Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

HELMUT KÖNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 6 - eine Anleitung für AG- Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

HELMUT KÖNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 6 -

eine Anleitung für AG-Leiter

Inhalt

	Seite
Einleitung	2
1. Zu Ziel und Inhalt der Arbeitsgemeinschaften in Klasse 6	4
1.1. Heuristische Vorgehensweisen	5
1.2. Logische Grundlagen	12
1.3. Sachkenntnisse und Fertigkeiten	16
2. Zu einigen organisatorischen und didaktischen Fragen	17
3. Vorschläge zur Gestaltung der Zirkel	21
3.1. Wir suchen Zuordnungen, Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten	21
3.2. Wir berechnen Gewinnchancen bei Spielen	32
3.3. Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben	38
3.4. Gleichungen und Sachaufgaben	48
3.5. Aussagen, Aussageformen und Terme	60
3.6. Mengenlehre	62
3.7. Das Umformen und Umkehren von Sätzen	69
3.8. Das Beweisen von Sätzen; zahlentheoretische Beweisaufgaben	73
3.9. Geometrische Aufgaben	79
3.9.1. Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen	80
3.9.2. Geometrische Bestimmungsaufgaben	84
3.9.3. Geometrische Beweisaufgaben	97
3.9.4. Geometrische Konstruktionsaufgaben	111
3.10. Sonstige Aufgaben	121
4. Lösungen der Bestimmungsaufgaben aus der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6"	128
Literaturverzeichnis	136

Einleitung

Vorliegende Anleitung ist eine überarbeitete und stark erweiterte Fassung der unter gleichem Namen 1990 erschienenen Anleitung. Sie gehört zur *"Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6"* /1/, die eine überarbeitete und stark erweiterte Fassung der Aufgabensammlung /2/ ist. Zusammen mit den Aufgabensammlungen /4/, /5/, /6/, /7/, /8/ und den Anleitungen /9/, /10/, /11/, /12/, /13/ liegt nunmehr ein einheitlich konzipiertes Material für die Klassen 5 bis 10 vor, das wir den Schulen zur Unterstützung der Förderung mathematisch interessierter Schüler anbieten.

Die Aufgabensammlung /2/ basiert auf der Aufgabensammlung /3/ aus dem Jahr 1982, an deren Erarbeitung und Erprobung R. Häberlein und F. Meinelt mit ihren Diplomarbeiten /14/ und /15/ maßgeblich beteiligt waren.
Die Aufgabensammlung /3/ wurde für "Kreisarbeitsgemeinschaften" ausgearbeitet, in denen interessierte Schüler aus mehreren Schulen zusammengefasst wurden. Erprobt wurde dieses Material im Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend „spektrum" in Chemnitz, wo Mathematiklehrerstudenten des 2. bis 5. Studienjahres unter Anleitung von Mitarbeitern der Sektion Mathematik der TU Chemnitz für Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 mathematische Zirkel durchführten. Die Diplomarbeiten /14/ und /15/ enthielten Vorbereitungen für 36 derartige Zirkel in Klasse 6, in denen die Lehrerstudenten (die im 2.Studienjahr ja noch keine Unterrichtsversuche gehalten hatten) konkrete Hinweise über Ziel, Inhalt und didaktische Gestaltung eines jeden solchen Zirkels erhielten.

Vorliegende Anleitung soll einen ganz anderen Zweck erfüllen. Sie wendet sich an erfahrene Lehrer, die - in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und den Interessen der zu fördernden Schüler - für die Festlegung der Ziele, die Auswahl der Inhalte und die didaktische Gestaltung der Zirkel relativ viele Möglichkeiten haben und selbst verantwortlich sind.
Die Aufgabensammlung /1/ ist mit 186 Aufgaben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, die insgesamt 380 Teilaufgaben enthalten, so umfangreich angelegt, dass sie für sehr verschiedene Zwecke geeignet ist.
Nach wie vor empfehlen wir, besonders begabte Schüler aus mehreren Schulen in sogenannten *"Kreisarbeitsgemeinschaften"* zusammenzufassen, weil dadurch eine effektive Begabtenförderung sehr erleichtert wird. Dies geschieht z.B. in Chemnitz im Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend „spektrum" bereits seit 1962.
Eine weit umfangreichere Nutzung dürfte dieses Material jedoch in *Schularbeitsgemeinschaften* finden, zu deren Teilnehmern vor allem mathematisch interessierte Schüler gehören.
Wir wenden uns aber auch an Lehrer, die im Rahmen der *inneren Differenzierung* in ihrem *Unterricht* einzelne, besonders interessierte und befähigte Schüler fördern oder ihren Unterricht auflockern möchten. Die Aufgabensammlung enthält viele Aufgaben, die sich für einen derartigen Zweck gut eignen.

Um dem Lehrer bei der Festlegung der Ziele und der Auswahl der Inhalte zu helfen, werden für jede Aufgabengruppe zu Beginn des jeweiligen Abschnitts die *Ziele* angegeben, die man hierbei anstreben kann, und es wird eine *"Minimalvariante"* und eine *"Maximalvariante"* vorgeschlagen, denen der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zu entnehmen ist.

Die Interessen der Schüler, die an einer zusätzlichen mathematischen Förderung teilnehmen, gehen erfahrungsgemäß in zwei Richtungen:
Es gibt Schüler, die vor allem an einer *Vertiefung und Ergänzung des Unterrichtsstoffs* interessiert sind. Mit solchen Schülern sollte man vor allem die Abschnitte "Gleichungen und Sachaufgaben", "Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen" sowie "Geometrische Bestimmungsaufgaben" behandeln.

Es gibt aber auch Schüler, die Spaß an *mathematischen Wettbewerben* haben und dabei auch gut abschneiden möchten. Mit diesen sollte man auch die "unterrichtsferneren" Aufgaben aus der Kombinatorik, zahlentheoretische Beweis- und Bestimmungsaufgaben sowie geometrische Beweis- und Konstruktionsaufgaben behandeln.

Unsere Aufgabensammlungen und Anleitungen werden in steigendem Maß über Sachsen hinaus auch in anderen Bundesländern genutzt, vor allem in Nordrhein-Westfalen, Thüringen, Sachsen-Anhalt und Bayern. Wir haben daher eine konkrete Bezugnahme auf den seit 1992/93 gültigen Lehrplan des Landes Sachsen weitgehend vermieden.
Dieser Lehrplan brachte vor allem auf dem Gebiet der Geometrie beträchtliche Veränderungen mit sich, die erst in den überarbeiteten Fassungen der Aufgabensammlungen /5/, /6/, /7/, /8/ berücksichtigt werden konnten. So mussten die Aufgaben, die die Kenntnis der Inhaltsformel für Dreiecke sowie die Viereckslehre voraussetzen, aus der Aufgabensammlung /2/ für Klasse 6 entfernt und in die Aufgabensammlung für Klasse 7 übernommen werden.

Ab Schuljahr 1992/93 sind bei uns vor allem die Gymnasien für die zusätzliche Förderung mathematisch interesssierter Schüler verantwortlich. Im Freistaat Sachsen gibt es an jedem Gymnasium einen *"Beauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe"*, der für die Verwirklichung der vom *"Sächsischen Landeskomitee zur Förderung mathematisch - naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler"* formulierten Ziele an seinem Gymnasium sorgen soll. Wir wenden uns daher mit unseren Aufgabensammlungen und Anleitungen vor allem auch an diese Kolleginnen und Kollegen.
Zur Popularisierung und Durchsetzung unserer Absichten führen wir ab Schuljahr 1993/94 im Regierungsbezirk Chemnitz eine *Weiterbildung für Lehrer* durch, die sich mit fachlichen und didaktischen Aspekten einer derartigen Förderung von interessierten Schülern im unterrichtlichen und im außerunterrichtlichen Bereich befasst.
Auf diese Weise gelingt es, mit denjenigen Kolleginnen und Kollegen in persönlichen Kontakt zu kommen, die sich für das Gebiet der Begabtenförderung interessieren und auf deren engagierte Arbeit wir angewiesen sind.

Ferner geht es darum, interessierte Schüler und deren Eltern über *Fördermöglichkeiten und Wettbewerbe* zu informieren.
Es ist zu erwarten, dass viele Schüler einer AG Klasse 6 an der 1. Stufe des *Adam-Ries-Wettbewerbs (ARW)* für Schüler der Klasse 5 teilgenommen haben. Die 2. Stufe dieses ARW findet für rund 60 Schüler auf Landesebene statt, und die 3. Stufe des ARW ist ein Vier-Länder-Wettbewerb zwischen Oberfranken, Thüringen, Tschechien und Sachsen in Annaberg-Buchholz.
Die 2. Stufe der *Mathematik-Olympiade,* d.h. die *Kreisolympiade*, findet ab Klassenstufe 5, die 3. Stufe der MO, d.h. die *Landesolmpiade*, findet ab Klassenstufe 6 statt.
Ferner sollte man die Schüler auf den *Korrespondenzzirkel Mathematik (KZM)* aufmerksam machen, der im Regierungsbezirk Chemnitz für die Klassen 5, 6, 7, 8, 9, 10 und 11/12 durchgeführt wird. Nähere Informationen findet man unter www.bezirkskomitee.de .

Mein besonderer Dank gilt Herrn Horst Römer und Herrn Lutz Pörnig für das Lesen der Korrektur sowie für viele kritische Hinweise beim Erarbeiten und Fertigstellen dieser Anleitung.

Wir würden uns freuen, wenn uns Nutzer dieses Materials ihre Erfahrungen, Einschätzungen und Verbesseriungsvorschläge mitteilen würden.

Hinweis: Im Januar 2002 wurde (neben dieser Einleitung auch) die zugehörige Aufgabensammlung für Klasse 6 überarbeitet, der neuen Rechtschreibung angepasst und bei 6 Aufgaben "DM" durch "€" ersetzt.
Die Lösungen in dieser Anleitung wurden entsprechend überarbeitet.

1. ZU ZIEL UND INHALT DER ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IN KLASSE 6

Anknüpfend an die in /9/ formulierten Ziele sei nochmals hervorgehoben:
In erster Linie streben wir die *Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch bewußtes Vermitteln von heuristischen Vorgehensweisen an.
Maßnahmen der äußeren und der inneren Differenzierung sollen es ermöglichen, jeden Schüler stets bis zur oberen Grenze seiner Leistungsfähigkeit zu fordern und auf diese Weise optimal zu fördern. Andererseits geht es aber auch darum, die Einstellung der Schüler zu mathematischem Arbeiten positiv zu beeinflussen. Schüler dieser Klassenstufe müssen an ein bewußtes und beharrliches Arbeiten erst herangeführt werden.
Bei all dem darf man aber nie vergessen: Die außerunterrichtliche Tätigkeit soll den Schülern auch Spaß machen!

Wie in der AG Klasse 5 verfolgen wir Teilziele, deren Reihenfolge auch eine Rangfolge bezüglich ihrer Bedeutsamkeit darstellt:
Im Vordergrund steht das schon erwähnte bewußte *Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen* (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel). Ferner geht es um ein über den Unterricht hinausgehendes Wissen und Können auf dem Gebiet der *mengentheoretisch-logischen Grundlagen der Mathematik* verbunden mit Fertigkeiten auf dem Gebiet der Technik der Lösungsdarstellung. Von untergeordneter Bedeutung ist für uns der Erwerb von Wissen, das über den Unterrichtsstoff hinausgeht und das um seiner selbst willen vermittelt wird. In AGn sollte der Erwerb von Wissen stets dem Ziel dienen, weitere Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben zu gewinnen.
Wir werden bei jedem Stoffgebiet die zu erreichenden Teilziele in dieser Reihenfolge festhalten.

