Induktion am Beispiel des Pascalschen Dreiecks

Alexander Reinhold

Colditz
10.02.2005

Einleitung — vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist neben dem direkten und indirekten Beweisverfahren eines der wichtigsten in der Mathematik. Eher beispielhaft soll hier auf die Vorgehensweise eingegangen werden.

Aufgabenstellung

Behauptung(n) soll für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten.

Vorgehensweise der vollständigen Induktion

- *Induktionsanfang - IA*: Die Behauptung(n) gilt für ein bestimmtes n_0 oder für mehrere $n \leq n_0$. Dieses ist durch Einsetzen und Nachrechnen leicht zu überprüfen. Für obiges Beispiel würde man also $n = 0$ überprüfen.
- *Induktionsvoraussetzung - IV*: Mit dem IA ist die Behauptung(n) zur Voraussetzung(n) für alle $n \leq n_0$ geworden ($n_0 = 0$).
- *Induktionsbehauptung - IB*: Man behauptet nun (mit der soeben geschaffenen Voraussetzung), dass die Behauptung auch stets für $n + 1$ gilt.
- *Induktionsschritt - IS*: Dies ist der Kern des Induktionsbeweises. Hier muss nun gezeigt werden, dass man aus der Induktionsvorraussetzung auch die Induktionsbehauptung folgern kann.
- *Induktionsschluss*: Dieser enthält die Schlussfolgerung und das Induktionsprinzip. Gilt eine Aussage für überprüfte $n \leq n_0$, welche wir als Voraussetzung benutzen können und können wir zeigen, dass aus der Voraussetzung(n) stets die Behauptung(n+1) folgt gilt die Behauptung(n) für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ab dem Induktionsanfang.

Bemerkungen

- Der Induktionsanfang ist stets frei wählbar, demnach kann beliebig auch bei $n = 4$, oder $n = -20$ angefangen werden, wenn es die Aufgabenstellung erfordert.
- Induktion ist auch für $n \in \mathbb{Z}$ möglich. Hier könnte man z.B. von $n = 0$ einmal aufwärts und einmal abwärts die vollständige Induktion anwenden. Eine Weitere Möglichkeit ist es eine Folge zu wählen, die alle Elemente von $\mathbb{Z}$ erfasst, wie $\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...\}$, die Elemente mit $a_k, k \in \mathbb{N}_0$ zu indizieren und über k die vollständige Induktion anzuwenden.
- Letzteres ist ein sicheres Mittel um sich z.B. in der Menge der geraden Zahlen, Primzahlen zu bewegen — oder aber auch für ganz andere Anwendungen, die nichts mit Zahlen zu tun haben.

Einleitung — Pascalsches Dreieck

Beispiel bis $n = 7$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Definition

$$\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung: Die Erweiterung für $k \in \mathbb{Z}$ erleichtert die Summationsgrenzen bei den Beweisen — auch eine Erweiterung für $n \in \mathbb{Z}$ ist möglich, aber hier nicht notwendig.

Eigenschaften/Anwendungen

- In der Stochastik als Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k}$
- Binomischer Satz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- Symmetrie: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Zeilensumme: $\sum_i \binom{n}{i} = 2^n$
- Alternierende Zeilensumme: $\sum_i (-1)^i \binom{n}{i} = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$
- Explizite Bildungsvorschrift: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Beweis — Symmetrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad ; n \in \mathbb{N}_0; k \in \mathbb{Z}$$

Induktionsanfang

$$n = 0: \qquad \begin{array}{l} \binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases} \\ \binom{0}{-k} = \begin{cases} 1 & ; k = 0 \\ 0 & ; k \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

Induktionsvoraussetzung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad ; n \in \mathbb{N}_0, n \leq n_0; k \in \mathbb{Z}$$

Induktionsschritt

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\ &= \binom{n}{n-k} + \binom{n}{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{n-k+1} \\ &= \binom{n+1}{(n+1)-k} \end{aligned}$$

Induktionsschluss

Da man aus der IV für $n \leq n_0$ stets folgern kann, dass sie auch für $n+1$ gilt, ist diese Aussage mit dem IA nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gültig.

Einleitung Summenzeichen

Das Summenzeichen $\sum$ ermöglicht eine kurze und exakte Notation von Reihen. Es ist vergleichbar mit einer 'for'-schleife aus der Informatik. Unterhalb des Summenzeichens schreibt man die Startbedingung für die Laufvariable z.B. $i = 0$, oberhalb das Ende z.B. n, es wird immer die Schrittweite 1 verwendet. Schreibt man einfach nur eine Laufvariable unter das Summenzeichen, so bedeutet dies, das alle ganzen Zahlen durchlaufen werden.

Beispiele

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Arbeiten mit Summenzeichen

- Ein- und Ausgliedern aus der Summe

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = 1 + \sum_{i=2}^{n} i = \sum_{i=1}^{m-1} i + \sum_{i=m}^{n} i$$

- Zusammenfassen bzw. Trennen

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) + \sum_{i=1}^{n} g(i) = \sum_{i=1}^{n} (f(i) + g(i))$$

- Indexverschiebung

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = (2-1) + (3-1) + (4-1) + \ldots + ((n+1)-1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)$$

Bemerkung: $i_{alt} = i_{neu} - 1$, daraus folgt $i_{neu} = i_{alt} + 1$. Damit ergibt sich für den Start aus $i_{alt,S} = 1 \Rightarrow i_{neu,S} = 2$ und für das Ende aus $i_{alt,E} = n \Rightarrow i_{neu,E} = n + 1$.

Aufgaben zum Summezeichen

Vereinfache!

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \sum_{i=n}^{2n} \binom{2n}{i}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} \\
&= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2^{2n} + \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{2n}{i-2} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i-1} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{2n}{i} + \binom{2n}{i-1} \right) + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n+1}
\end{aligned}$$

- $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i+1} - 1 + 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i+1} + 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Beweise zur vollständigen Induktion

Binomischer Satz

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\ a^{n-k}\ b^k$

$a, b \in \mathbb{R} \qquad n \in \mathbb{N}_0$

Zeilensumme

$\sum_i \binom{n}{i} = 2^n$

$n \in \mathbb{N}_0$

Erweiterte Definition

$\binom{n}{k} = \sum_i \binom{c}{i}\ \binom{n-c}{k-i}$

$n \in \mathbb{N}_0 \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad c \in \mathbb{N}_0 \qquad 0 \leq c \leq n$
Bemerkung: Induktion ist hier über n und c möglich. Beim Anwenden der IV und der rekursiven Definition der Binomielkoeffizienten ist die Anwendbarkeit zu Prüfen, da durch $0 \leq c \leq n$ nicht offensichtlich. Eventuell Sonderfälle betrachten.

Quadratsumme

$\sum_i \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$n \in \mathbb{N}_0$
Bemerkung: Beim Beweis kann aus der erweiterten Definition (siehe oben) geschlussfolgert werden. Interessant ist dann die Frage, ob es noch ein Beweis mit vollständiger Induktion ist.

Zusatz

$\sum_{k=0}^n k\ \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}$

$n \in \mathbb{N}_0$

Weitere Beweise

Die Schwierigkeit besteht manchmal nicht nur darin den Weg im Induktionsschritt zu finden, sondern auch sich eine geeignete Induktionsvariable zu suchen — Beispiele gibt es sicher viele, unter
http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/vi2/i2.html
findet man eines davon.