Lösen von Gleichungen mittels Ungleichungen

2. März 2010

Die Aufgaben sind mit Schwierigkeitsstufen leicht, mittel, schwer markiert.

Aufgabe 1 (leicht) Ermittle alle nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c, für die gilt

$$a^6 + 2b^3 + 3c^2 = 6abc, \qquad a + b + c = 14.$$

Lösung: Da wir 3 Summanden links und 3 Faktoren rechts haben, versuchen wir die Ungleichung vom arithmetischen-geometrischen Mittel anzuwenden auf die Zahlen $a^6, b^3, b^3, c^2, c^2, c^2$. Das liefert:

$$\frac{1}{6}\left(a^6 + 2b^3 + 3c^2\right) \geq \sqrt[6]{a^6 b^3 c^6} = abc \Leftrightarrow a^6 + 2b^3 + 3c^2 \geq 6abc.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle 6 Zahlen gleich sind, also wenn gilt $a^6 = b^3 = c^2$ bzw. $b = a^2$ und $c = a^3$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so hat man $a + a^2 + a^3 = 14$. Man erkennt sofort eine Lösung, nämlich $a = 2$, denn $2 + 4 + 8 = 14$. Andererseits ist dies die einzige Lösung mit $a \geq 0$, denn die Funktion $f(a) = a + a^2 + a^3$ ist streng monoton wachsend und nimmt daher jeden Wert höchstens einmal an.

Aufgabe 2 (mittel) Ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, für die gilt:

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 14x - 8y + 26 = 0.$$

Lösung: Eine geschlossene Behandlung dieses Aufgabentyps geschieht in der Regel am Ende des 2. Semetser einer „Lineare-Algebra-Vorlesung“ im Abschnitt Quadriken/ quadratische Formen.
Die Grundidee ist, durch quadratische Ergänzung zu vereinfachen. In der Tat ist die linke Seite gleich $(2x - y - 1)^2 + (x + y - 5)^2$, welche nur gleich Null ist, wenn beide Terme verschwinden. Also ist die Gleichung zu zwei linearen Gleichungen äquivalent:

$$2x - y - 1 = 0, \qquad x + y - 5 = 0.$$

Einzige Lösung ist $x = 2$, $y = 3$.

Aufgabe 3 (leicht MO491334) Man ermittle alle positiven reellen Zahlen a und b, für die gilt

$$\frac{2a + 3b + 4}{1 + \sqrt{a}} = 4\sqrt{b}.$$

Lösung:
Die Gleichung ist äquivalent zu

$$2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-2)^2=0,$$

was sofort $a=b=4$ liefert.

Aufgabe 4 (mittel) Für welche reellen Zahlen $x\geq 0$ gilt $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}$?

Lösung: Man erkennt sofort $x=1$ als Lösung. Setzt man $y=x-1$, $x=1+y$, so lautet die Gleichung, $\sqrt{1+y}+\sqrt[3]{8+y}=\sqrt[4]{81+y}$, wobei $-1\leq y$. Ziel ist es zu zeigen, dass für $y>0$ die linke Seite der Gleichung schneller wächst als die recht und umgekehrt für $y<0$ die rechte Seite schneller wächst. Damit wäre gezeigt, dass $y=0$ die einzige Lösung ist.
Fall 1. $y>0$. Wir zeigen

$$\sqrt{1+y}>\frac{1}{3}\sqrt[4]{81+y}=\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}},\qquad \sqrt[3]{8+y}>\frac{2}{3}\sqrt[4]{81+y}=2\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}}.$$

Addiert man diese beiden Ungleichungen, so hat man $\sqrt{1+y}+\sqrt[3]{8+y}>\sqrt[4]{81+y}$. Wegen $y>0$ ist $1+y>1+\frac{y}{81}$ und weiter $\sqrt{1+y}\geq\sqrt{1+\frac{y}{81}}>\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}}$, da für alle $z>1$ gilt $\sqrt[z]{>}\sqrt[4]{z}$.
Aus analogen Schlüssen folgt

$$\sqrt[3]{8+y}=2\sqrt[3]{1+\frac{y}{8}}>2\sqrt[4]{1+\frac{y}{8}}>2\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}}.$$

Damit ist der Fall $y>0$ erledigt.
Fall 2. $-1<y<0$. Wir zeigen

$$\sqrt{1+y}<\frac{1}{3}\sqrt[4]{81+y}=\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}},\qquad 2\sqrt[3]{1+\frac{y}{8}}<\frac{2}{3}\sqrt[4]{81+y}=2\sqrt[4]{1+\frac{y}{81}}.$$

Im Bereich $0<z<1$ gilt $\sqrt[m]{z}<\sqrt[n]{z}$ genau dann, wenn $0<m<n$. Also folgt aus $1+y<1+\frac{y}{81}$ die erste Behauptung mit $m=2$ und $n=4$; analog ist $1+\frac{y}{8}<1+\frac{y}{81}$ und die Behauptung 2 folgt mit $m=3$ und $n=4$.