Ab Klasse 6 kommt - zum mindesten für die leistungsstärksten Schüler - folgendes Ziel hinzu: *Befähigen zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können* durch "Literaturstudium". Dies bedeutet in dieser Klassenstufe zunächst das Durcharbeiten des "Merkstoffs" in der Aufgabensammlung /1/ unter Anleitung und Kontrolle durch den AG-Leiter sowie das Durcharbeiten von Abschnitten aus dem Lehrbuch, und dies sowohl zum Zweck der Wiederholung und Systematisierung als auch der Erarbeitung von neuem Stoff. Besuchen Schüler aus mehreren verschiedenen Gymnasien die AG, dann sollte der AG-Leiter in Erfahrung bringen, welche Lehrbücher verwendet werden.
Auf diesbezügliche didaktische Fragen werden wir in Abschnitt 2. noch eingehen.

Der AG-Leiter muß davon ausgehen, daß nicht alle Schüler seiner AG die AG Klasse 5 komplett durchlaufen haben. Also müssen die dort vermittelten heuristischen Vorgehensweisen, logischen Grundlagen sowie Sachkenntnisse und Fertigkeiten laufend wiederholt werden. Wir werden bei den einzelnen Stoffgebieten auf derartige notwendige Wiederholungen aufmerksam machen.

Von der genannten allgemeinen Zielstellung ausgehend sollte jeder Lehrer zunächst Überlegungen anstellen, welche Ziele er in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und den Interessen seiner AG erreichen kann und will. Erst auf der Grundlage einer solchen konkreten Zielstellung ist es dann möglich, eine begründete Entscheidung über Auswahl und Reihenfolge der zu behandelnden Aufgaben zu treffen. Das didaktische Vorgehen wird dann ebenfalls von den angestrebten Zielen abhängen.

1.1. Heuristische Vorgehensweisen

Heuristisches Vorgehen ist bis zu einem gewissen Grade lehrbar. Es reicht von der Beachtung sehr allgemeiner *Prinzipien* über den Einsatz von *Strategien* bis zum Anwenden relativ einfach anzueignender heuristischer *Hilfsmittel.*

Für uns besteht heuristische Schulung vor allem im Vermitteln gewisser Fragen und Impulse, die vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgaben weitgehend unabhängig sind. Wir greifen diesbezüglich auf die in /16/ und /17/ festgehaltenen Auffassungen zurück.
Wir vertreten die Ansicht, daß das bewußte Vermitteln heuristischer Vergehensweisen in Form von Verfahrenskenntnissen die Entwicklung des Schöpfertums der Schüler nicht behindert, sondern auf einem höheren Schwierigkeitsniveau sogar unterstützt, wenn bei diesem Vermitteln bestimmte didaktische Prinzipien beachtet werden (vgl. Abschnitt 2.) .

Bereits in der AG Klasse 5 werden die Schüler mit der folgenden ***allgemeinen Schrittfolge*** beim Lösen von Aufgaben bekanntgemacht:

1. Erfassen der Aufgabenstellung ;
2. Finden eines Lösungsplans ;
3. Ausführen des Plans, Darstellen der Lösung ;
4. Kontrolle; Auswertung (Rückblick und weiterführende Untersuchungen) .

Impulse, die das Erfassen der Aufgabenstellung und die Kontrolle nebst Auswertung steuern können, findet man in /9/ auf S. 4 .

Beim *Rückblick* sollte man sich bewußtmachen, worin die Schwierigkeiten der Aufgaben bestanden haben und welche heuristischen Vorgehensweisen hilfreich waren, damit man diese Erkenntnisse bei analogen Aufgaben nutzen kann.
Ferner sollte man bisweilen nach mehreren Lösungswegen zu einer Aufgabe suchen, indem man bewußt verschiedene heuristische Strategien einsetzt. Vor allem in AGn mit Schülern unterschiedlicher Leistungsstärke sollte man Schüler, die eine gestellte Aufgabe bereits gelöst haben, zur Suche nach anderen, vielleicht kürzeren Wegen auffordern. Angesichts bereits vorhandener Ergebnisse ist eine derartige Suche oft lohnend und dient der tieferen Durchdringung der entsprechenden Sachverhalte.

Bei den *weiterführenden Untersuchungen* geht es darum, im Anschluß an das Lösen einer Aufgabe nach neuen, mit ihr zusammenhängenden "verwandten" Aufgaben zu suchen.
In der AG Klasse 6 spielt die Suche nach wahren Umkehrungen eines bewiesenen Satzes eine wichtige Rolle. Auch das Verallgemeinern einer Aufgabenstellung oder das Untersuchen von interessanten Spezialfällen kann von Interesse sein. Desgleichen gehören der Übergang von einer Aufgabe mit konkreten Daten zu einer parameterhaltigen Aufgabe und umgekehrt ebenfalls hierher.
Auf diese Weise mündet der letzte Schritt eines Aufgabenlöseprozesses in den ersten Schritt eines neuen Aufgabenlöseprozesses.

Im 1. und im 2.Schritt der allgemeinen Schrittfolge werden einige sehr allgemeine ***heuristische Prinzipien*** berücksichtigt, die man wie folgt durch *Impulse* charakterisieren kann:

Analogieprinzip:

- Habe ich eine ähnliche Aufgabe schon einmal gelöst? Wie bin ich dabei vorgegangen? Welche Hilfsmittel habe ich verwendet?

Rückführungsprinzip:

- Ich suche nach bereits gelösten Aufgaben, auf die sich die gelöste Aufgabe zurückführen läßt.
- Ich formuliere "Hilfsaufgaben", deren Lösung das Lösen der gestellten Aufgabe ermöglichen würde.

Zerlegungsprinzip:

- Ich zerlege die Aufgabe in überschaubare Teilaufgaben. In welcher Reihenfolge sind diese Teilaufgaben zu lösen?
- Ist eine Fallunterscheidung notwendig oder nützlich?

Prinzip des Übergangs zu einer einfacheren Aufgabe:

- Ich beschäftige mich zunächst mit einem Spezialfall oder einem vereinfachten Fall, in der Hoffnung, so auf eine Lösungsidee zu kommen.

Extremalprinzip:

- Ich betrachte einen extremalen (z.B. den ungünstigsten) Fall, der eintreten kann (vgl. 3.1.) .

Transformationsprinzip:

- Ich übersetze (transformiere) die Aufgabe in die Sprache einer geeignet gewählten mathematischen Theorie.
- Ich löse die Aufgabe mit den Hilfsmitteln dieser Theorie.
- Ich deute das Ergebnis (Rückübersetzung in den Ausgangsbereich).

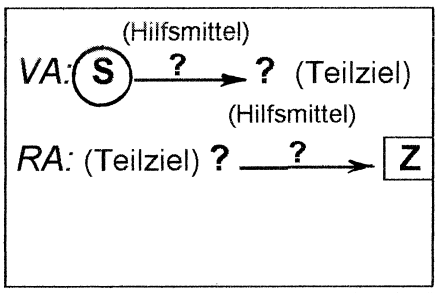
Das letztgenannte Prinzip tritt in Klasse 6 nur in dem speziellen Fall *"Übersetzen in die Sprache der Gleichungen"* beim Lösen von Sachaufgaben oder beim Lösen von zahlentheoretischen Aufgaben (Übersetzen von Teilbarkeitsaussagen in die Sprache der Gleichungen) auf. Es wird in der AG Klasse 7 in der Zahlentheorie beim "Übersetzen in die Sprache der Kongruenzen", in den AGn der Klassen 8 und 9 beim graphischen Lösen von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen (als "Übersetzen in die Sprache der Funktionen und ihrer Graphen") sowie in Klasse 9 bei der algebraischen Methode zum Lösen von Konstruktionsaufgaben eine Rolle spielen.

Die Impulse, die heuristische Prinzipien charakterisieren, sind in hohem Grade unbestimmt. Die Impulse, die ***heuristische Strategien*** charakterisieren, liefern bereits etwas konkretere Hinweise darauf, was man versuchen kann, um ans Ziel zu gelangen.
Nähere Erläuterungen hierzu findet man in /16/ .

Das **Vorwärtsarbeiten (VA)** und das **Rückwärtsarbeiten (RA)** wurde in der AG Klasse 5 beim Suchen nach Gewinnstrategien bei mathematischen Spielen und beim Lösen von Sachaufgaben und von geometrischen Bestimmungsaufgaben eingeführt. Diese Strategien sind deshalb so bedeutsam, weil sie bei fast allen mathematischen und außermathematischen Aufgaben einsetzbar sind.

In der Regel verwendet man ein kombiniertes VA/RA, und die so gewonnenen Lösungspläne lassen sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten. Während das VA von jedem Aufgabenlöser (unbewußt) eingesetzt wird, ist das RA den ungeübten Aufgabenlösern kaum vertraut. Die Erfahrung lehrt, daß man durch bewußtes Vermitteln des RA vor allem auch leistungsschwächeren Schülern rasch zu Erfolgserlebnissen verhelfen und ihre Fähigkeiten im Aufgabenlösen relativ rasch steigern kann.

Die beiden Strategien lassen sich jeweils durch ein Paar von Fragen charakterisieren, nämlich durch die *Teilzielfrage* und durch die *Hilfsmittelfrage* (vgl. S.8). In der nebenstehend angegebenen schematischen Darstellung werden diese Fragen jeweils durch ein "?" symbolisiert. Dabei ist die Reihenfolge, in der diese Fragen gestellt werden, methodisch bedeutsam.



Ist ein Schüler in der Lage, die Teilzielfrage sofort zu beantworten, dann führt bereits die Aufforderung "Begründe!" zu einer Antwort auf die (nicht explizit gestellte) Hilfsmittelfrage. Findet er dagegen keine Antwort auf die Teilzielfrage, dann muß er bewußt nach Formeln, Sätzen, Definitionen u.ä. (als Hilfsmittel) suchen, die ihm Teilziele liefern. Diese Suche wird erleichtert, wenn der Schüler über einen zweckmäßig angelegten *Hilfsmittelspeicher* verfügt. In diesem Hilfsmittelspeicher werden planimetrische Sätze, geordnet nach gleichartigen Behauptungen, festgehalten.
Dies ist vor allem beim Rückwärtsarbeiten sehr nützlich. Um beispielsweise die Gleichheit zweier Winkel abzuleiten, kann der Schüler am Ende der Klasse 6 bereits sehr verschiedenartige Hilfsmittel einsetzen:

$\boxed{\alpha = \beta}$

a) Stufen- oder Wechselwinkel an Parallelen .

b) Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken .

c) Es gibt eine Bewegung, die diese Winkel ineinander überführt .

d) Entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken .

e) Spitze (stumpfe) Winkel mit paarweise orthogonalen oder parallelen Schenkeln.

f) Es gibt ein γ , so daß $\alpha = \gamma$ und $\beta = \gamma$.

