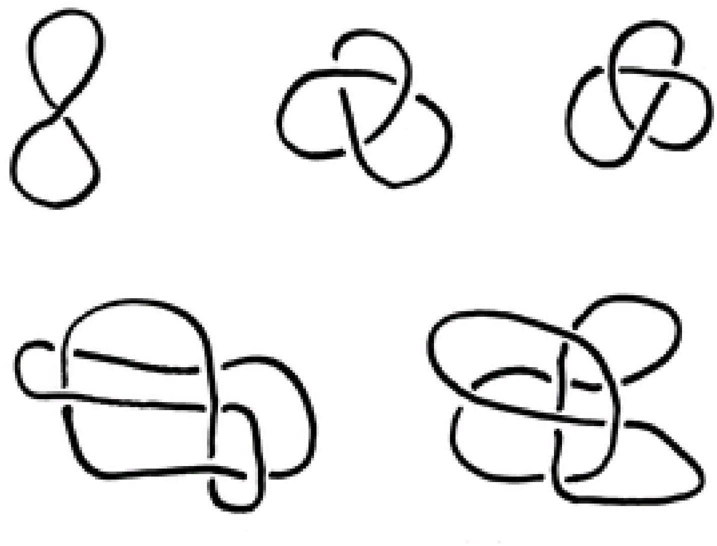
Knoten als mathematische Objekte

Ulrich Krähmer

Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig, Augustusplatz 10, 04109 Leipzig, Germany
E-mail: kraehmer@mathematik.uni-leipzig.de

1 Über diesen Text

Dieser Text ist die Ausarbeitung eines Vortrags, den ich im Februar 2003 vor mathematisch interessierten Schülern der Klassen 9-12 im Rahmen einer Winterschule gehalten habe.
Zur Einstimmung wurde am Vorabend des Vortrags das folgende Bild einiger einfacher Knoten ausgeteilt:



Offensichtlich sind der letzte und der erste davon Formen desselben Knotens, alle anderen aber paarweise verschieden. Ziel des Vortrags ist es, einige ohne Vorkenntnisse verständliche Begriffe und Techniken aus der mathematischen Knotentheorie zu entwickeln, mit denen sich diese Aussage präzise formulieren und beweisen läßt (letzteres dürfte ohne etwas Theorie kaum gelingen).
Vortrag und Ausarbeitung sind im wesentlichen eine Adaption der betreffenden Passagen des Lehrbuchs [Li] (s. Anmerkungen zur Literatur am Schluß).
Fürs Nachbereiten des Vortrags habe ich ein paar kleine Übungsaufgaben zusammengesucht und in den Text eingearbeitet. In ihnen werden bisweilen noch weitere Begriffe erklärt, man sollte sie daher zumindest nicht ungelesen überspringen.

2 Einleitung

Die Mathematik jenseits der Schule beschäftigt sich mit weit mehr Dingen als nur Gleichungssystemen, Dreiecken und dergleichen. Ein Beispiel von Objekten, die man zunächst vielleicht nicht als für Mathematiker interessant einstufen würde, sind Knoten. In Wahrheit ist die Knotentheorie als mathematische Disziplin sogar älter als die moderne Mathematik selbst.
Im 19. Jahrhundert hatte Lord Kelvin (der von der absoluten Temperaturskala) die Idee, daß Atome verknotete Röhrchen aus Äther seien, jenem mythischen Urstoff, der bis Einstein als Träger der Lichtwellen angenommen wurde. Diese These veranlaßte P.G. Tait, einen Mitarbeiter von Kelvin, sich abstrakt mit Knoten zu beschäftigen. Sein Hauptziel war die Erstellung einer Liste aller Knoten, wobei zwei Knoten als gleich gelten sollten, wenn sie ineinander umgeformt werden können (wir werden weiter unten noch eine mathematisch exakte Definition dieses Gleichheitsbegriffs aufstellen). Wie gesagt, die Mathematik gab es damals noch nicht so richtig, und so kam er auch mit heutigem Maßstab gemessen nicht besonders weit. Immerhin formulierte er eine Reihe wichtiger Aussagen über Knoten und erklärte anschaulich ihre Gültigkeit. Da er sie jedoch nicht streng beweisen konnte, gingen sie als Taitsche Vermutungen in die Geschichte der Knotentheorie ein.
Als Kelvins Atommodell ins Wanken kam, gerieten die Knoten etwas außer Mode. Bald aber begann die Mathematik, sich in ihrer heutigen Form zu entwickeln und mit ihr auch eine systematische Knotentheorie. In den folgenden Jahrzehnten wurde aus ihr eines der vielen Spezialgebiete der Mathematik, in denen sich außer einer handvoll Fachleute niemand auskannte und das für einen Vortrag wie diesen sicher eher ungeeignet war. Bemerkenswert ist, daß trotz der Entwicklung vieler komplizierter Methoden und Techniken die Taitschen Vermutungen lange Zeit unbeweisbar blieben.
Dies änderte sich erst vor rund zwanzig Jahren, als V. Jones eine neue Methode zur Unterscheidung von Knoten erfand, das nach ihm benannte Jones-Polynom. Diese stellte sich in vielerlei Hinsicht als sehr effektiv heraus, z.B. konnten eben mit ihrer Hilfe zumindest einige (soweit ich weiß aber nicht alle) der Taitschen Vermutungen bewiesen werden. In seiner ursprünglichen Form war das Jones-Polynom noch recht schwierig zu verstehen. Es wurde aber kurz nach seiner Entdeckung noch einmal von L. Kauffman ganz neu konstruiert, indem er ihm eine völlig unerwartete physikalische Interpretation gab. Diese ist leider immer noch relativ kompliziert. Daher habe ich beschlossen, nicht darauf einzugehen, obwohl es da Faszinierendes zu erzählen gäbe. Wer sich dafür interessiert, könnte es mit dem Buch [So] versuchen.
Angenehmerweise kann das Jones-Polynom in dieser Neuformulierung so einfach definiert werden, daß wir diese Definition selbst hier ohne Vorkenntnisse in 90 Minuten voll und ganz verstehen können sollten.
Zunächst wollen wir uns aber ein paar Grundlagen der Knotentheorie aneignen und fangen mal mit der fundamentalsten Frage an, die wir hier stellen können: Was überhaupt ist ein Knoten?

