Aufgabensammlung zur vollständigen Induktion
Winterschule Colditz, Februar 2004

Jelena Djokić

1. Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

   (b) $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

   (c) $1+3+6+\ldots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

   (d) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   (e) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   (f) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

   (g) $2+7+14+\ldots+(n^2+2n-1) = \frac{n(2n^2+9n+1)}{6}$

   (h) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (b) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

   (c) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n(n+2)}{n+1}$

   (d) $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n(2n+3)}{n+1}$

   (e) $\frac{2}{2+1}+\frac{2^2}{2^2+1}+\ldots+\frac{2^n}{2^{2^{n-1}}+1} = 2-\frac{2^{n+1}}{2^{2^n}-1}$

   (f) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

   (g) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$

   (h) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

3. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweise man:

   (a) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1$

   (b) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!} = 1-\frac{1}{n!}$

4. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweise man:

   (a) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$, $n\geq 2$

   (b) $\left(1-\frac{4}{1}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n+1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}$, $n\in\mathbb{N}$

   (c) $\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$, $n\geq 2$

5. Man beweise, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:

   (a) $3|5^n+2^{n+1}$

   (b) $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$

   (c) $19|7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$

   (d) $17|6^{2n}+19^n-2^{n+1}$

   (e) $59|5^{n+2}+26\cdot 5^n+8^{2n+1}$

   (f) $11|30^n+4^n(3^n-2^n)-1$

   (g) $676|3^{3n+1}-26n-27$

   (h) $19|2^{2^{6n+2}}+3$

   (i) $9|n4^{n+1}-(n+1)\cdot 4^n+1$

   (j) $84|4^{2n}-3^{2n}-7$, $n\geq 1$

   (k) $11|5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$

6. Man beweise die folgenden Aussagen.

   (a) Alle Zahlen der Form $2^{2^n}+1$, $n\geq 2$ haben **7** als letzte Ziffer.

   (b) Alle Zahlen der Form $2^{4^n}-5$, $n\geq 1$ haben **1** als letzte Ziffer.

7. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweise man folgende Ungleichungen:

   (a) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$, $n\geq 2$

   (b) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, $n\geq 2$

   (c) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$

   (d) $2+2^2+2^3+\ldots 2^{2n}<n(2^{n+1}+1)$

8. Man beweise, dass die folgende Ungleichungen gelten:

   (a) $2^n>n^2$, $n\geq 5$

   (b) $n!>2^n$, $n\geq 4$

   (c) $n!<n^{n-1}$, $n\geq 3$

   (d) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n\geq 2$

(e) $(1+h)^n \geq 1+nh,\ n \in \mathbb{N},\ h \in \mathbb{R},\ h > -1$

(f) $\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1)} < \sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

(g) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1),\ n \geq 2$

(h) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n},\ n \geq 2$

(i) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n > \frac{n+1}{n-1}(2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}),\ n \geq 2$

9. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweise man:

   (a) Wenn $x_1 = 1, x_2 = 2$ und $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2})$ für alle $n \geq 3$, dann gilt $x_n = n!$ für alle n.

   (b) Wenn $x_0 = 2, x_1 = 5$ und $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$ für alle $n \geq 0$, dann gilt $x_n = 2^n + 3^n$ für alle n.

   (c) Wenn $a_0 = 2, a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_1 a_n - a_0 a_{n-1}$ für alle $n \geq 1$, dann gilt $a_n = 2^n + 1$ für alle $n \geq 0$.

   (d) Wenn $a_1 = 5,\ a_2 = 7$ und $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ für alle $n \geq 2$, dann gilt $a_n = 2n + 3$ für alle n.

   (e) Wenn $a_0 = 1, a_1 = 4$ und $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ für alle n, dann gilt $a_n = 2^n + n2^n$ für alle n.

10. Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweise man:

   (a) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   (b) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2} \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

   (c) $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\tan 2^n x},\ x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k},\ k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda \in \mathbb{Z}$

11. Man beweise, dass für alle $n \geq 2$ die Zahl $\cos\frac{\pi}{2^n}$ irrational ist.

12. Sei $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2xa_n}{a_n + x},\ n \geq 1, x > 0$. Man beweise, dass $a_{n+2} = \frac{2^{n+1}x}{2^{n+1}+x-1}$, für $n \geq 0$.

13. Sei $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Wir definieren $f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f$, ($n$ mal), als die n-fache Hintereinanderausführung (Komposition) von f mit sich selbst. So ist etwa $f^{\circ 2}(x) = f(f(x))$.
    Man beweise, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$f^{\circ n}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

14. In einer Ebene sind n Geraden gegeben. Man beweise, dass die Ebene durch diese Geraden in höchstens 2^n Teile aufgeteilt wird.

15. Man beweise, dass n Kreise eine Ebene in höchstens $n^2 - n + 2$ Teile teilen.

16. Man beweise: Wird die Ebene durch Geraden in Gebiete aufgeteilt, so kann man diese Gebiete derart rot oder blau färben, dass benachbarte Gebiete unterschiedlich gefärbt sind.