In Klasse 7 wird der Satz über Gegenwinkel im Parallelogramm nachgetragen. In Klasse 8 kommt der Satz über Peripheriewinkel über gleichem Bogen, der Satz über Peripherie- und Sehnentangentenwinkel über gleichem Bogen sowie der Satz, daß die Zentrale eines Tangentenpaars den Winkel zwischen den Tangenten halbiert, hinzu. Der Unterrichtsstoff der Klasse 9 liefert schließlich noch den Satz über die Gleichheit entsprechender Winkel in ähnlichen Dreiecken.
In diesem Hilfsmittelspeicher werden ferner Sätze festgehalten, die folgende Behauptungen besitzen:
$\alpha > \beta$; $\alpha = 2\beta$; $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha = \beta + \gamma$; $\sphericalangle(g;h) = \alpha = 90°$; $a = b$; $a > b$; $c = a + b$; $a + b > c$; $a = 2b$; $ab = cd$ bzw. $a:c = d:b$; $g \parallel h$; $g \perp h$; $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $P \in AB$ bzw. $P \in g$; $P \in k(M;r)$.
Ferner werden alle Eigenschaften zusammengestellt, die ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat, ein Rechteck, einen Rhombus, ein Parallelogramm, ein Drachenviereck, ein Sehnenviereck oder ein Tangentenviereck charakterisieren.
Ein solcher Hilfsmittelspeicher wird zu Beginn in der AG Klasse 7 mit den Schülern erarbeitet, auf einer Karteikarte festgehalten und dann in der AG Klasse 8 und der AG Klasse 9 ergänzt.
Die Auswahl eines "chancenreich" erscheinenden Hilfsmittels ist beim Rückwärtsarbeiten ein Schritt, der den Schülern keinesfalls abgenommen werden sollte! Bei schwierigen geometrischen Beweisen findet man auf diese Weise "versteckte" Hilfspunkte oder Hilfslinien, ohne die ein Beweisweg kaum zu finden wäre.

In der AG Klasse 5 lag der Schwerpunkt beim VA und RA jeweils auf der Teilzielfrage. In der AG Klasse 6 sollen die Schüler entdecken, daß sich diese Strategien auch beim Lösen von *Beweisaufgaben* einsetzen lassen, und sie sollen die Nützlichkeit der Hilfsmittelfrage erkennen.

Es ist zweckmäßig, *4 Varianten des VA /Ra* zu unterscheiden und durch die angegebenen Fragen und Impulse zu charakterisieren. Die in Variante (4) angegebenen "Unterimpulse" werden nur gegeben, wenn der jeweils übergeordnete Impuls noch keine entsprechende Antwort ausgelöst hat. Unterstehende Abbildungen enthalten die schematische Darstellung von Variante (3) und (4) .

(1) *VA: Teilzielfrage vor Hilfsmittelfrage*

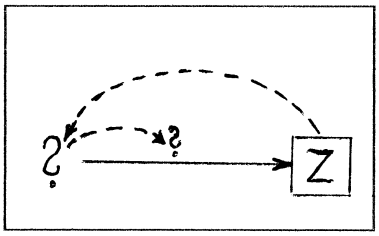
- *(TZF)* Was läßt sich aus den { gegebenen Größen / Voraussetzungen / gegebenen Bedingungen / gegebenen Punkten } unmittelbar { berechnen / ableiten / folgern / konstruieren } ?
- *(HMF)* Begründung! (Welche Formel, welcher Satz wurde verwendet?)

(2) *VA: Hilfsmittelfrage vor Teilzielfrage*

- *(TZF)* Suche nach { Formeln, ..., in denen die gegebnen Größen vorkommen / Sätzen, die gleichartige Voraussetzungen besitzen / zugehörigen geometrischen Örtern } !
- *(HMF)* Was läßt sich also { aus den gegebenen Größen berechnen / aus den Voraussetzungen / Bedingungen ableiten / aus den gegebenen Punkten konstruieren } ?

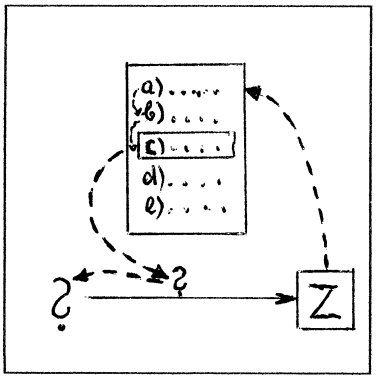
(3) *RA: Teilzielfrage vor Hilfsmittelfrage*

- Woraus ließe sich { die gesuchte Größe / die Behauptung / der gesuchte Punkt } unmittelbar { berechnen / ableiten / konstruieren } ?
- Begründung! (Welche Formel, welcher Satz, welche geometrischen Örter wurden verwendet?)



(4) *RA: Hilfsmittelfrage vor Teilzielfrage*

- Was könnte als Hilfsmittel dienen?
  - ◦ Welche { Formeln enthalten die gesuchte Größe / Sätze enthalten eine gleichartige Behauptung } ?
    : Wähle aus diesen möglichen Hilfsmitteln ein erfolgversprechendes aus!
    Welches Hilfsmittel kommt in Frage, welches nicht?
- Woraus ließe sich also { die gesuchte Größe berechnen / die Behauptung ableiten } ?



Manchmal ist auch die *allgemeine Hilfsmittelfrage* nützlich, bei der man weder vom Start noch vom Ziel ausgeht, sondern - etwa die Planfigur betrachtend - sich ganz allgemein die Frage stellt, welches Hilfsmittel bei einer derartigen Aufgabe nützlich sein könnte.

Beispiele für das Anwenden des VA/RA findet man in den Abschnitten 3.1., 3.4., 3.8., 3.9.2., 3.9.3. und 3.9.4. dieser Anleitung.

Die Strategie **"Suche nach Gleichungen"** tritt in folgenden Varianten auf:

- Ich führe günstige Variable ein und halte die gegebenen Bedingungen oder Beziehungen in Form einer Gleichung fest (ich übersetze in die Sprache der Gleichungen).
- Ich suche nach Gleichungen (Beziehungen) zwischen den gegebenen, den gesuchten und günstig gewählten Hilfsgrößen.

Der letztgenannte Impuls steht in enger Beziehung zu der oben erwähnten "allgemeinen Hilfsmittelfrage" und wird in den höheren Klassenstufen zunehmend an Bedeutung gewinnen. Beispiele für die Anwendung dieser Strategie findet man in 3.4., 3.8. und 3.9.2. .

Das **"systematische Probieren"** tritt vor allem beim Ermitteln der Erfüllungsmenge von Aussageformen (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen, Ungleichungen) auf, deren Erfüllungsgrundbereich endlich ist. Es ist auch beim Ermitteln unendlicher Erfüllungsmengen nützlich, um sich einen (zunächst vorläufigen) Eindruck von der Erfüllungsmenge zu verschaffen bzw. um einige Elemente dieser Erfüllungsmenge zu ermitteln.
Das systematische Probieren wird durch folgende Impulse charakterisiert:

- Ich ermittle eine Reihenfolge der Elemente des Erfüllungsgrundbereichs, die mit Sicherheit alle "möglichen" Elemente (Fälle) enthält.
- Ich entscheide für jedes Element (jeden Fall), ob es (er) die gegebene Bedingung (Beziehung, Gleichung, Ungleichung, Aussageform) erfüllt.

Beispiele für die Anwendung dieser Strategie findet man in 3.1., 3.2., 3.3. und 3.5. .

Die **"Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen"** wird durch folgende Impulse charakterisiert:

- Ich ermittle zu jeder der gegebenen Aussageformen (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen, Ungleichungen) die Erfüllungsmenge.
- Ich bilde den Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen.

Die Schüler sollen erkennen, daß diese Vorgehensweise bei sehr verschiedenartigen Aufgaben anwendbar ist. Diese Problematik wird in 3.5. und 3.6. angeschnitten und in 3.9.4. beim Behandeln der *Methode der geometrischen Örter* wieder aufgegriffen. Sie wird in höheren Klassenstufen beim Lösen von Gleichungssystemen eine Rolle spielen.
Beim Behandeln zahlentheoretischer Bestimmungsaufgaben in 3.3. wird man auch folgende "geschicktere" Variante zum Ermitteln der Erfüllungsmenge einer Konjunktion von Aussageformen (Bedingungen) aus der AG Klasse 5 wiederholen:

- Ich ermittle die Erfüllungsmenge der "informativsten" Bedingung (das ist die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge) und sondere aus dieser Menge alle diejenigen Elemente aus, die eine der anderen Bedingungen nicht erfüllen.

Diese verbesserte Strategie ist auch dann noch anwendbar, wenn alle gegebenen Bedingungen mit Ausnahme von einer Bedingung eine unendliche Erfüllungsmenge besitzen.

Eine im allgemeinen noch effektivere Strategie ist das **"Folgern zum Zweck des Vereinfachens".** Sie wird in 3.4. beim Lösen von Gleichungen eingesetzt, indem man eine Gleichung so lange vereinfacht, bis man ihre Erfüllungsmenge ablesen kann. Allgemein handelt es sich hier um eine spezielle Form des VA, wobei aus einer Aussageform zweckmäßige Folgerungen gezogen werden. Das sollte man beim Formulieren der entsprechenden Impulse beachten.

Sind mehrere Aussageformen (Bedingungen) gegeben, dann können folgende Impulse zur Charakterisierung dieser Strategie dienen:

- Welche der gegebenen Bedingungen ist (vermutlich) die "informativste" Bedingung (die die Anzahl der möglichen Lösungselemente am stärksten einschränkt)?
- Was läßt sich aus dieser Bedingung unmittelbar ableiten? Begründung!
- Welches ist die "nächst informative" Bedingung?
  Was läßt sich aus ihr (und den bereits gezogenen Schlußfolgerungen) ableiten?
  Begründung!

Diese Vorgehensweise wird in 3.1. und 3.3. eingesetzt.

Damit sind alle heuristischen Strategien besprochen, die in der AG Klasse 6 eingesetzt werden. Bezüglich ihrer Einordnung in ein allgemeines heuristisches Regelsystem vgl. /16/ .

Die zum Charakterisieren der angegebenen Strategien verwendeten Impulse waren weniger unbestimmt als die zur Charakterisierung der Prinzipien angegebenen. Noch konkreter können Impulse zum Charakterisieren von ***heuristischen Hilfsmitteln*** sein, deren Anwendung eine weitgehend erlernbare geistige Technik darstellt.

Das Hilfsmittel **"Variable - günstige Bezeichnungen"** spielt in der Klassenstufe 6 eine besonders wichtige Rolle. In 3.1., 3.2., 3.3. und 3.5. wird man an das in der AG Klasse 5 eingeführte Verwenden günstiger Bezeichnungen beim Lösen von logisch-kombinatorischen und von zahlentheoretischen Aufgaben wiederholen.
In den Abschnitten 3.5. und 3.7. geht es vor allem um ein *"Übersetzen aus der Wortsprache in die Zeichensprache"*, wobei die Schüler den Vorteil und Nutzen einer solchen Vorgehensweise erkennen sollen.
Beim Lösen von zahlentheoretischen Beweisaufgaben in 3.8. geht es zunächst stets darum, Voraussetzung und Behauptung unter Verwendung von Variablen geschickt festzuhalten, und auch bei Lösen der geometrischen Aufgaben in 3.9.2., 3.9.3. und 3.9.4. wird man die Schüler auffordern, günstige Bezeichnungen zu wählen, in der Planfigur festzuhalten und zum Formulieren von Voraussetzungen und Behauptung zu verwenden.

Das Hilfsmittel **"Tabelle"** kann dem übersichtlichen Abspeichern von Aufgabenstellungen, dem Finden eines Lösungsplans und dem Abspeichern dieses Lösungsplans dienen.
Beim Lösen von logisch-kombinatorischen Aufgaben in 3.1. und von Sachaufgaben in 3.4. werden durch dieses Hilfsmittel Zuordnungen festgehalten. Da Tabellen nach dem Eintragen der Daten häufig ergänzt (weiter gefüllt) werden, sollte man die Schüler von Anfang an daran gewöhnen, die Reihenfolge der Eintragungen kenntlich zu machen.
Bei Sachaufgaben werden in die Felder der Tabelle Konstante, Variable oder Terme aus Konstanten oder Variablen eingetragen; bei den logisch-kombinatorischen Aufgaben wird in den Feldern das Bestehen oder Nichtbestehen von Zuordnungen festgehalten.
Impulse, durch die man den Einsatz dieses Hilfsmittels steuern kann, findet man in /9/, S. 8f. .