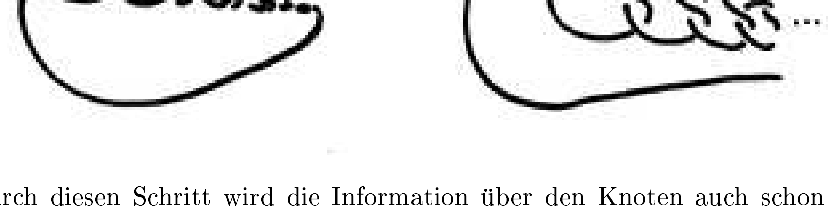
3 Definition und Notation

Wir wollen also den in der Mathematik üblichen Weg gehen und zuerst eine präzise Definition der Objekte aufstellen, die wir anschließend untersuchen.
Man mag durchaus darüber streiten, ob solch eine Überlegung notwendig ist. Ein Physiker oder Ingenieur würde vielleicht auf die Schnelle die anschauliche Vorstellung von einem Knoten irgendwie formalisieren und damit beginnen, über die "wirklichen" Probleme nachzudenken.
Oft gewinnt man aber bei der Suche nach einer klaren Definition schon Einsichten in die Struktur der Objekte, entwickelt eine gute Notation oder stößt gar erst auf interessante Probleme. Außerdem empfinde zumindest ich persönlich es einfach als angenehm, von Anfang an mit einer gewissen Klarheit zu arbeiten.
Wir werden eine möglichst elementare Definition des Knotenbegriffs geben, für die wir nur die folgenden vielleicht schon bekannten Begriffe benötigen: Sind P_1, P_2 zwei (verschiedene) Punkte im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, so bezeichnen wir die Strecke mit Anfangspunkt P_1 und Endpunkt P_2 durch $\overline{P_1P_2}$. Eine Vereinigung von endlich vielen Strecken $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_nP_1}$ (die letzte geht wieder zurück zum Ausgangspunkt!) nennen wir einen geschlossenen Polygonzug. Wir nennen einen solchen geschlossenen Polygonzug einfach, wenn er sich nirgends selbst schneidet, also jede seiner Strecken genau zwei andere Strecken schneidet und dies nur in ihren Endpunkten.

Definition 1 *Ein Knoten ist ein einfacher geschlossener Polygonzug im* $\mathbb{R}^3$.

Wir approximieren unsere glatte Vorstellung von einem Knoten also in der Theorie durch eine Zickzacklinie.

Ohne diese "Diskretisierung" wäre es schon viel schwieriger, eine Definition zu finden, die Gemeinheiten wie die folgenden Gebilde ausschließt:



Durch diesen Schritt wird die Information über den Knoten auch schon sehr aufs wesentliche reduziert. Wir können einen Knoten nun durch Angabe der

Punktfolge $(P_1, \ldots, P_n)$, d.h. der $3 \cdot n$ Koordinaten der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ beschreiben. Dies macht ihn zum Beispiel der Bearbeitung im Computer zugänglich. Man beachte, daß die Reihenfolge der Punkte eine wichtigere Rolle spielt als die Punkte selbst, unter einer Punktfolge verstehen wir daher immer eine Menge von Punkten in einer festgelegten Reihenfolge. Allerdings definieren die Punktfolgen $(P_1, \ldots, P_n)$ und $(P_n, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1})$ natürlich denselben Knoten.
Wir wollen später die Angabe von solchen Punkten vermeiden, die einfach nur eine Strecke des Knotens in zwei teilen und somit keine relevante Information liefern. Wir führen dafür den Begriff des Eckpunktes ein:

Definition 2 *Die Punkte der Punktfolge* $(P_1, \ldots, P_n)$ *heißen Eckpunkte des zugehörigen Knotens, wenn es keine echte Teilfolge gibt, die denselben Knoten (dieselbe Menge im* $\mathbb{R}^3$*) definiert.*

Wir kommen zum nächsten Problem, dem der Notation. Um mit den Objekten einer Theorie umgehen zu können, muß man sie irgendwie greifbar machen. Die Angabe eines Knotens durch eine Punktfolge ist zwar theoretisch sehr knapp, aber zumindest ich kann mir den Knoten dann nicht mehr wirklich vorstellen. Eine der Intuition nach naheliegende graphische Notation von Knoten ist das Knotendiagramm, in dem man den Knoten einfach auf eine Ebene im Raum projiziert, wobei obenliegende Strecken "durchgezeichnet" werden, so wie wir das oben in den Bildern schon getan haben.
Hierbei können aber Schwierigkeiten auftreten: Eine Linie kann durch eine andere komplett verdeckt werden, oder es können sich drei oder mehr Linien in einem Schnittpunkt im Diagramm treffen. In diesen Fällen läßt sich der Knoten im Raum nicht mehr aus dem Diagramm rekonstruieren. Zum Glück kann man beweisen, daß immer Projektionen existieren, in denen dies nicht passiert. Solche nennen wir in Zukunft zulässige Projektionen eines Knotens. Wir wollen dieses Thema aber nicht behandeln. Wer will, kann darüber in [Li] und [PS] nachlesen.
Im folgenden werden wir Knoten also immer durch ihre Diagramme angeben, die wir dann der Bequemlichkeit halber auch einfach wieder glatt zeichnen.
Zum Abschluß definieren wir noch eine Verallgemeinerung des Knotenbegriffs, den wir später brauchen werden:

Definition 3 *Eine Verschlingung ist eine Vereinigung endlich vieler disjunkter Knoten. Diese nennt man die Komponenten der Verschlingung.*

Ein bekanntes Beispiel ist die borromäische Verschlingung, die im Wappen des italienischen Adelsgeschlechts Borromeo vorkommt:

4 Äquivalenz

Da wir uns darauf geeinigt haben, was ein Knoten sein soll, wollen wir jetzt das in der Einleitung angesprochene Problem diskutieren, wann zwei Knoten "gleich" sind.

Die obigen Knoten sind formal nicht die gleichen Mengen im $\mathbb{R}^3$, die Diagramme sehen auch unterschiedlich aus. Trotzdem ist klar, daß wir sie irgendwie als zwei unterschiedliche Formen desselben Knotens interpretieren wollen.
Für solche Fälle haben sich die Mathematiker den Begriff der Äquivalenzrelation ausgedacht. Man studiert irgendwelche Eigenschaften irgendwelcher mathematischer Objekte und stellt fest, daß bestimmte dieser Objekte im Rahmen der Untersuchung als gleich behandelt werden können, obwohl sie es ihrer ursprünglichen Definition nach nicht sind. Dann nennt man diese äquivalent und spricht davon, daß man auf der Menge der untersuchten Objekte eine Äquivalenzrelation definiert hat.
Wir definieren nun eine solche Äquivalenzrelation auf der Menge der Knoten, die unsere Intuition von den "gleichen" Knoten mathematisch präzise umsetzt.

Definition 4 *Ein Knoten K' heißt elementare Deformation des Knotens K, falls es eine Punktfolge $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ gibt, so daß*

1. *$(P_1, \ldots, P_n)$ eine Folge von Eckpunkten für einen der beiden Knoten und $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ eine Folge von Eckpunkten für den anderen ist und*
2. *das von P_0, P_1, P_n aufgespannte Dreieck den durch $(P_1, \ldots, P_n)$ gegebenen Knoten nur in der Strecke $\overline{P_1 P_n}$ schneidet.*

Zwei Knoten K, K' heißen äquivalent (Notation $K \sim K'$), falls es eine endliche Folge $K_1, \ldots, K_n$ von Knoten gibt mit $K_1 = K, K_n = K'$, in der jeder Knoten eine elementare Deformation des Vorgängers ist.

In analoger Weise definiert man den Begriff äquivalenter Verschlingungen.
Von nun an wollen wir äquivalente Knoten nicht mehr unterscheiden. Im Jargon gesprochen: Wir betrachten nicht mehr Knoten, sondern ganze Äquivalenzklassen von Knoten, wobei die Äquivalenzklasse eines Knotens die Menge aller Knoten ist, die äquivalent zu ihm sind.
Zeit für die ersten Übungsaufgaben. Sie behandeln den Begriff des trivialen Knotens und der trivialen Verschlingung. In ihnen soll auch auf einen in der Mathematik üblichen Drang zur Knappheit hingewiesen werden: Obwohl nicht explizit gefordert, besteht eine Lösung der Aufgaben nicht in einer Antwort auf die gestellte Frage, sondern in einem Beweis der Antwort. Und wenn die Aufgabe

die Form einer Feststellung anstatt einer Frage besitzt, so besteht die Aufgabe in deren Beweis.