Aufgabe 5 (schwer) Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die gilt $(x^3+2x)^3=(x^5-2x)^5$

Lösung: Beide Seiten der Gleichung sind ungerade Funktionen, also ist mit x auch stets $-x$ eine Lösung. $x=0$ ist eine erste Lösung. Wir beschränken uns auf die Suche nach $x>0$. Wir klammern x aus, formen äquivalent um und setzen schließlich $x^2=z$.

$$x^3(x^2+2)^3=x^5(x^4-2)^5\Leftrightarrow(x^2+2)^3=x^2(x^4-2)^5\Leftrightarrow(z+2)^3=z(z^2-2)^5.$$

Man erkennt leicht, dass $z=2$, $x=\sqrt{2}$ eine Lösung ist. Außerdem muss $z^2>2$ gelten, da sonst die rechte Seite negativ und die linke Seite positiv ist. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle
1.Fall $z>2$. Wir zeigen, dass $(z+2)^3<z(z^2-2)^5$ gilt. Zunächst folgt aus $z>2$ nacheinander $z^2>4$, $8z^3>32z$ und $16z(z^2-2)=16z^3-32z>8z^3$. Beachtet man ferner $(z^2-2)^5>(4-2)^4(z^2-2)=16(z^2-2)$ und $2z>z+2$, so erhält man

$$z(z^2-2)^5>16z(z^2-2)>(2z)^3>(z+2)^3.$$

Damit ist dieser Fall erledigt.
Fall 2. $\sqrt{2} < z < 2$. Hier gilt $2 < z^2 < 4$. Wir wollen zeigen, dass $(z+2)^3 > z(z^2-2)^5$ gilt. Wir setzen dazu $y = 2 - z$ bzw. $z = 2 - y$. Dann ist $2 - \sqrt{2} > y > 0$ und wir wollen zeigen, dass

$$(4-y)^3 > (2-y)(2-y(4-y))^5.$$

Aus $2-\sqrt{2} > y > 0$ folgt schrittweise $\sqrt{2} < 2-y < 2$, $2+\sqrt{2} < 4-y < 4$, $y(2+\sqrt{2}) < y(4-y) < 4y$ und schließlich $2 - y(2+\sqrt{2}) > 2 - y(4-y) > 2-4y$. Daher genügt es zu zeigen, dass

$$(4-y)^3 > (2-y)2^4(2-3y) > (2-y)(2-y(2+\sqrt{2}))^5.$$

Die erste Ungleichung ist äquivalent zu $64 - 48y + 12y^2 - y^3 > 16(4-8y+3y^2) = 64 - 144y + 48y^2$. Dies ist äquivalent zu $y^3 - 36y^2 + 96y > 0$ bzw. $y^2 - 36y + 96 > 0$. Dies ist wegen $0 < y < 2$ erfüllt.

Aufgabe 6 (mittel) Gesucht sind alle monoton wachsenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Cauchysche Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ erfüllen.

Lösung: Wie üblich zeigt man, dass für alle rationalen Zahlen q gilt, $f(q) = mq$, wobei wegen der Bedingung $m \geq 0$ gelten muss. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $C = f(x)$. Dann gilt für alle rationalen Zahlen $q < x$, dass $mq < C$. Geht man in der letzten Ungleichung zum Supremum über alle $q < x$ über, so hat man $mx \leq C$, also $mx \leq f(x)$. Analog kann man alle $q > x$ betrachten und erhält aus der Monotonie $mq > C$ für alle $q > x$ Geht man zum Infimum über alle q über, so hat man $mx \geq C = f(x)$. Zusammen ist also $f(x) = mx$.

Aufgabe 7 (leicht) Ermittle alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt $4^x + 9^x + 16^x = 6^x + 8^x + 12^x$.

Lösung: Man erkennt sofort, dass $x = 0$ eine Lösung ist. Man zeigt für $x > 0$, dass $4^x + 9^x + 16^x - 6^x - 8^x - 12^x > 0$ und umgekehrt gilt diese Ungleichung auch für $x < 0$.
In der Tat erhält man durch Ausklammern

$$\begin{aligned} 4^x - 2\,6^x + 9^x + 16^x + 6^x - 8^x - 12^x &= (2^x - 3^x)^2 + 2^x(3^x - 4^x) + 4^x(4^x - 3^x) \\ &= (3^x - 2^x)^2 + (4^x - 3^x)(4^x - 2^x). \end{aligned}$$

man überprüft leicht, dass der zweite Term immer positiv ist für alle $x \neq 0$.