Auf **"Skizzen"** als Hilfsmittel beim Lösen von Bewegungsaufgaben oder anderen Sachaufgaben wird kaum zurückgegriffen, dies wird erst in der AG Klasse 7 wieder eine wichtige Rolle spielen.
Wenn erforderlich, wird man sich mit einer Wiederholung aus der AG Klasse 5 begnügen (vgl. /9/, S.9f.) .

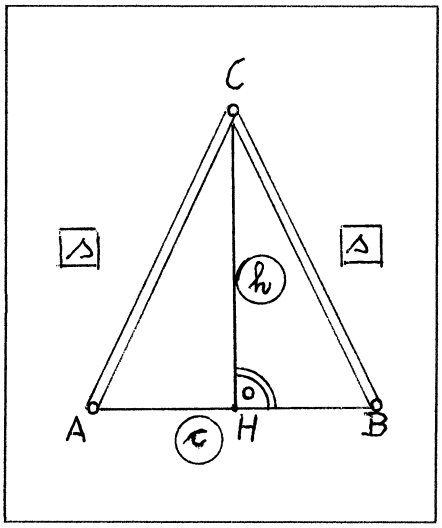
Wesentlich wichtiger ist in der AG Klasse 6 das Hilfsmittel **"Mengendiagramm"**, das nicht nur beim Lösen gewisser logisch-kombinatorischer Aufgaben in 3.1., sondern vor allem in 3.6. zum

Veranschaulichen von Beziehungen zwischen Mengen oder Verknüpfungen von Mengen bzw. zum Darstellen einiger Gesetze aus der Mengenlehre dient.

Von großer Bedeutung für die AG Klasse 6 ist beim Lösen geometrischer Aufgaben in 3.9.2., 3.9.3. und 3.9.4. das Hilfsmittel **"informativ gestaltete Planfigur"**, das sowohl dem Abspeichern der Aufgabenstellung als auch dem Abspeichern eines Lösungsplans dienen kann.
Wir treffen folgende Vereinbarungen:

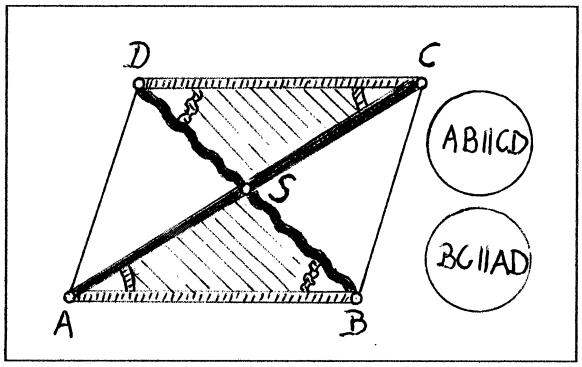
"Start" (Gegebenes; Voraussetzung)	=	"grün" ;
"Ziel" (Gesuchtes; Behauptung)	=	"rot" ;
"Teilziel" (Hilfsgröße; abgeleitete oder hinreichende Feststellung)	=	"blau" .

Kongruente Strecken oder Winkel werden gleichfarbig gezeichnet, hier:
═══ ◁ "grün" ; ▬▬ ◁ "rot"; ┅┅┅ ◁ "blau" .
Kongruente Figuren werden entsprechend gleichfarbig schraffiert.
Ist eine Streckenlänge oder Winkelgröße gegeben, gesucht bzw. Hilfsgröße, dann wird die zugehörige Bezeichnung "grün", "rot" bzw. "blau" geschrieben, hier: (a), [b], (c).



So ist z.B. durch nebenstehende Figur folgende geometrische Bestimmungsaufgabe festgehalten:
"In einem gleichschenkligen Dreieck ABC ist aus der gegebenen Basislänge $\overline{AB}$ = c und der gegebenen Höhenlänge $\overline{CH}$ = h die gemeinsame Schenkellänge $\overline{AC}$ = $\overline{BC}$ = s zu berechnen."

Tritt "Parallelität" als Voraussetzung oder Behauptung auf, dann kann man etwa AB||CD "grün" bzw. "rot" neben die Figur schreiben. Auf diese Weise läßt sich nicht nur der Satz, daß sich im Parallelogramm die Diagonalen halbieren, sondern auch ein Beweis dieses Satzes - wie nebenstehend angegeben - in einer Figur abspeichern. Dabei wurde in leicht deutbarer Weise festgehalten, daß verschiedene Paare kongruenter Strecken bzw. Winkel vorkommen.

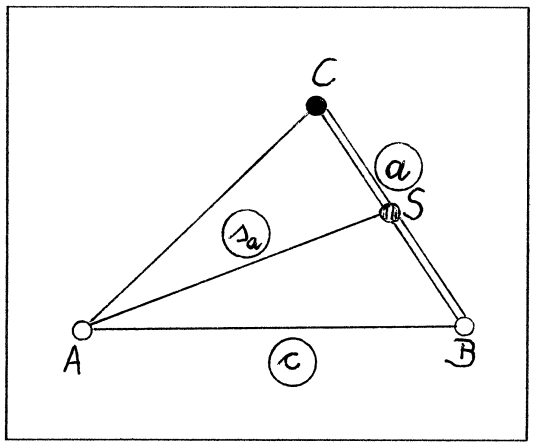


Wie diese Vereinbarungen auf Konstruktionsaufgaben übertragen werden können, soll nebenstehende Figur erläutern:

Aufgabe:
Zu konstruieren ist ein Dreieck ABC aus gegebenem $\overline{AB}$ = c , $\overline{BC}$ = a und $\overline{AS}$ = s_a , wobei $\overline{AS}$ die Seitenhalbierende der Seite $\overline{BC}$ ist.

Lösungsplan:
Beginne mit den gegebenen Punkten A, B ("grün), für die $\overline{AB}$ = c gilt; konstruiere den Hilfspunkt S ("blau") und dann den gesuchten Punkt C ("rot") .

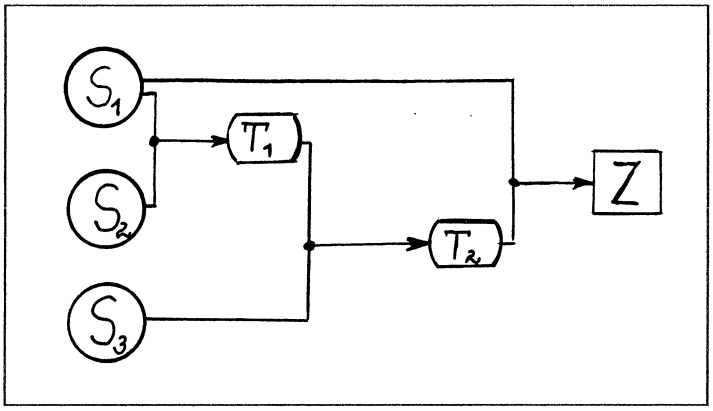
Erfahrungsgemäß werden solche Vereinbarungen von den Schülern schnell verstanden, akzeptiert und richtig gedeutet.



1.2. Logische Grundlagen

Das Bereitstellen gewisser mengentheoretisch-logischer Grundlagen spielt in der AG Klasse 6 eine große Rolle; die Abschnitte 3.5., 3.6., 3.7. und 3.8. dienen vorwiegend diesem Ziel. Dabei ist es von entscheidender Bedeutung, daß die Schüler für eine Beschäftigung mit dieser (etwas trockenen) Materie hinreichend motiviert werden. Trockenes Theoretisieren mit dem Ziel, abprüfbare Kenntnisse zu vermitteln, ist auf jeden Fall zu vermeiden! Die Schüler sollen keine Definitionen auswendiglernen, sondern lediglich beim Lösen von Aufgaben nachweisen, daß sie sich die entsprechenden Begriffe angeeignet haben. Das Vermitteln dieser Begriffe sollte daher stets mit dem Lösen von Aufgaben verbunden werden.
Es geht dabei vor allem um die **Begriffe** *"Aussage - Wahrheitswert", "Aussageform - Erfüllungsmenge", "Term"* und um den Zusammenhang zwischen *Konjunktion, Alternative, Implikation, Äquivalenz* von Aussageformen sowie *Durchschnitt, Vereinigung, Inklusion, Gleichheit* der zugehörigen Erfüllungsmengen und um die Unterscheidung von *Einzel-, Existenz-* und *Allaussagen* sowie von *erfüllbaren, nicht erfüllbaren* und *allgemeingültigen Aussageformen* (vgl. dazu 3.5. und 3.6. sowie den zugehörigen "Merkstoff") . Es wird die Rolle von Beispielen bzw. von Gegenbeispielen für den Beweis einer Existenzaussage bzw. die Widerlegung einer Allaussage besprochen. In 3.9.4. werden geometrische Örter als Erfüllungsmengen von Aussageformen eingeführt.
Auch auf diesem Gebiet sollen die Schüler die Vorteile der "Symbolsprache" erkennen und nutzen lernen. Dabei ist es jedoch von entscheidender Bedeutung, daß man immer wieder die Rückübersetzung aus der "Zeichensprache" in die "Wortsprache" fordert. Man sollte konsequent darauf achten, daß die unter Verwendung mengentheoretischer Bezeichnungen in "Kurzform" festgehaltenen Beweise oder Konstruktionsbeschreibungen von den Schülern in sprachlich einwandfreier Form mündlich wiedergegeben werden. Erfahrungsgemäß fällt dies vielen Schülern schwer.

Beim Besprechen der **Struktur von Aufgaben und Lösungen** lernen die Schüler im Laufe der Zeit einige *grundlegende Begriffe* kennen.
Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über *Start* und *Ziel*.
Eine Aufgabe *lösen* heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt oft über gewisse *Teilziele*, die mit Hilfe gewisser *Hilfsmittel* erreicht werden.
In solchen Fällen läßt sich der Lösungsplan in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten. Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Abbildung zu entnehmen.



Diese Begriffe gestatten eine zweckmäßige Einteilung in **Aufgabenarten**.
Bei **Bestimmungsaufgaben** spielen *"Gegebenes - Gesuchtes"* die Rolle von "Start - Ziel", bei **Beweisaufgaben**, die in der AG Klasse 6 eingeführt werden, sind dies die Begriffe *"Voraussetzungen - Behauptung"*, bei **Entscheidungsaufgaben** (die ebenfalls erst in der AG Klasse 6 eingeführt werden) sind es die Begriffe *"Aussage - Wahrheitswert"* .

Bereits in der AG Klasse 5 lernen die Schüler **2 Arten von Bestimmungsaufgaben** unterscheiden (vgl. auch den zugehörigen "Merkstoff" für die AG Klasse 6).

Eine dritte Art von Bestimmungsaufgaben, die in der Regel algorithmisch lösbar sind, wird nur erwähnt, aber nicht besonders hervorgehoben. Es sind dies Aufgaben, bei denen ein Term gegeben ist und dessen Wert (nach Interpretation der vorkommenden Variablen) gesucht ist.