Übung 1 *Alle Knoten mit drei Eckpunkten sind äquivalent, also verschiedene Formen desselben Knotens. Diesen nennt man den trivialen Knoten.*

Übung 2 *Ist jeder Knoten mit vier Eckpunkten trivial, d.h. äquivalent zu dem Knoten der vorhergehenden Übungsaufgabe?*

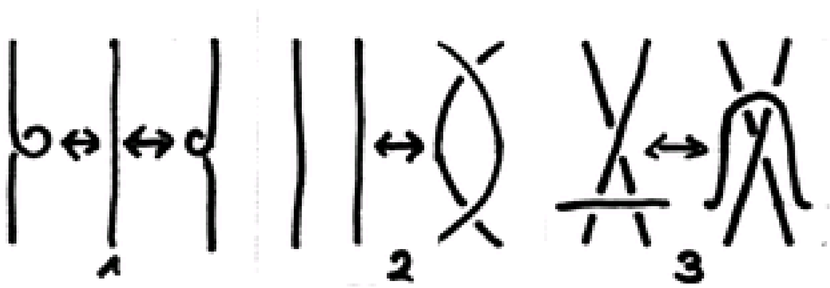
Übung 3 *Eine Verschlingung soll sinnvollerweise trivial heißen, wenn man ihre Komponenten ohne rohe Gewalt trennen kann und jede dann unverknotet ist. Formuliere eine präzise Definition der Trivialität von Verschlingungen.*

5 Klassifikation und Invarianten

Der Begriff der Äquivalenz führt uns direkt zu der zentralen Aufgabe der Knotentheorie: Wie kann man Knoten unterscheiden, also entscheiden, ob zwei gegebene Knotendiagramme Diagramme desselben Knotens sind oder nicht? Wie kann man insbesondere zeigen, ob ein Knoten trivial, also auflösbar ist? Die Lösung dieses Problems würde man eine Klassifikation der Knoten bis auf Äquivalenz nennen. Wenn ich richtig informiert bin, gibt es solch eine Klassifikation bis heute nicht in einer praxistauglichen Form, sondern nur in einer gewissen theoretischen Version. Wir werden aber zwei Methoden kennenlernen, mit denen man viele Knoten relativ unkompliziert unterscheiden kann (aber halt leider nicht alle).
Zunächst übersetzen wir die Knotenäquivalenz in die Sprache der Knotendiagramme.

Definition 5 *Wir nennen zwei Knotendiagramme äquivalent, wenn sie Diagramme äquivalenter Knoten sind.*

Es sollte klar sein, daß die folgenden Umformungen ein Knotendiagramm in ein äquivalentes Diagramm überführen:

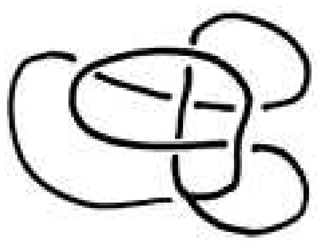


Man nennt sie die Reidemeisterbewegungen. Schon etwas weniger offensichtlich ist, daß auch die Umkehrung gilt:

Satz 1 *Zwei Knotendiagramme sind genau dann äquivalent, wenn sie sich durch eine endliche Folge von Reidemeisterbewegungen ineinander umformen lassen.*

Um dies zu beweisen, muß man nur prüfen, daß eine elementare Deformation eines Knotens in beliebigen zulässigen Projektionen durch eine Folge von Reidemeisterbewegungen ausgedrückt werden kann. Dies ist etwas umständlich, aber nicht wirklich schwer, wir verweisen daher erneut auf [Li].
Wir wissen also, daß wir zwei Diagramme desselben Knotens vorliegen haben, wenn wir eine Folge von Reidemeisterbewegungen finden, die aus dem einen das andere macht. Finden wir aber keine solche Folge, so sagt uns das noch immer wenig, denn wir können ja nicht sicher sein, daß es sie nicht doch gibt. Es wird auch gar nicht so leicht, bei komplexeren Diagrammen die richtigen Reidemeisterbewegungen zu sehen. Die folgende Aufgabe zeigt dies in noch milder Form, in Übung 6 wird es schon schwerer werden.

Übung 4 *Finde eine Folge von Reidemeisterbewegungen, die das folgende Diagramm des trivialen Knotens in sein Standarddiagramm überführt:*



Wieviele Reidemeisterbewegungen braucht man dafür mindestens?

