MatBoj — Wochenendseminar der LSGM, Oktober 2006

Aufgabe 1 (NASA) Die NASA schlug vor den Mars mit 2006 Siedlungen zu bevölkern. Dabei soll die einzige Möglichkeit, um von einer Siedlung zu einer anderen zu gelangen, ein Verbindungstunnel sein. Ein gelangweilter Bürokrat zeichnet auf einer Karte vom Mars zufällig N Tunnel ein, so dass es zwischen zwei Siedlungen nie mehr als einen Tunnels gibt. Was ist die kleinste Anzahl N, die garantiert, dass egal wo die N Tunnel liegen, es immer möglich ist, von einer beliebigen Siedlungen zu jeder anderen Siedlung zu reisen?

Aufgabe 2 (Hamiltonkreis) Wähle dir zwei beliebige natürliche Zahlen m und n und zeichne dann auf kariertes Papier ein Rechteck, das genau m Kästchen lang und n Kästchen breit ist. Diese Rechteck und sein Inneres mit den Gitterpunkten als Knoten und den Gitterlinien als Kanten betrachten wir als einen Graphen. Versuche für verschiedene m und n einen Hamiltonkreis zu finden. Wenn du das für verschiedene m und n probiert hast, wirst du vielleicht feststellen, dass es manchmal mehrere Möglichkeiten, manchmal aber auch gar keine gibt. Untersuche, wie das mit der Wahl von m und n zusammenhängt, und versuche, deine Vermutung zu beweisen.
Zusatz: Falls es für festes m und n einen Hamiltonkreis gibt, dann schließt dieser einen Teil des Rechtecks ein. Untersuche, wie sich die Anzahl der eingeschlossenen Kästchen verhält, wenn man im gleichen Rechteck einen anderen Hamiltonkreis betrachtet. Begründe deine Vermutung!

ende nein

Aufgabe 3 (17-Eck) Jede Ecke eines regulären 17-Ecks ist so grün, rot oder blau gefärbt, dass zwei benachbarte Ecken nie die gleiche Farbe haben. Zeige, dass es immer zwei sich nicht schneidende Diagonalen gibt, so dass zwei Dreiecke entstehen, deren Eckpunkte jeweils alle drei Farben tragen.
(Haben zwei Diagonalen nur einen Eckpunkt gemeinsam, nennen wir sie auch nicht schneidend.)

Aufgabe 4 (Senatoren) Im Senat gibt es 51 Senatoren. Nun soll der Senat in Ausschüsse unterteilt werden, wobei jeder Senator in einem Ausschuss sitzen soll. Allerdings hasst jeder Senator genau 3 andere Senatoren. Wenn Senator A Senator B hasst, muss jedoch nicht automatisch Senator B auch Senator A hassen. Finde die kleinste Zahl n von Ausschüssen, so dass man die Senatoren so auf die Ausschüsse verteilen kann, dass kein Senator mit einem anderen im Ausschuss ist, den er nicht leiden kann.

Aufgabe 5 (Ungleichung mit Binomialkoeffizienten) Man beweise, dass für alle $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{4^n}{n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

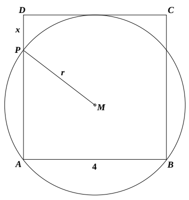
Aufgabe 6 (Ungleichung mit einem Parameter) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$\sqrt{2ax - x^2} > a - \sqrt{a^2 - x^2}$$

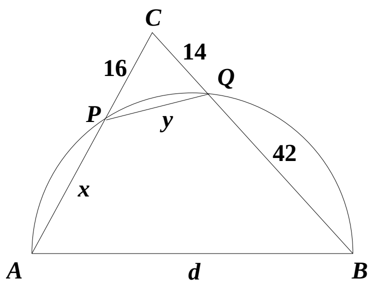
gilt.

Aufgabe 7 (Ungleichung für ein beliebiges Dreieck) Man beweise, dass in jedem Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und c und dem halben Umfang s die folgende Ungleichung gilt:

$$\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\beta}{2} + \cos^4 \frac{\gamma}{2} \leq \frac{s^3}{2abc}.$$



Aufgabe 8 (Kreis und Quadrat) Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ der Seitenlänge 4, welches einen Kreis in der angezeigten Weise berührt. Bestimme den Radius r des Kreises und die die Länge der Strecke $x = |PD|$.



Aufgabe 9 (Sekanten) In der nebenstehenden Figur sei $\overline{AB}$ ein Durchmesser. Ermittle seine Länge d sowie die Längen der Strecken x und y.

Aufgabe 10 (Dreieckskonstruktion) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C, $s_a = 6$ und $s_b = 8$. Dabei seien s_a und s_b die Längen der Seitenhalbierenden von $a = \overline{BC}$ bzw. $b = \overline{AC}$.
a) Beschreibe und begründe die Konstruktion.
b) Für welche Verhältnisse $q = s_a : s_b$ existiert ein solches Dreieck?

Aufgabe 11 (Oma Kruse) An der Wand im Wohnzimmer von Oma Kruse hängt eine Uhr. Die Wand ist genau $\frac{\sqrt{3}}{2}$-mal so hoch wie breit. Zum Frühstück schaut Oma Kruse auf die Uhr und stellt fest, dass der kleine Zeiger der Uhr genau in die linke obere Ecke der Wand zeigt. Drei Stunden Später, zum Mittagessen, zeigt der kleine Zeiger in die rechte obere Ecke. Zum Kaffee schließlich, nochmal zwei Stunden später, zeigt der kleine Zeige in die rechte untere Ecke.
Wann hat Oma Kruse gefrühstückt?