Bei den **Bestimmungsaufgaben vom Typ I** treten als Gegebenes eine oder mehrere *Aussageformen* (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen Ungleichungen u.ä.) , als Gesuchtes deren *Erfüllungsmenge* auf.
Durch Umformen von oder Folgern aus den gegebenen Aussageformen gelangt man durch Vorwärtsarbeiten zu *"vereinfachten Aussageformen"* als abgeleiteten Teilzielen. Die dabei eingesetzten Hilfsmittel sind Umformungsregeln, Sätze oder Definitionen.
Ermittelt man dagegen durch systematisches Probieren die Erfüllungsmengen der gegebenen Aussageformen, um dann durch Durchschnittsbildung dieser Erfüllungsmengen oder durch Ausssondern von Elementen, die diese Aussageformen nicht erfüllen, zum Ziel zu gelangen, dann treten *"vereinfachte Teilmengen"* als Teilziele auf.

In der AG Klasse 5 kamen bereits gewisse *logisch - kombinatorische Aufgaben, zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben* sowie *Gleichungen* und *Ungleichungen* als derartige *Bestimmungsaufgaben vom Typ I* vor.
In der AG Klasse 6 treten diese Aufgabenarten wiederum auf, hinzu kommen noch *geometrische Konstruktionsaufgaben.*
In der AG Klasse 7 werden dann auch *geometrische Ortsaufgaben*, in der AG Klasse 9 *Gleichungssysteme* hinzukommen.

Bestimmungsaufgaben des Typs I lassen sich stets in folgender Weise formulieren:

> *"Ermittle alle Elemente* (Zahlen, Zahlenpaare, Zuordnungen, Anordnungen, Punkte, Figuren u.ä.), *die folgende Aussageformen* (Bedingungen, Beziehungen, Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme u.ä.) *erfüllen.*

Bei Aufgaben diesen Typs müssen neben der Angabe der gesuchten *Erfüllungsmenge* (für die bei Konstruktionsaufgaben die Konstruktionsbeschreibung als algorithmisches Verfahren zum Ermitteln der Erfüllungsmenge tritt) noch zwei Sätze bewiesen werden:

I) Wenn ein Element alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Erfüllungsmenge.
(*Einzigkeitsnachweis*; begründete Herleitung);

II) Wenn ein Element zur angegebenen Erfüllungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gegebenen Bedingungen.
Existenznachweis; Probe).

Bereits in der AG Klasse 5 lernen die Schüler auch **Bestimmungsaufgaben vom Typ II** kennen. Als Gesuchtes tritt hier eine Größe als *Unbekannte* auf, gegeben sind *Daten* (Größen) und/oder *Beziehungen* .
Als Teilziele treten hier *Hilfsgrößen* auf, die sich aus den gegebenen Größen berechnen lassen. Als Hilfsmittel werden sehr oft Formeln, aber auch Sätze, Definitionen und Umformungsregeln oder (implizit gegebene) Bedingungen oder Beziehungen verwendet.
Bei derartigen Aufgaben kann man die Knoten des Lösungsgraphen stets mit Termen (Größen) belegen. Das hat den Vorteil, daß man die Gleichartigkeit des Vorgehens bei der Suche nach einem Lösungweg durch kombiniertes VA/RA bei derartigen Bestimmungsaufgaben und bei Beweisaufgaben sehr gut verdeutlichen kann.

Dieser Aufgabentyp kommt im Unterricht sehr häufig vor. Zu ihm gehören die *Sach- und Anwendungsaufgaben* sowie die *geometrischen Bestimmungsaufgaben* .

Beim Lösen derartiger Aufgaben ermittelt man (als *"Ansatz"*) zunächst eine oder mehrere Aussageformen (meist eine Gleichung oder ein Gleichungssystem), deren Lösungsmenge in der Regel (wegen des zugrundeliegenden Sachverhalts) genau ein Element besitzt.
Es bestehen also folgende Zusammenhänge zwischen diesen beiden Aufgabentypen (die den Schülern meist als völlig unterschiedliche Aufgabenarten erscheinen): Aufgaben vom Typ II führen auf eine spezielle Form von Aufgaben des Typs I (die dann in der Regel keine problemhaften Aufgaben sind); Aufgaben des Typs II sind Spezialfälle von Aufgaben des Typs I, weil bei ihnen die Anzahl der Lösungen von vornherein feststeht.

Wenn dem Aufgabentext eindeutig zu entnehmen ist, daß genau eine Lösung existiert, dann kann man nach der begründeten Herleitung (dem Einzigkeitsnachweis) auf eine Probe (den Existenznachweis) verzichten. Wenn dabei nicht explizit gefordert wird, daß eine begründete Herleitung anzugeben ist, dann kann man sich auch damit begnügen, die (z.B. erratene) Lösung hinzuschreiben und durch eine Probe nachzuweisen, daß es tatsächlich die gesuchte Lösung ist.

Bereits in der AG Klasse 5 werden die Schüler auf folgendes aufmerksam gemacht :
Es ist durchaus möglich, daß die zur Lösung eines praktischen Problems benötigten Meßdaten unvollständig oder fehlerhaft übermittelt wurden. Derartige Aufgaben können durchaus *unterbestimmt* (und damit nicht eindeutig lösbar) oder *überbestimmt* sein, wobei im letztgenannten Fall eine "überflüssige" Angabe mit den restlichen Daten verträglich sein kann (was eine eindeutige Lösung der Aufgabe ermöglicht) oder (etwa aufgrund eines Meß- oder Übertragungsfehlers) den restlichen Daten widerspricht, so daß die Aufgabe keine Lösung besitzt.
Es ist daher zweckmäßig, derartige Aufgaben wie folgt zu formulieren:

> "Weise nach, daß sich die gesuchte Größe aus den gegebenen Größen und Bedingungen eindeutig ermitteln läßt, und gib diese Größe an!"

Noch günstiger ist folgende Formulierung:

> "Untersuche, ob sich die gesuchte Größe aus den gegebenen Größen und Bedingungen eindeutig ermitteln läßt; ist dies der Fall, dann ermittle die Größe!"

Bei einer derartigen Formulierung werden auch für Bestimmungsaufgaben vom Typ II ein Einzigkeitsnachweis und ein Existenznachweis explizit gefordert.

Bei Sachaufgaben sollte man auf die Notwendigkeit einer *Probe am Text* (und nicht nur einer Probe für die Lösung der Ansatzgleichung) hinweisen. Da man nie sicher sein kann, daß alle Informationen voll ausgeschöpft wurden, kann man auch nicht sicher sein, daß jede der gegebenen aber nicht verwendeten Bedingungen von der ermittelten Lösung auch erfüllt wird.

Anhand von Bestimmungsaufgaben vom Typ II werden die Schüler erstmals mit **parameterhaltigen Aufgaben** bekanntgemacht. Sie sollen erkennen, daß zu jeder parameterhaltigen Aufgabe eine Klasse von unendlich vielen Aufgaben mit konkret gegebenen Daten gehört, deren Lösung man leicht aus der Lösung der parameterhaltigen Aufgabe gewinnen kann. Bei Konstruktionsaufgaben sollen sie erkennen, daß es von der Art der Belegung der Parameter abhängen kann, ob eine Aufgabe keine, genau eine, endlich oder unendlich viele Lösungen besitzt.

Als neuen Aufgabentyp lernen die Schüler in Klasse 6 Beweisaufgaben kennen, wobei es in der Regel um **direkte Beweise von Allaussagen** geht.
Ein solcher Beweis läßt sich stets als eine endliche Folge von Beweisschritten darstellen, wobei jede Zeile aus einer Implikation nebst Begründung besteht.
Ein Beweis eines implikativ formulierten Satzes ist erbracht, wenn seine Behauptung aus seinen Voraussetzungen unter Verwendung von Axiomen, Definitionen, bewiesenen Sätzen oder

Umformungsregeln abgeleitet wurde. Es ist üblich, hinter die abgeleitete Behauptung das "w.z.b.w." zu schreiben. Dies darf bei den Schülern jedoch nicht die falsche Ansicht aufkommen lassen, daß durch einen Beweis die Wahrheit der Behauptung (als kategorische Feststellung) nachgewiesen wird. Man sollte daher in der AG Klasse 6 jeden Beweis mit der mündlichen Feststellung abschließen lassen: "Damit ist bewiesen: Wenn ..... (Voraussetzung) ..... , dann ..... (Behauptung) ..... " .

Für das schriftliche Darstellen von Beweisen verwenden wir *dreispaltige Beweisschemata* (vgl. 3.8. und 3.9.3.) Bei dieser Art der Darstellung kann man leicht überprüfen, ob der Beweis (relativ) vollständig und korrekt geführt wurde, ob er ohne Berufung auf die Anschauung (auf eine spezielle Beweisfigur) auskommt. Zirkelschlüsse, das Verwenden nicht abgeleiteter Feststellungen sowie fehlende Begründungen fallen sofort ins Auge.
Ein wichtiges Hilfsmittel sind auch hier *Lösungsgraphen*, die den Schülern von Bestimmungsaufgaben her bereits bekannt sind. Um einen gefundenen Beweis festzuhalten, werden die Anfangsknoten des gerichteten Graphen mit den Voraussetzungen (bzw. mit den eingeführten Zusatzvoraussetzungen), sein Endknoten mit der Behauptung des zu beweisenden Satzes und die restlichen Knoten mit abgeleiteten Feststellungen belegt (vgl. 3.8. und 3.9.3.) . In der Regel werden die für die Begründungen verwendeten Beweismittel im Lösungsgraphen nicht schriftlich fixiert. Wurde ein Beweis gemeinsam bearbeitet, dann erhält ein Schüler anschliessend den Auftrag, den Beweis in sprachlich einwandfreier Form vorzutragen, wobei er sich des Lösungsgraphen und der informativ gestalteteten Beweisfigur bedienen darf. Weitere Bemerkungen zur Lösungsdarstellung findet man in /19/ .

Von Bedeutung für das Beweisen und für Strukturbetrachtungen bei Sätzen ist die Fähigkeit der Schüler, Sätze in Wenn-dann-Form zu formulieren bzw. Voraussetzungen und Behauptung eines Satzes zu erkennen.
Die Schüler lernen $V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_n \Rightarrow B$ als aussagenlogische Struktur eines Satzes mit mehreren Voraussetzungen kennen. Anknüpfend an den Unterricht wird das **Umkehren eines Satzes** mit einer Voraussetzung behandelt. Über den Unterricht hinaus geht das Umkehren von Sätzen mit mehr als einer Voraussetzung sowie das **Umformen von Sätzen** mit einer oder mit mehreren Voraussetzungen.
Neben dem Bilden von Kontrapositionen wird in leistungsstarken AGn auch das Herausziehen von Teilvoraussetzungen sowie das Zusammenfassen von Satz und wahrer Umkehrung zu einer Genau-dann-wenn-Aussage behandelt (vgl. 3.7. und 3.9.3.) .

1.3. Sachkenntnisse und Fertigkeiten

Vor allem im Interesse der leistungsschwächeren Schüler sollte man jede Gelegenheit nutzen, Unterrichtsstoff implizit zu wiederholen. Dies bietet sich vor allem in der Teilbarkeitslehre, in der Planimetrie und beim Behandeln von Bewegungen an. Man sollte von den Schülern als Hausaufgabe fordern, bestimmte Stellen des Lehrbuchs nachträglich durchzuarbeiten.

In der *Teilbarkeitslehre* lernen die Schüler über den Unterrichtsstoff hinaus das Darstellen von Zahlen als Produkt von Primzahlpotenzen, das hierauf basierende Verfahren zum Ermitteln des ggT(a;b) und des kgV(a;b) , die Grundgleichung der Zahlentheorie (Satz über die Division mit Rest), den Euklidischen Algorithmus zur Ermittlung des ggT(a;b) und den Satz $ggT(a;b)\cdot kgV(a;b) = a\cdot b$ kennen.