Um die Nichtäquivalenz zweier Knotendiagramme zu beweisen, verwendet man meist sogenannte Invarianten. Eine Invariante weist einem Knotendiagramm eine Eigenschaft, eine Zahl oder dergleichen zu, das man dann den Wert der Invariante nennt. Dies soll auf solch clevere Weise geschehen, daß verschiedene Diagramme desselben Knotens immer denselben Wert der Invariante erhalten müssen und man dies auch beweisen kann. Der Wert der Invariante ist folglich eine Eigenschaft des Knotens und nicht des speziellen Diagramms. Wenn man uns nun zwei beliebige Knotendiagramme vorlegt, wir den Wert der Invarianten bestimmen und er nicht bei beiden der gleiche ist, so können diese dann nicht mehr zu demselben Knoten gehören.
Das Problem mit den Invarianten ist dann das umgekehrte: Wenn zwei Diagramme denselben Wert der Invarianten liefern, müssen sie noch lange nicht Diagramme desselben Knotens sein.
Die Idee der Invarianten wird auf alle Fälle klar werden, wenn wir im folgenden zwei Beispiele kennenlernen: Zuerst die Färbbarkeit und dann das schon angekündigte Jones-Polynom.

6 Färbbarkeit

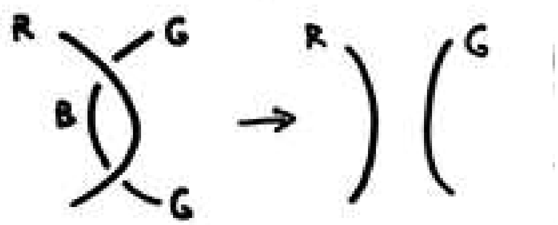
Die Färbbarkeit ist eine besonders leicht zu definierende Invariante von Knoten.

Definition 6 *Man nennt ein Knotendiagramm färbbar, wenn es (d.h. seine Bögen) so mit drei unterschiedlichen Farben gezeichnet werden kann, daß mindestens zwei Farben wirklich verwendet werden und an einer Kreuzung, an der zwei Farben vorkommen, alle drei Farben vorkommen.*

Die Färbbarkeit ist in der Tat eine Invariante:

Satz 2 *Ist ein Diagramm eines Knotens färbbar, so ist jedes seiner Diagramme färbbar.*

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß aus der Färbbarkeit eines Knotendiagramms die Färbbarkeit eines beliebigen aus diesem durch eine Reidemeisterbewegung entstandenen Diagramms folgt. Durch wiederholtes Anwenden dieser Aussage ergibt sich, daß jedes durch eine endliche Folge von Reidemeisterbewegungen entstandene Diagramm ebenfalls färbbar ist. Die Aussage des Satzes folgt dann aus Satz 1.
Wir behandeln exemplarisch die Reidemeisterbewegung 2, die anderen kann man selbst als Übungsaufgabe nachprüfen.
Wir betrachten nur den durch die Reidemeisterbewegung veränderten Teil des Diagramms, zunächst in der "auflösenden" Richtung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden. Wenn in dem betrachteten Teil vor der Reidemeisterbewegung alle drei Farben vorkamen, färben wir nach der Bewegung wie folgt:



Hierbei stehen R, G, B für die drei Farben, z.B. Rot, Gelb, Blau.
An den Verbindungspunkten zum Rest des Knotendiagramms haben sich die Farben nicht geändert, und es kommen allein schon im betrachteten Teil immer noch zwei Farben vor. Daraus folgt, daß das neue Diagramm immer noch den zwei Regeln aus der Definition der Färbbarkeit genügt.
War der betrachtete Teil vor der Bewegung einfarbig, so kann man diese Farbe beibehalten. An den Verbindungspunkten bleibt wieder alles gleich. Ferner muß in einem anderen Teil des Diagramms schon vorher eine weitere Farbe vorgekommen sein. Also erhalten wir auch hier eine zulässige Färbung des neuen Diagramms.
Für die umgekehrte Reidemeisterbewegung dreht sich alles einfach um. Hatten die beiden Stränge vorher die gleiche Farbe, behalten wir diese bei, waren sie unterschiedlich gefärbt, färben wir nach der Reidemeisterbewegung wie im linken Teil der Abbildung den neu entstehenden mittleren Abschnitt mit der dritten Farbe, die noch nicht vorkam. □

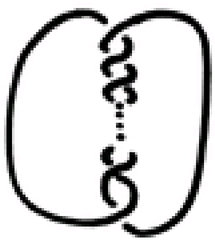
Da die Färbbarkeit eine Invariante ist, definieren wir:

Definition 7 *Ein Knoten heißt färbbar, wenn seine Diagramme färbbar sind.*

Der triviale Knoten ist nicht färbbar. Die beiden einfachsten nichttrivialen Knoten hingegen sind es:

Also liefert die Färbbarkeit einen Beweis für die anschaulich offensichtliche Nichttrivialität dieser Knoten, die man den rechts- und linkshändigen Kleeblattknoten nennt. Man kann aber nicht entscheiden, ob die beiden Kleeblattknoten zueinander äquivalent sind oder nicht. Auch gibt es nichttriviale Knoten, die nicht färbbar sind. Beispiele hierfür liefert die nächste Übungsaufgabe:

Übung 5 *Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Dann nennt man den folgenden Knoten mit n Überkreuzungen den $(2, n)$-Torusknoten:*



Vertauscht man bei allen Überkreuzungen obere und untere Linie, so nennt man den entstehenden Knoten den $(2, -n)$-Torusknoten. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ ist dieser Knoten färbbar?

