Das Dirichletsche Schubfachrinzip

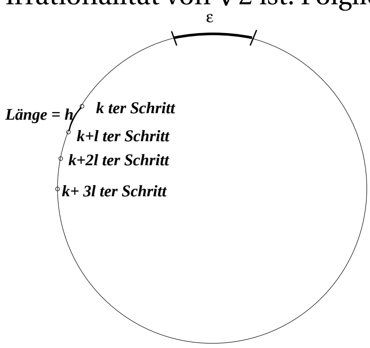
Axel Schüler*

Quelle: Sbornik Sadatch Moskowskich Matematitcheskich Olimpiad, Vorlesung von I. M. Gelfand, Moskau 1965.

1 Stetiges Schubfachprinzip

Aufgabe 1 Auf einem geraden Weg befinden sich jeweils im Abstand $\sqrt{2}$ kleine Lücken der Breite $\varepsilon > 0$. Jemand schreitet diesen Weg entlang mit konstanter Schrittweite 1.
Man zeige, dass er früher oder später in eine Lücke tritt, egal wie klein diese ist.

Beweis. Wir denken uns den Weg aufgewickelt auf einen Kreis mit dem Umfang $\sqrt{2}$. Dann sind alle Lücken an derselben Stelle.
(a) Der Mensch betritt keinen Punkt des Kreises zweimal. Beweis indirekt. Angenommen, der Mensch betritt nur endlich viele Punkte auf diesem Kreis, das heißt, sein Weg wird periodisch; etwa nach n Schritten hat er den Kreis k mal umrundet. Dann ist $n \cdot 1 = k\sqrt{2}$, was aber ein Widerspruch zur Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist. Folglich tritt er keine zweimal an den selben Fleck.



(b) Wir unterteilen den Kreis in $m-1$ Segmente, die alle eine Länge kleiner oder gleich als ε haben und beginnen dabei mit der oben genannten Lücke. Nach dem Schubfachprinzip gibt es k und l, so dass die Schritte k und $k+l$ *im selben* Segment landen, also einen Abstand haben, der gleich $h < \varepsilon$ ist. Dann haben aber auch die Schritte $k+l$ und $k+2l$ und $k+rl$ und $k+(r+1)l$ genau diesen Abstand h. Diese Punkte bilden also auf Kreis eine Punktfolge mit gleichem Abstand, die Schließlich in der Lücke landet.

■

Aufgabe 2 Man zeige, dass es eine Zweierpotenz gibt, die mit drei Neunen beginnt $2^n = 999\cdots$.

Beweis. Gesucht sind also Zahlen k und n mit $999 \cdot 10^k < 2^n < 10^{k+3}$. Logarithmiert man diese Ungleichung zur Basis 10, so hat man wegen der Monotonie der Logarithmusfunktion $k + \lg 999 < n \lg 2 < k+3$. Man erkennt hier die Analogie zur vorigen Aufgabe: Die Schrittlänge ist nun $\alpha = \lg 2$ und die Lücke, die zu treffen ist hat die Breite von $\varepsilon = 3 - \lg 999$. Wir zeigen die Irrationalität von α. Angenommen $\lg 2 = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden ganzen Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$. Dann gilt $10^{p/q} = 2$ bzw. $10^q = 2^p$. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung muss nun $q = 0$ sein, was aber der Annahme widerspricht. Folglich ist $\lg 2$ irrational und der Beweis der Existenz von k und n geht wie in Aufgabe 1. ■

Aufgabe 3 Ist a keine Zehnerpotenz und z eine beliebige natürliche Zahl. Dann gibt es eine Potenz a^n, die mit z beginnt.

*Mathematisches Institut, Universität Leipzig, 04009 Leipzig

Aufgabe 4 Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist gegeben durch die Anfangsbedingungen $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3}$ und die Rekursionsbeziehung

$$a_n = \frac{2}{3}\,a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass es ein $n > 0$ gibt mit $a_n > 0{,}99999$ gibt.

Lösung: Die charakteristische Gleichung der linearen Rekursion zweiter Ordnung $q^2 = \frac{2}{3}q - 1$ hat die komplexen Wurzeln

$$q_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{1}{3}\left(1 \pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Man beachte, dass $q_1 q_2 = 1$ und $q_2 = \overline{q_1}$, $q = q_1$, beide auf dem Einheitskreis liegen. Der Ansatz $a_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ führt auf $1 = A + B$ und $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(A+B) + \frac{1}{3}2\sqrt{2}\,\mathrm{i}(A-B)$ und somit auf $A = B = \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$a_n = \frac{1}{2}\left(q^n + \overline{q^n}\right) = \mathrm{Re}(q^n).$$

Ist $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ eine N-te Einheitswurzel, so ist $a_N = 1$ und die Behauptung ist gezeigt. Ist hingegen φ kein rationales Vielfaches vom 2π, etwa $\varphi = 2\pi\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ stets $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $0 < N\alpha - M < \varepsilon$ (rationale Zahlen sind dicht in $\mathbb{R}$ und approximieren die irrationalen). Somit gilt $2\pi M < N\varphi < 2\pi M + 2\pi\varepsilon$. Das liefert

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\varepsilon}\right) < \mathrm{Re}\, q^N < 1.$$

und beweist die Behauptung, da die linke Seite beliebig dicht an 1 heran kommt.

Aufgabe 5 Es sei $y = \alpha x$ eine Gerade g durch den Koordinatenursprung, wobei $\alpha \notin \mathbb{Q}$ irrational ist. Dann gibt es auf g keinen weiteren ganzzahligen Gitterpunkt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es aber einen Gitterpunkt, dessen Abstand zur Geraden kleiner als ε ist.

2 Unendliches Schubfachprinzip

> Verteilt man unendlich viele Gegenstände auf endlich viele Fächer, dann liegen in mindestenseinem Fach unendlich viele Gegenstände.

Aufgabe 6 Unter 11 Dezimalbrüchen gibt es zwei, die an unendlich vielen Nachkommastellen übereinstimmen.

Beweis. Für jede Kommastelle gibt es ein Paar (k, l), $1 \leq k < l \leq 11$, so dass z_k und z_l an der $n$ten Stelle übereinstimmen. Da es aber nur $\binom{11}{2}$ Paare (Schubfächer) von Zahlen (z_k, z_l) gibt, muss ein Paar unendlich oft auftreten. ■

Aufgabe 7 Die Gitterpunkte der Ebene seien mit m Farben gefärbt. Man zeige, dass es ein Gitter-Rechteck gibt, das einfarbige Ecken hat.

Beweis. Wir betrachten beliebige $m+1$ Gittergeraden g_i, alle parallel zur y-Achse. Auf jeder schneidenden parallelen Gittergerade zur x-Achse findet man dann zwei Punkte gleicher Farbe unter den $m+1$ Schnittpunkten. Da es aber nur $\binom{m+1}{2}$ Paare von Geraden (g_k, g_l) gibt, muss es zwei der g_i geben, etwa g_1 und g_2, die an unendlich vielen parallelen Schnitte zur x-Achse die gleiche Farbe haben. Da es aber nur m Farben gibt, muss sogar eine Farbe unendlich oft in beiden Schnitten vorkommen. ■