In der *Lehre von den Bewegungen* lernen die Schüler allgemeine Eigenschaften der Bewegungen sowie spezielle Eigenschaften von Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen kennen und erfahren, daß sich alle Bewegungen als Produkte von Geradenspiegelungen darstellen lassen (Dreispiegelungssatz).

In der *Planimetrie* kann man zusätzlich zum Unterrichtsstoff den Satz über entgegengesetzt liegende Winkel an Parallelen, den "kleinen" Innenwinkelsatz sowie den Satz über die Mittellinie im Dreieck behandeln.

In der *Arithmetik* werden auf dem Gebiet des Umgangs mit Variablen sowie im Umformen von Termen und Gleichungen Fertigkeiten angestrebt, die über die Anforderungen im Unterricht hinausgehen, teilweise auch dem Unterrichtsstoff vorgreifen.

Ferner lernen die Schüler eine erste Fassung des Begriffs *"Wahrscheinlichkeit"* und dessen Anwendung beim Lösen von Aufgaben kennen.

2. ZU EINIGEN ORGANISATORISCHEN UND DIDAKTISCHEN FRAGEN

Es sei nochmals an unsere Forderung erinnert, die Zirkel stets so zu gestalten, daß die leistungsstärksten Schüler nicht unterfordert werden. Dabei sollte man die Möglichkeiten der **äusseren Differenzierung** voll ausschöpfen. Je homogener das Leistungsvermögen der Mitglieder einer Gruppe ist, desto einfacher gestaltet sich die didaktische Arbeit.

Da jedoch eine gewisse Streuung der Leistungsfähigkeit in jeder AG vorhanden sein wird, kann man auf Maßnahmen der **inneren Differenzierung** nicht verzichten.
Bereits bei den (auf freiwilliger Grundlage anzufertigenden) *Hausaufgaben* sollte man differenzieren. Leistungsschwächere Schüler lasse man so lange gemeinsam gefundene Lösungen darstellen, bis sie diese Technik beherrschen.
Es empfiehlt sich, für jeden Zirkel zwei "Angebote" zu planen und an der Wandtafel festzuhalten.
Das "Normalangebot" richtet sich zunächst an alle Schüler. Es besteht aus der Angabe aller Aufgaben, die im jeweiligen Zirkel behandelt werden sollen. sowie aus an der Wandtafel festgehaltenen "Leerstellen " für Teilresultate und das Endresultat der zu behandelnden Aufgaben. Die Schüler werden aufgefordert, sich zu melden, wenn sie eine Aufgabe gelöst zu haben glauben und sich dann sofort der nächsten Aufgabe zuzuwenden.
Nach einer angemessenen Zeit läßt sich der AG-Leiter die gewonnenen Teilresultate und Endresultate nennen, hält sie kommentarlos an der Wandtafel fest und fragt nur, ob es Schüler gibt, die andere Resultate erhalten haben. Ist das der Fall, dann werden auch diese Resultate an der Wandtafel festgehalten, und die Schüler werden aufgefordert, zu entscheiden, welches der angeschriebenen Resultate das richtige ist.
Wer die Aufgaben des "Normalangebots" richtig gelöst hat, beschäftigt sich mit dem "Zusatzangebot", das Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades enthält.
Leistungsstarke Schüler, die überzeugt sind, die Aufgaben des "Normalangebots" lösen zu können, dürfen sich sofort mit den Aufgaben des "Zusatzangebots" beschäftigen. In der Regel sind dies nur einige wenige Schüler der AG, so daß der Lehrer hinreichend Zeit hat, diese Schüler individuell zu beraten, während die Lösungen zu den Aufgaben des "Normalangebots" nach angemessener Zeit mit allen AG-Mitgliedern gemeinsam besprochen werden.
Auf weitere Möglichkeiten innerer Differenzierung werden wir in den Bemerkungen zu Formen der Zirkelarbeit und zu einigen didaktischen Prinzipien eingehen.

In der Regel sollten in einem 90-minütigen Zirkel höchstens 60 Minuten für das Erarbeiten des Stoffs aus den betreffenden Themenkomplexen 3.1. bis 3.9.4. in /1/, S.1 - 18 verwendet werden. Die restliche Zeit sollten sich die Schüler mit dem **Lösen der "vermischten Aufgaben"** in /1/, S.18 - 29 beschäftigen. Hier kommt es vor allem darauf an, herauszufinden, welche der kennengelernten heuristischen Prinzipien, Strategien oder Hllfsmittel beim Lösen der betreffenden Aufgabe nützlich sein könnten.
Hier empfehlen wir folgendes didaktische Vorgehen: Der AG-Leiter wählt 3 vermischte Aufgaben aus und fordert die Schüler auf, diese Aufgaben durchzulesen und u.U. Fragen zum Aufgabentext zu stellen. Dann soll jeder Schüler für sich den Schwierigkeitsgrad der drei Aufgaben einschätzen und die Aufgaben diesbezüglich ordnen. (Dies hilft bei der Phase "Verstehen der Aufgabe" und ist auch für Klausuren, bei denen man stets mit der vermutlich leichtesten Aufgabe beginnen sollte, bedeutsam). Hierüber wird kurz diskutiert.
Dann darf jeder Schüler angeben, mit welcher Aufgabe er sich als erstes beschäftigen möchte, wobei dies keinesfalls die Aufgabe sein muß, die von ihm als leichteste eingeschätzt wurde. Der AG-Leiter entscheidet, ob vor Beginn der selbständigen Schülerarbeit darüber diskutiert wird, welche der eingeführten heuristischen Vorgehensweisen bei jeder der drei Aufgaben nützlich sein dürfte, oder ob dies erst in der Phase der Auswertung geschehen soll. Desgleichen entscheidet der AG-Leiter, welche Schüler sich mit welcher Aufgabe beschäftigen sollen

(wobei die Wünsche der Schüler weitgehend berücksichtigt werden sollten) und ob die gesamte Lösung in selbständiger Schülerarbeit zu bewältigen ist oder ob bereits nach Teilresultaten eine gemeinsame Auswertung erfolgen soll.

Die Befähigung der Schüler zu selbständigem Erwerb von Wissen und Können wurde als eines der zentralen Ziele einer AG hervorgehoben. Man sollte daher die Schüler bewußt an ein zielgerichtetes **"Literaturstudium"** heranführen und sie dabei anleiten. Auf das Durcharbeiten von Lehrbuchstellen wurde bereits hingewiesen. Diesbezüglich effektiver ist die Anleitung zum *Erarbeiten des "Merkstoffs"* aus der Aufgabensammlung.
Folgendes Vorgehen ist dabei zu empfehlen: Die Schüler erhalten den Auftrag, in begrenzter Zeit zugehörige konkrete Beispiele zu bilden, die dann gemeinsam besprochen werden. Abschließend erhalten sie den Auftrag, den erarbeiteten Sachverhalt mit eigenen Worten wiederzugeben. Die zu erarbeitende Textstelle sollte dabei am Anfang 8 - 10 Zeilen nicht überschreiten. So wird man etwa zunächst nur das Bilden der Kontraposition von Sätzen mit einer Voraussetzung erarbeiten und üben lassen, bevor man sich in einer zweiten Phase dem Umformen von Sätzen mit zwei Voraussetzungen zuwendet.
Eine etwas andere Form des Hinführens zum "Literaturstudium" besteht darin, gemeinsam erarbeitete Sachverhalte von den Schülern nachträglich im "Merkstoff" durcharbeiten zu lassen. Die Definitionen von "Aussage", "Aussageform", "Term" in /1/, S.31, die Bemerkungen über Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis in /1/, S. 32 und die Musterlösungen in /1/, S.35-36 sind hierfür geeignet.
Die Schüler sollten stets auch die Aufgabensammlung /4/ für die AG Klasse 5 mitbringen. Hier wird man vor allem die Musterlösungen auf den Seiten 37 - 40 nachträglich durcharbeiten lassen.
Ferner ist es sehr zu begrüßen, wenn die Schüler die *Zeitschrift "Alpha"* erwerben oder sich besorgen und am Alpha-Wettbewerb teilnehmen. Darüberhinaus sollte der AG-Leiter geeignete Artikel aus dieser Zeitschrift auswählen, von den Schülern als Hausaufgabe durcharbeiten lassen und anschließend im Zirkel besprechen.
Erfahrungsgemäß treten bei Schülern dieser Klassenstufe hinsichtlich der Bereitschaft und der Fähigkeit, sich Wissen aus Literatur anzueignen, beträchtliche Unterschiede auf. Das eingangs genannte Ziel läßt sich mit der Mehrzahl der Schüler erst im Laufe mehrerer Jahre erreichen. Es ist jedoch wichtig, daß die leistungsstärksten Schüler auch diesbezüglich bereits in Klasse 6 voll gefordert werden.

Beim Einsatz verschiedener **Formen von Zirkelarbeit** sorge man für Abwechslung. Es ist von Vorteil, wenn sich ein Zirkel im äußeren Ablauf deutlich von einer Unterrichtsstunde unterscheidet. Der Lehrer sollte in der außerunterrichtlichen Arbeit die Möglichkeit ausnützen, neue Formen zu erproben.

Beim **Unterrichtsgespräch** achte man darauf, daß die leistungsstärksten Schüler die Lösung nicht gleich verraten und dadurch den leistungsschwächeren Schülern die Möglichkeit zu intensiver selbständiger geistiger Tätigkeit nehmen (vgl. hierzu die noch folgenden Bemerkungen zu einigen "didaktischen Prinzipien").

Bei der **Stillarbeit** achte man darauf, daß die leistungsstärksten Schüler nicht unterfordert werden. Es ist unrationell, allen Schülern nur *eine* Aufgabe zu stellen mit dem Ziel, diese Aufgabe komplett zu lösen. Auf rationellere Möglichkeiten wurde bereits hingewiesen.
Auch folgende Variante kann vorteilhaft sein: Wenn alle Schüler sich mit einer bestimmten, schwierigen Aufgabe beschäftigen sollen, dann kann man die Stillarbeit nach einer gewissen Zeit (noch bevor der erste Schüler einen Lösungsweg gefunden hat) unterbrechen und die Schüler auffordern, über ihre *Lösungsideen zu diskutieren*. Bei dieser Gelegenheit kann man

auch zu einem bewußten Einsatz der kennengelernten heuristischen Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien anregen.
Ferner kann es nützlich sein, zunächst den *"groben Lösungsplan"* mit den Schülern zu erarbeiten, dessen Struktur an der Wandtafel festzuhalten und für wichtige Teilziele und das Endresultat "Leerstellen" freizulassen. Dann können die Schüler, wie bereits beschrieben, "Angebote" und "Gegenangebote" für das Füllen der Leerstellen unterbreiten. Auf diese Weise gewinnt der Lehrer einen guten Überblick über den Fortgang der Arbeit.
So sollte man auch vorgehen, wenn man den Schülern eine Folge von Aufgaben zum Bearbeiten gestellt hat. Vor allem bei algorithmisch lösbaren Aufgaben kommt es vor, daß leistungsschwächere, aber gewissenhafte Schüler die von "schnellen" Rechnern gelieferten Resultate korrigieren.