Für $n \neq \pm 1$ sind die $(2, n)$-Torusknoten nichttrivial und paarweise nichtäquivalent. Für einen Beweis dieser Behauptung braucht man zwei Zutaten: Das Jones-Polynom, das wir im nächsten Abschnitt kennenlernen, und die Beweistechnik der vollständigen Induktion. Wer das Prinzip der vollständigen Induktion kennt, kann diesen Beweis als die ultimative Übungsaufgabe am Ende des Vortrags dazudenken.
Die einfachsten Torusknoten kennen wir übrigens schon:

Übung 6 *Der $(2, \pm 3)$-Torusknoten ist äquivalent zum rechts- bzw. linkshändigen Kleeblattknoten.*

Der Grund für die Bezeichnung "Torusknoten" ist der folgende: Einen Torus, also diejenige zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$, die die Oberfläche eines Fahrradschlauchs bildet, kann man sich nach geeigneter Skalierung als ein Quadrat vorstellen, dessen gegenüberliegende Kanten jeweils verklebt wurden. Man zeichne nun in diesem Quadrat eine gerade Linie mit Steigung $n/2$, wobei man beim Verlassen des Quadrates immer wieder an der gegenüberliegenden Seite neu ansetzt. Da die Steigung rational ist, kommt man irgendwann wieder beim Ausgangspunkt an (ist jetzt nicht so wichtig, wenn man das nicht sieht). Nach dem

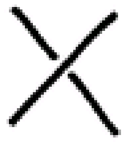
Zusammenkleben zum Torus wird sich dann eine geschlossene Kurve auf dem Torus ergeben. Diese Linie ist der $(2,n)$-Torusknoten. Analog definiert man den (m,n)-Torusknoten für beliebige teilerfremde ganze Zahlen m,n als den Knoten, den man aus der Linie mit Steigung n/m erhält.
Die Teilerfremdheit sorgt hier dafür, daß der Bruch n/m vollständig gekürzt ist. Für $m = 2$ bedeutet die Teilerfremdheit von m,n, daß n eine ungerade Zahl sein muß, wie wir es in der ersten Definition des $(2,n)$-Torusknotens in Aufgabe 5 ja auch gefordert hatten.
Für gerade n ist das Diagramm in Aufgabe 5 auch gar kein Knoten, sondern eine Verschlingung mit zwei Komponenten. Wir hätten die Aufgabe aber auch in diesem Fall stellen können, denn man kann für Verschlingungen die Färbbarkeit genauso wie für Knoten definieren und erhält eine Invariante von Verschlingungen. Ein paar Unterschiede gibt es aber doch. Die folgende Aufgabe zeigt, daß man z.B. für Knoten in der Definition der Färbbarkeit auch fordern kann, daß alle drei Farben vorkommen müssen, während dies für Verschlingungen nicht geht.

Übung 7 *In einer Färbung eines Diagramms eines färbbaren Knotens kommen stets alle drei Farben vor (nicht nur zwei, wie in der Definition gefordert). Für Verschlingungen ist dies nicht richtig.*

Die Färbbarkeit mit drei Farben ist übrigens nur der einfachste Fall einer viel allgemeineren Theorie. In [Li] wird erklärt, wie man mit mehr als nur drei Farben oder ganz abstrakt mit den Elementen einer Gruppe färbt (für diejenigen, die diesen Begriff kennen). Man spricht dann auch von Etikettierungen statt von Färbungen.

7 Das Jones-Polynom

Wir kommen zum eigentlichen Höhepunkt, dem Jones-Polynom. Wie der Name schon sagt, ist der Wert dieser Invariante ein Polynom. Wir werden also ein Rezept aufstellen, nach dem man zu einem gegebenen Knotendiagramm ein bestimmtes Polynom bastelt, das wie die Färbbarkeit nur vom Knoten und nicht vom Diagramm abhängt.
Die Idee, Knoten Polynome zuzuweisen, ist relativ alt. Die erste Polynominvariante von Knoten, das Alexander-Polynom, stammt aus dem Jahre 1928. Im Laufe der Zeit wurden noch verschiedene Polynominvarianten erklügelt, doch wie schon erwähnt war z.B. keine davon stark genug, um die Taitschen Vermutungen zu beweisen. Das Jones-Polynom hingegen erwies sich schnell als sehr mächtiges Werkzeug. In der Literatur findet man mehr zur Geschichte und Bedeutung des Jones-Polynoms, wir wollen uns lieber um seine Definition kümmern und dies wie ebenfalls schon gesagt in der von Kauffman entwickelten Form.
Das Jones-Polynom ist wie die Färbbarkeit eine Invariante von Verschlingungen, nicht nur von Knoten. Genauer gesagt: von orientierten Verschlingungen, doch dazu kommen wir gleich.
Sei also ein Diagramm D einer Verschlingung vorgelegt. Wir betrachten eine beliebige Kreuzung im Diagramm und drehen unser Diagramm so, daß die Kreuzung wie folgt aussieht:



Nun kann man diese Kreuzung auf zwei Arten auflösen:

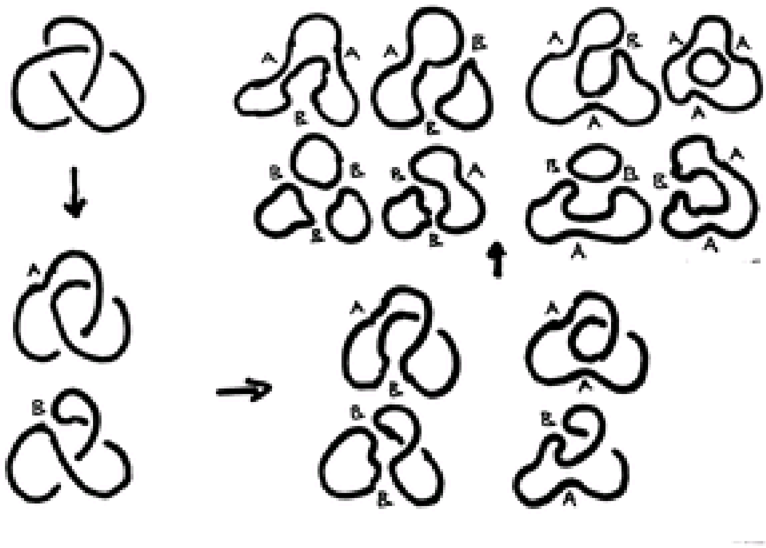
Wir wählen eine der beiden aus und starten mit dem so erhaltenen Diagramm von vorne, nehmen uns also die nächste Kreuzung vor, drehen und wählen wieder eine Auflösung. So machen wir weiter, bis alle Kreuzungen aufgelöst sind und wir ein Diagramm S einer trivialen Verschlingung erhalten. Dieses nennen wir einen Zustand von D (die Bezeichnung rührt von der in der Einleitung angesprochenen physikalischen Interpretation für das Jones-Polynom her).
Zu diesem Zustand S definieren wir eine Funktion f_S einer Unbestimmten x durch

$$f_S(x) := x^{a-b} \cdot (-x^2 - x^{-2})^{|S|-1},$$

wobei $|S|$ die Anzahl der Komponenten von S und a bzw. b die Anzahl der Auflösungen vom Typ A bzw. B ist, die von D zu S geführt haben. Die Funktion f_S ist ein Laurent-Polynom, d.h. ein Polynom, in dem die Unbestimmte x nicht nur in positiven, sondern auch in negativen Potenzen vorkommt.
Da es an jeder Kreuzung zwei mögliche Auflösungen gibt, gibt es zu einem Ausgangsdiagramm D mit n Kreuzungen 2^n verschiedene Zustände. Die Summe der zugehörigen 2^n Funktionen f_S ist wieder eine Funktion einer Unbestimmten, die wir die Kauffman-Klammer $\langle D \rangle$ nennen. Vornehm hingeschrieben:

$$\langle D \rangle := \sum_S f_S.$$

Ein Beispiel kann sicher nicht schaden. Im folgenden Bild zerlegen wir den rechtshändigen Kleeblattknoten sukzessive in seine $2^3 = 8$ Zustände:



Die zugehörigen Funktionen f_S sind in der Anordnung wie oben rechts im Bild

$$x, \quad -x - x^{-3}, \quad x, \quad -x^4 - 1,$$
$$x + 2 \cdot x^{-3} + x^{-7}, \quad -x - x^{-3}, \quad -x - x^{-3}, \quad x.$$

Die Kauffman-Klammer errechnet man damit zu

$$\langle D \rangle(x) = -x^5 - x^{-3} + x^{-7}.$$

Wir sind leider noch nicht fertig, denn die Kauffman-Klammer ist noch *keine* Invariante des Diagramms. Sie ändert sich unter Reidemeisterbewegungen vom Typ 1 (unter den andern ist sie immerhin schon invariant). Dieses Problem läßt sich jedoch beheben.
Dazu gibt man jeder Komponente des Ausgangsdiagramms D eine (frei wählbare) Orientierung, d.h. man einigt sich auf eine RIchtung, in der man die Knotenlinien der Komponenten durchlaufen will. Im Diagramm stellt man dies meist dadurch dar, daß man kleine Pfeilchen auf die Bögen setzt.
Dann ordnet man jeder Kreuzung i im Diagramm D ein Vorzeichen $\varepsilon_i = \pm 1$ gemäß der folgenden Unterscheidung der Kreuzungen zu:

Sei $w(D)$ die Summe aller ε_i,

$$w(D) := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i.$$

Übung 8 *Die Zahl $w(D)$ ändert sich nicht, wenn man die Orientierung von D umkehrt (also jede Komponente genau andersrum durchläuft).*

Aus dieser Aufgabe folgt insbesondere, daß $w(D)$ im Fall von Knoten nicht von der Wahl der Orientierung abhängt. Bei Verschlingungen geht diese aber im allgemeinen mit ein.
Mithilfe der Zahl $w(D)$ können wir die Nichtinvarianz von $\langle D\rangle$ korrigieren, indem wir aus der Kauffman-Klammer das Kauffman-Polynom

$$P_K(x) := (-x)^{-3\cdot w(D)} \cdot \langle D\rangle(x)$$

bilden.

Satz 3 *Das Polynom P_K ist eine Invariante der orientierten Verschlingung D. Falls D ein Knoten ist, hängt P_K nicht von der Wahl der Orientierung ab.*

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Bemerkung nach der letzten Übungsaufgabe. Die Hauptaussage beweist man genau wie die entsprechende Aussage über die Färbbarkeit - man muß alle Reidemeisterbewegungen abarbeiten und bei jeder prüfen, daß sie das Polynom P_K nicht ändert. Dies stellt inzwischen wohl kein Problem mehr dar, so daß wir den vollen Beweis ganz keck als Aufgabe zurücklassen. Wer noch unsicher ist, findet einen Fall in [PS] erklärt.

Übung 9 *Beweise Satz 3.*

Bis auf eine kleine Vereinfachung ist P_K schon das verheißene Jones-Polynom.

Satz 4 *Besitzt D eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Komponenten, so ist jeder Exponent in P_K von der Form $4\cdot k$ bzw. $4\cdot k+2$ für ein $k\in\mathbb{Z}$.*

Beweis gibts in [PS]. Insbesondere schleppen wir also für Knoten in jedem Exponenten von P_K einen Faktor 4 mit. Diesen Überfluß sparen wir natürlich ein und erhalten dann endlich das Jones-Polynom. Um ganz genau zu sein, im historischen Jones-Polynom sind dann noch die Rollen von x und x^{-1} vertauscht (zur Erinnerung: Jones selbst hatte das Polynom ganz anders konstruiert). Kurzum:

Definition 8 *Das Jones-Polynom eines Knotens ist $P_J(x) := P_K(x^{-1/4})$.*

Im Nachhinein doch gar nicht so schwer. Man kann über das Jones-Polynom noch fast beliebig viel erzählen, aber wir wollens mal hierbei belassen und zum Ende kommen. Ich hoffe, die Grundideen sind klar geworden, für Nachfragen stehe ich natürlich jederzeit zur Verfügung.
Zwei letzte Aufgaben gibts aber noch. In ihnen geht es um den Begriff des dualen Knotens:

Definition 9 *Das Spiegelbild eines Knotens K nennt man den zu diesem Knoten dualen Knoten K^*.*

Nimm also ein Diagramm eines Knotens und schau es in einem Spiegel an, dann siehst Du ein Diagramm des dualen Knotens. In diesem Sinne sind die beiden Kleeblattknoten (links- und rechtshändiger) dual zueinander.

Übung 10 *Sind P_J, P_J^* die Jones-Polynome eines Knotens und seines dualen Knotens, so gilt $P_J(x) = P_J^*(x^{-1})$.*

Übung 11 *Die beiden Kleeblattknoten sind nicht äquivalent.*

8 Literatur

Inzwischen ist die Literatur zur Knotentheorie sehr umfangreich geworden und reicht von Gutenachtgeschichten bis zu auch für gestandene Mathematiker nur mühsam lesbaren Büchern.
Ich habe zur Vorbereitung dieses Vortrags vor allem das Lehrbuch "Knotentheorie für Einsteiger" von Ch. Livingston (Vieweg Verlag) verwendet, das ich im Text mit [Li] zitiere.
Nebenher habe ich auch in "Knots, Links, Braids and 3-Manifolds" von V.V. Prasolov und A.B. Sossinsky gelesen (AMS, [PS] im Text), in dem das Jones-Polynom etwas genauer behandelt wird.
Diese beiden Bücher sind für Mathematikstudenten gedacht, setzen allerdings keine spezifischen Vorkenntnisse voraus.
Sossinsky hat auch für Nicht-Mathematiker ein Buch geschrieben: "Mathematik der Knoten" (deutsch bei rororo, [So] im Text). Dort geht er auch auf die Bezüge zwischen Knotentheorie und Physik ein. Ich habe zwar nicht wirklich reingeschaut, es wird aber sicher gut sein und ist vor allem nicht so teuer wie ein richtiges Fachbuch.
In allen drei Büchern findet man dann richtig ausführliche Literaturverweise.