Aufgabe 8 (leicht) Ermittle alle Paare (x, y) von ganzen Zahlen, für die gilt
$y^4 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Lösung: Die Grundidee hier ist, dass die rechte Seite meist *zwischen* zwei vierten Potenzen liegt, nämlich zwischen x^4 und $(x+1)^4$. Dies ist ein Widerspruch. Genauer, es ist für $x > 0$

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 > x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^4 > x^4.$$

Zieht man die vierte Wurzel, so ist $x + 1 > \left|y\right| > x$, was der Ganzzahligkeit von y widerspricht.
Für $x < -1$ setzen wir $x = -1 - z$, $z > 0$, also $z = -1 - x$ und erhalten

$$z^4 + 3z^3 + 4z^2 + 2z + 1 = y^4$$

Wie oben erhält man daraus $z < \left|y\right| < z + 1$, was keine Lösung hat. Es verbleiben $x = -1$ und $x = 0$, was zu den vier Lösungen führt $(-1, \pm 1)$ und $(0, \pm 1)$.

Aufgabe 9 (mittel) Ermittle alle Paare (x,y) von ganzen Zahlen, für die gilt $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$.

Lösung: Es gibt 6 Lösungen $(-1,-1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$, $(2,-6)$ und $(2,5)$.

Aufgabe 10 (mittel) Ermittle alle Paare (x,y) von ganzen Zahlen, für die gilt $y^3=x^3+8x^2-6x+8$.

Lösung: Es gibt genau 2 Lösungen $(0,2)$ und $(9,11)$.

Aufgabe 11 (schwer) Ermittle alle Paare (x,y) von ganzen Zahlen, für die gilt $y^2=x^4+x^3+x^2+x+1$.

Lösung: Es gibt 6 Lösungen $(0,\pm1)$, $(-1,\pm1)$ und $(3,\pm11)$.
Man beachte

$$y^2=\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2+x+1>\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$
$$y^2=\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(x^2-2x-3\right)<\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2, \quad \forall x: x<-1, x>3.$$

In den angegebenen Bereichen ist nämlich die quadratische Funktion $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)>0$ positiv. In diesen Bereichen gilt dann

$$\left|\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|>|y|>\left|\left(x^2+\frac{x}{2}\right)\right|.$$

Da links und rechts Halbzahlen aus $\mathbb{Z}/2$ liegen, ist dies für ganzzahlige y nicht möglich. Es genügt daher die ausgeschlossenen Fälle $x\in\{-1,0,1,2,3\}$ zu untersuchen, wobei man genau die oben angegebenen 6 Lösungen erhält.

Aufgabe 12 (mittel) Finde alle positiven Lösungen $(x_1,\dots x_{20})$ des Gleichungssystems

$$x_1+\frac{1}{x_2}=4, \quad x_2+\frac{1}{x_3}=1, \quad x_3+\frac{1}{x_4}=4, \quad \dots, x_{20}+\frac{1}{x_1}=1.$$

Lösung: Man erkennt die Lösung $x_1=x_3=\dots=x_{19}=2$, $x_2=x_4=\dots=x_{20}=\frac{1}{2}$. Die Ungleichung über das arithmetisch-harmonische Mittel, angewandt auf die Zahlen $x_1,x_3,\dots x_{19},1/x_2,1/x_4,\dots,1/x_{20}$ liefert dann

$$\frac{1}{20}\left(\sum x_{2i-1}+\sum_i\frac{1}{x_{2i}}\right)=\frac{1}{20}(10\cdot4)=2\geq\frac{20}{\sum_i\frac{1}{x_{2i-1}}+\sum_i x_{2i}}=\frac{20}{10}=2.$$

Gleichheit tritt aber genau dann ein, wenn alle Elemente gleich sind. Hieraus folgt die Eindeutigkeit.

Aufgabe 13 (mittel) Finde alle positiven Lösungen $(x_1,\dots,x_{100})$ des Gleichungssystems

$$x_1+x_2+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=8, \quad x_2+x_3+\frac{1}{x_4}+\frac{1}{x_5}=5,$$
$$x_3+x_4+\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_6}=2, \quad x_4+x_5+\frac{1}{x_6}+\frac{1}{x_7}=5,$$
$$x_5+x_6+\frac{1}{x_7}+\frac{1}{x_8}=8, \quad \dots, \quad x_{100}+x_1+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=5.$$

Lösung: Die Lösung geschieht analog zur vorangegangenen. Dabei erhält man $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = \cdots = x_{97} = x_{98} = 2$ und $x_3 = x_4 = x_7 = x_8 = \cdots = x_{99} = x_{100} = \frac{1}{2}$. Man beachte, dass man hierbei nur die Gleichungen mit *ungeraden* Nummern benötigt. Alle *geraden* Gleichungen sind überflüssig.