Eine für Zirkel gut geeignete, noch viel zu wenig eingesetzte Unterrichtsform ist die **Gruppenarbeit**. Im Unterschied zu Unterrichtsgespräch und Stillarbeit werden die Schüler aufgefordert, innerhalb der Gruppe (mit zwei bis drei Mitgliedern) gemeinsam zu versuchen, die Aufgabe zu lösen.
Man muß die Zusammensetzung der Gruppen nicht konstant lassen, sondern kann sie in Abhängigkeit vom gestellten Ziel auch abändern. Man muß die Zusammensetzung der Gruppen nicht immer selbst vornehmen, sondern kann dies auch den Schülern überlassen.
Wenn man Schüler mit etwa gleicher Leistungsfähigkeit jeweils zu einer Gruppe zusammenfaßt, also Gruppen mit unterschiedlicher Leistungsfähigkeit bildet, dann kann man natürlich nicht allen Gruppen dieselbe Aufgabe stellen, was eine gemeinsame Auswertung unmöglich machen würde. Dennoch kann eine solche Variante im Hinblick auf die innere Differenzierung nützlich sein.
Besteht eine Gruppe aus Schülern mit unterschiedlicher Leistungsstärke, dann wird in der Gruppe eine Arbeitsteilung einsetzen. Dabei besteht die Gefahr, daß die leistungsschwächeren Schüler zu wenig geistig aktiv sind. Der Vorteil besteht darin, daß alle Gruppen dieselbe Aufgabe bearbeiten können, daß man die Gruppenarbeit nach einer gewissen Zeit unterbrechen und eine Diskussion über die Brauchbarkeit gefundener Lösungsideen und über erreichte Zwischenergebnisse anregen kann. Nach einer solchen Diskussion können die Gruppen ihre Arbeit fortsetzen und die gewonnenen Anregungen ausnützen.

Heuristische Schulung besteht für uns im bewußten Vermitteln von weitgehend inhaltsunabhängigen Fragen oder Impulsen, durch deren Anwendung ein Lösungerfolg zwar nicht garantiert wird, wohl aber die Wahrscheinlichkeit, zu einer Lösung zu gelangen, stark anwächst.

Beim bewußten Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen sind einige **didaktische Prinzipien** zu beachten:

1. Heuristisches Vorgehen läßt sich nur im Prozeß angestrengter geistiger Tätigkeit beim weitgehend selbständigen Lösen anspruchsvoller Aufgaben (und nicht etwa nur durch Zuhören) erlernen. Dazu muß man dem Schüler *Zeit lassen*! Ein kurzschrittiges Steuern der Schülerhandlungen mit dem Ziel, möglichst rasch zur einer Lösung zu gelangen, ist eine für die heuristische Schulung unbrauchbare Methode.

2. Heuristische Hilfsmittel, Strategien oder Prinzipien sollten stets anhand solcher Aufgaben eingeführt werden, die der Schüler nicht oder nur mit unangemessenem Aufwand selbständig lösen könnte.
Nach einer *"Trainingsphase"*, in der eine geeignete Aufgabenfolge eingesetzt wird, muß dann eine Phase kommen, bei der sich der Schüler beim Lösen "vermischter" Aufgaben *selbständig* für eine heuristische Vorgehensweise entscheiden muß.

Je begabter ein Schüler ist, desto häufiger sollte man ihn auffordern, gewohnte Bahnen zu verlassen und es einmal auch "ganz anders zu versuchen".

3. Um die Gemeinsamkeiten des Vorgehens beim Lösen unterschiedlicher Aufgaben hervorzuheben, sollte sich der AG-Leiter der *"genormten Impulse"* bedienen, die zur Charakterisierung der Strategien verwendet wurden. Es sind dies die (inhaltsunabhängigen) *"Hauptimpulse"* , die nur dann durch *"Unterimpulse"* ergänzt werden sollen, wenn der Hauptimpuls noch nicht zum Ziel geführt hat. Auch diese Unterimpulse sollten vom konkreten Aufgabeninhalt noch möglichst wenig abhängen. Konkrete Lösungshinweise sollten nur notfalls und dann ganz zum Schluß kommen.

4. Das Endziel besteht darin, daß die Schüler derartige Fragen und Impulse übernehmen und beim Lösen problemhafter Aufgaben - in der Regel unterbewußt - einsetzen. Sie sollten jedoch dazu angehalten werden, beim Auftauchen größerer Schwierigkeiten das ihnen zur Verfügung stehende Repertoir an heuristischen Vorgehensweisen bewußt durchzumustern.
Auf diese Weise soll die "strategische Ratlosigkeit" überwunden werden, die darin besteht, daß man keine Idee mehr hat, wie man das Problem anpacken könnte.
Um dies zu erreichen, wird folgendes Vorgehen empfohlen:
Die Fragen und Impulse werden zunächst vom Lehrer formuliert, dann aber möglichst rasch von den Schülern selbst gestellt. Wer einen Lösungsweg gefunden hat, darf ihn nicht verraten, er darf lediglich die nächste Frage stellen, den nächsten Impuls geben.
Auf diese Weise werden die leistungsstärksten Schüler zusätzlich gefordert, die leistungsschwächeren Schüler haben mehr Zeit zur Aneignung der Vorgehensweise und den leistungsschwächsten Schülern bleibt es überlassen, die Lösung zu formulieren.
Im Idealfall spielt der AG-Leiter bei einem Unterrichtsgespräch nur die Rolle eines Dirigenten, der bestimmt, wer zu Wort kommen soll, und der die gestellten Fragen oder Impulse sowie die zugehörigen Antworten wertet.

5. Man sollte Schülern nie einen bestimmten Lösungsweg aufdrängen, sondern sie stets selbst suchen lassen.
Der AG-Leiter sollte möglichst alle naheliegenden Lösungswege einer Aufgabe kennen, um Lösungsvorschläge der Schüler richtig bewerten zu können. Die Schüler sollen wissen, daß man sie aus Gründen der Zeitersparnis im Zirkel vor "Sackgassen" bewahrt, die sich beim selbständigen Lösen nicht ausschließen lassen. Bei der Diskussion nach Phasen der Stillarbeit oder der Gruppenarbeit sollte der AG-Leiter auch auf diese Problematik eingehen.
Wenn es zu einer Aufgabe mehrere wesentlich verschiedene Lösungswege gibt, dann sollte man in der Phase des Rückblicks nach allen diesen Lösungswegen systematisch suchen lassen und nachträglich eine Diskussion über Vorteile und Nachteile der verschiedenen Lösungswege durchführen.

Bei der organisatorischen und methodischen Gestaltung der Zirkel sollte der AG-Leiter stets unser *Hauptziel* im Auge behalten:
Es geht um die systematische Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler, wobei die Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken im Vordergrund steht. Dieses Ziel läßt sich aber nur erreichen, wenn die Zirkel so gestaltet werden, daß den Schülern diese zusätzliche Beschäftigung mit Mathematik auch Spaß macht.

3. VORSCHLÄGE ZUR GESTALTUNG DER ZIRKEL

Bei den Vorschlägen für das Behandeln der einzelnen Stoffabschnitte gehen wir stets von einer Aufzählung möglicher *Ziele* aus, die man dabei ansteuern kann.
Wie in Abschnitt 2. bereits angesprochen, muß der AG-Leiter in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und den Interessen seiner AG bezüglich der angegebenen Ziele Schwerpunkte setzen und dann aus der Aufgabensammlung eine günstige Aufgabenauswahl treffen. Um ihm hierbei zu helfen, geben wir stets eine *"Minimalvariante"* und eine *"Maximalvariante"* an. In den meisten Fällen dürfte ein Vorgehen angemessen sein, das zwischen diesen beiden Varianten liegt.
In der Regel wird man sich in der zweiten Hälfte eines Zirkels mit den *"Vermischten Aufgaben"* befassen (vgl. S.18 - 29 der Aufgabensammlung). Diese durch ein "V" gekennzeichneten 64 Aufgaben werden in folgenden Abschnitten besprochen:
3.1.: V7), V18), V29), V43), V49), V55), V64) .
3.2.: V15), V37), V58) .
3.3.: V2), V12), V20), V26), V28), V32), V39), V54), V56), V63) .
3.4.: V1), V5), V6), V9), V11), V13), V16), V17), V21), V24), V31), V35), V36), V(38), V44), V46), V48), V50), V53), V57) .
3.6.: V22), V27), V34), V41), V52) .
3.9.2.: V3), V8), V10), V14), V19), V25), V30), V33), V42), V45), V47), V51), V60) .
3.10.: V4), V23), V40), V59), V61), V62) .
Die Zuordnung zu diesen Aufgabengruppen ist nicht immer eindeutig möglich; vor allem bei Anwendungsaufgaben über dem Bereich der natürlichen Zahlen ist es oft schwer, zu entscheiden, ob man sie zu den zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben oder zu den Sachaufgaben zählen soll.
Die "Vermischten Aufgaben" sind im allgemeinen nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Unter den Aufgaben V1) bis V20) befinden sich aus jeder der genannten Aufgabengruppen die leichtesten Aufgaben, unter den Aufgaben V21) bis V40) die mittelschweren Aufgaben, unter den Aufgaben V41) bis V64) die schweren Aufgaben.
Die zu einem Stoffgebiet angegebenen "vermischten Aufgaben" sollte man keinesfalls gemeinsam mit den Aufgaben dieses Gebiets behandeln, sondern sie erst einsetzen, wenn hinreichend viel Zeit seit der Behandlung dieses Gebiets verstrichen ist (vgl. hierzu die Ausführungen in Abschnitt 2.) .

3.1. Wir suchen Zuordnungen, Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten

Z i e l e :
- Einführen günstiger Bezeichnungen.
- Tabellen zum Abspeichern von Zuordnungen.
- VA beim Ausfüllen von Tabellen.
- Vollständige Fallunterscheidungen (Ausschließen nicht möglicher Fälle).
- Systematisches Ermitteln von Kombinationen, Variationen und Permutationen.
- Geschicktes Folgern aus gegebenen Bedingungen.
- Extremalprinzip (ungünstigsten Fall betrachten).
- Einzigkeits- und Existenznachweis.

Dieses Stoffgebiet hat keinen direkten Bezug zum Unterrichtsstoff, liefert jedoch Grundlagen für die "Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Ermitteln der Anzahl von "möglichen" und von "günstigen" Fällen).
Wir knüpfen an folgenden Stoff aus der *AG Klasse 5* an, den man bei dieser Gelegenheit wiederholen sollte: "Wer ist wer?"; "Wir lernen systematisch arbeiten"; "Aufgaben, die man im Finstern löst" .

Minimalvariante:
Beim Lösen der "Zuordnungsaufgaben" 1), 2), 4), V7) und der "Anordnungsaufgaben" 5) und 6) lernen die Schüler die Vorteile einer zweckmäßigen Symbolik sowie den Einsatz von Tabellen zum übersichtlichen Erfasssen von Zusammenhängen kennen.
Beim Lösen der Aufgaben 7), 8), 9) und V18) üben die Schüler das systematische Erfassen aller möglichen Fälle und das lexikographische Ordnen.
Beim Lösen der Aufgaben 10) und 11) lernen die Schüler die Anwendung des Extremalprinzips in einfachen Fällen kennen.

Maximalvariante:
Beim weitgehend selbständigen Lösen der anspruchsvollen Zuordnungsaufgaben 3), V43), V55) und V64) sowie der Anordnungsaufgaben V29) und V49) geht es neben dem Einsatz einer zweckmäßigen Symbolik und von Tabellen vor allem um das geschickte Folgern aus gegebenen Bedingungen.
Es wird anhand von Stichproben überprüft, ob die Schüler die restlichen Aufgaben dieses Stoffgebiets selbständig lösen können.

Bezüglich der Impulse, die man beim Lösen von Zuordnungsaufgaben m.H. der Tabellenmethode einsetzen kann, sei auf die Ausführungen in /9/, S.15-16 verwiesen. Bezüglich der exakten Darstellung der Lösung einer solchen Aufgabe verweise man die Schüler auf die Musterlösung in /4/, S.29-30.

