Endknoten des Weges durch eine Kante verbunden sind. Oder: Jeder Knoten wird genau einmal besucht, bis auf den Startknoten: dieser wird am Anfang und am Ende der Tour besucht.

Um das Problem zu verdeutlichen zwei kleine Aufgaben:

**Aufgabe 20** Finde einen Hamiltonkreis in folgendem Graphen:



**Aufgabe 21** Finde einen Graphen, der einen Hamiltonweg, aber keinen Hamiltonkreis besitzt.

Ein berühmtes Problem, das sich als Frage nach einem Hamiltonweg formulieren lässt, ist das Springerproblem: Man finde eine Springertour auf dem Schachbrett,

so dass jedes Feld genau einmal betreten wird. Manchmal fordert man noch, dass die Springertour geschlossen ist, d.h. auf dem gleichen Feld endet, auf dem sie angefangen hat.

Man kann sich nun einen Graphen mit 64 Knoten denken, wobei jeder Knoten einem Feld auf dem Schachbrett entspricht. Zwischen zwei Knoten gibt es eine Kante, wenn die entsprechenden Felder durch einen Springerzug verbunden sind. Das wird natürlich ein sehr großer Graph! Die Aufgabe ist, in diesem Graphen einen Hamiltonweg oder einen Hamiltonkreis zu finden. Hier sehen wir übrigens auch, dass Visualisierungen nicht immer hilfreich sind.

Jetzt wäre es natürlich sehr schön, wenn man auch für die Existenz von Hamiltonwegen oder -kreisen ein Kriterium hätte, also einen Satz wie “Ein Graph besitzt einen Hamiltonkreis genau dann, wenn ...” Einen solchen Satz hat man leider bisher noch nicht gefunden. Unsere Sätze haben mehr die Form von “Wenn jeder Knoten genügend viele Kanten hat (sehr viele), dann gibt es einen Hamiltonweg.” Auch hier bleibt also noch einiges zu tun!

---

Anworten auf alle Fragen und Lösungen zu den Aufgaben, die offen geblieben sind, könnt ihr uns gern zuschicken. Am besten an

Andreas Nareike  
Eilenburger Straße 51  
04509 Delitzsch

oder per E-Mail an

`nadgr@gmx.de` oder `andreas.nareike@gmx.net`

Natürlich nehmen wir auch eure Fragen, Ideen und Anregungen zu diesen oder anderen Themen gern entgegen.

Nadine Große und Andreas Nareike