Bei der sehr leichten *Aufgabe 1)* kann man die drei Namen mit B , E , H , die drei Berufe mit e , m , i abkürzen.
Aus Bedingung (1) folgt dann $H \neq e$, aus (2) folgt $B \neq i$, aus (3) folgt $E \neq m$ und aus (4) folgt $H \neq i$.
Diese vier Folgerungen kann man wie unten angegeben in einer *Tabelle* festhalten. Da vorausgesetzt wird, daß eine eineindeutige Zuordnung zwischen den drei Namen und den drei Berufen besteht, muß (wie der 3.Spalte zu entnehmen ist) E = i gelten, und wir können diese abgeleitete Feststellung mit (5) bezeichnen und durch ein "+" in der Tabelle festhalten. Hieraus folgt dann $E \neq e$ und $E \neq m$, und man bemerkt, daß Bedingung (3) "überflüssig" ist, weil man die aus ihr abgeleitete Folgerung auch aus den anderen Bedingungen ableiten kann. Fährt man so fort, dann erhält man die unten angegebene ausgefüllte Tabelle, die den gefundenen Lösungsplan abspeichert.

	e	m	i
B			- (2)
E		- (3)	
H	- (1)		- (4)

	e	m	i
B	+ (6)	- (6)	- (2)
E	- (5)	- (3),(5)	+ (5)
H	- (1)	+ (7)	- (4)

Durch diese "begründete Herleitung" ist bislang nur der *Einzigkeitsnachweis* geführt. Da nicht auszuschließen ist, daß in einer der gegebenen Bedingungen eine (für unsere Herleitung nicht benötigte) Angabe versteckt ist, die der von uns hergeleiteten Lösung widerspricht, ist auch ein *Existenznachweis* (als "Probe") erforderlich. Man wird sich also noch überzeugen, daß die von uns gefundene Zuordnung tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllt.

Völlig analog wird die *Aufgabe V7)* gelöst.

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist *Aufgabe 2)* . Hier ist eine Zuordnung zwischen drei Berufen Ma, Sp, Ge, drei Familiennamen M, P, S, drei Vornamen ot, kl, ku und drei Städtenamen a, d, n zu ermitteln. Es wäre unangemessen kompliziert, die paarweisen Zuordnungen in sechs verschiedenen Tabellen festhalten zu wollen. Die relativ komplexen Bedingungen sind in zwei Sätzen enthalten, die sich in *verkürzter und komprimierter Form* wie folgt festhalten lassen:
(S1): M erzählt Sp, daß M den Ma in a besucht hat.
(S2): P erwidert dem M: "Das weiß ich, kl; ku hatte Besuch aus d ."
Aus (S1) folgt unmittelbar $M \neq Sp$ und $M \neq Ma$, also (1) M = Ge .
Aus (S1) folgt weiterhin sofort $Sp \neq a$ und (2) Ma = a , also auch $M \neq a$.
Aus (S2) folgt unmittelbar (3) M = kl sowie $P \neq kl$ und $P \neq ku$, also (4) P = ot .
Diese Folgerungen kann man beim ersten Durchlesen der beiden Sätze gewinnen. Erst bei einem zweiten Durchlesen dürfte man entdecken, daß (5) M = d gelten muß, weil ja der Besucher M aus d kommt, und daß (6) Ma = ku gilt, weil der Besuchte Ma Kurt heißt.
Nun empfiehlt es sich, die entdeckten Zusammenhänge in einer *Tabelle* festzuhalten, um so weitere Zusammenhänge zu entdecken. Da wir mit (3), (4) über die Familiennamen die meisten abgeleiteten Feststellungen besitzen, füllen wir die erste Zeile mit M , P , S , halten in zwei Feldern die Feststellungen (3) und (4) fest und tragen auch die Feststellungen (2) und (5) ein.
Mit Hilfe dieser Tabelle gelingt es sehr einfach, auch die noch nicht verwendeten Feststellungen (1) und (6) zu verwerten. Aus (3) und (4) folgt offensichtlich (7) S = ku . Nun läßt sich zunächst die abgeleitete Feststellung (6) und dann auch die Feststellung (1) eintragen (vgl. rechte Tabelle). Da sich die beiden noch leeren Felder zwangsläufig füllen lassen, haben wir einen Lösungsplan gefunden.

M	P	S
(3) kl	(4) ot	
(2) Ge		
(5) d		

M	P	S
(3)kl	(4) ot	(7) ku
(2) Ge		(6) Ma
(5) d		(1) a

Man beachte: Wenn ein leistungsstarker Schüler die Lösung auch ohne Verwenden der Hilfsmittel "zweckmäßige Symbolik" und "Tabelle" zu finden vermag, dann wird man ihn natürlich gewähren lassen und ihm lediglich eine schwierigere Aufgabe der betrachteten Art vorlegen. Heuristische Hilfsmittel sollten nur vermittelt werden, wenn es dem Schüler nicht gelingt, selbständig eine Lösung zu finden.

Man sollte die Schüler auffordern, die Aufgabenstellungen der Aufgaben 1) bis 4) miteinander zu vergleichen.
Bei Aufgabe 1) wird verraten, daß sich aus den Bedingungen die gesuchte Zuordnung eindeutig ermitteln läßt; der Schüler hat dies zu beweisen und die Zuordnung anzugeben.
Bei Aufgabe 2) bleibt offen, ob eine derartige Zuordnung eindeutig existiert, dies hat der Schüler erst festzustellen.
Dies ist auch bei Aufgabe 3) der Fall. Durch den Teil b) wird zusätzlich hervorgehoben, daß das Ergebnis einer solchen Untersuchung durch Abänderung der Bedingungen geändert werden kann.
Aufgabe 4) enthält mit der Aufforderung "Ermittle alle Zuordnungen" die umfassendste Fragestellung. Dadurch wird am deutlichsten klargestellt, daß auch derartige Aufgaben entweder keine oder genau eine oder mehrere Lösungen besitzen können und daß daher auch hier zu einer vollständigen Lösung neben der Angabe der Lösungen (hier Zuordnungen) stets auch noch ein Einzigkeitsnachweis und ein Existenznachweis erforderlich sind.

Bei *Aufgabe 3)* geht um die Zuordnung zwischen drei Familiennamen A, B, C , drei Berufen De, En, Fr und drei Vornamen g, h, i .

Aus Bedingung (2) folgt sofort $B \neq g$, $B \neq Fr$ und $Fr \neq g$; aus (4) folgt $En \neq h$, $A \neq En$ und $A \neq h$. Aus (1) allein läßt sich keine brauchbare Folgerung ziehen, erst zusammen mit (3) folgt $A \neq g$. Dies sind alle Folgerungen, die sich bei einem ersten Durchlesen der vier Bedingungen ziehen lassen. Wenn man diese Folgerungen in drei *Tabellen* festhält, dann kann man recht leicht aus diesen Folgerungen weitere Folgerungen ziehen.

	De	En	Fr
A		- (4)	
B			- (2)
C			

	g	h	i
A	- (1),(3)	- (4)	
B	- (2)		
C			

	g	h	i
De			
En		- (4)	
Fr	- (2)		

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, aus diesen Folgerungen weitere Folgerungen zu ziehen. Der 2.Tabelle ist z.B. zu entnehmen, daß aus (1),(3) und (4) die Feststellung (6) $A = i$ und damit auch $B \neq i$ und $C \neq i$ folgt. Desgleichen ist klar, daß man aus (1), (3) und (2) auf (7) $C = g$ und damit auch auf $C \neq h$ und $C \neq i$ schließen kann. Auf beiden Wegen gelangt man dann zur Folgerung (8) $B = h$.
Da sich aus keiner der drei Tabellen allein weitere Folgerungen ziehen lassen, muß man nun aus den in mehreren Tabellen festgehaltenen Folgerungen weitere Folgerungen ziehen. So folgt etwa aus $A \neq En$ (1.Tabelle) und $A = i$ (2.Tabelle) die Feststellung (9) $En \neq i$, die man in die 3.Tabelle einträgt. Desgleichen folgt aus $B \neq Fr$ (1.Tabelle) und $B = h$ (2.Tabelle) die Feststellung (10) $Fr \neq h$, die man in die 3.Tabelle einträgt.

	De	En	Fr
A		- (4)	
B			- (2)
C			

	g	h	i
A	- (1),(3)	- (4)	+ (6)
B	- (2)	+ (8)	- (6)
C	+ (7)	- (7)	- (6)

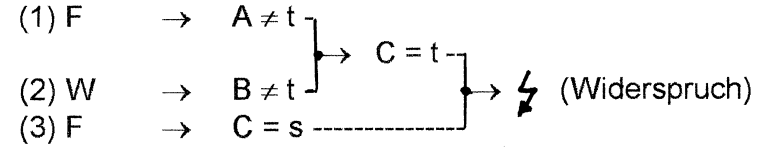
	g	h	i
De			
En		- (4)	- (9)
Fr	- (2)	- (10)	

Der Rest ist einfach. Der 3.Tabelle entnimmt man (11) $En = g$ sowie (12) $De = h$, woraus man dann leicht als Resultat die gesuchten Zuordnungen $A = Fr = i$, $B = De = h$, $C = En = g$ erhält.
Die Tabellen haben nicht nur geholfen, einen Lösungsplan zu finden, sie halten diesen Lösungsplan auch fest. Man sollte nicht versäumen, einen Schüler die exakte Darstellung der Lösung mündlich vortragen zu lassen.

Nun wird man sich der *Aufgabe 3b)* zuwenden. Aus der gebenen Bedingung (5) folgt $A \neq Fr$, was der abgeleiteten Feststellung $A = Fr$ widerspricht. Es gibt daher keine Zuordnung, die die Bedingungen (1) bis (5) erfüllt.
Bei Aufgabe 1) hatten wir erkannt, daß die "überflüssige" Bedingung (3) weggelassen werden kann, daß diese Aufgabe "überbestimmt" ist, weil sich bereits aus (1), (2) und (4) die gesuchte Zuordnung ermitteln läßt. Es wäre also zunächst gar nicht aufgefallen, wenn man die Bedingung (3) durch eine Bedingung (3') ersetzt hätte, die den restlichen Bedingungen widerspricht. Dies unterstreicht die Notwendigkeit, auch bei solchen Aufgaben einen Existenznachweis (eine Probe) durchzuführen.
Der AG-Leiter sollte nicht versäumen, diese *Potenzen zur Vermittlung logischer Grundlagen*, die die Aufgaben 1) bis 4) bieten, auch auszunützen.

Wir erinnern ferner an unsere Forderung, daß Lösungen niemals "vorgetragen" werden dürfen, sondern daß ein Schüler, der einen Lösungsplan gefunden hat, lediglich Fragen stellen oder Impulse geben darf. Diese Forderung ist in Klasse 6 sehr schwer zu erfüllen. Hier wird es sehr oft noch der AG-Leiter sein, der letztlich die weitgehend vom konkreten Inhalt der Aufgabe unabhängigen heuristischen Impulse gibt, und es gehört mit zu den wichtigsten Aufgaben der Vorbereitung auf einen Zirkel, sich zu überlegen, welche heuristischen Impulse bei der betreffenden Aufgabe angemessen sind.
Vorliegende Aufgabe verfügt über folgende *"heuristischen Potenzen"*, die man ausschöpfen und in Impulse umsetzen kann: Zweckmäßige Symbolik wählen; Tabellen als Hilfsmittel; Teilzielfrage beim VA (geschicktes Folgern aus gegebenen Bedingungen) .

Aufgabe 4) hat einen geringeren Schwierigkeitsgrad. Hier kann die *Teilzielfrage beim RA* weiterhelfen. Wenn wir wüßten, welche der drei Aussagen die wahre Aussage ist, könnten wir leicht ans Ziel gelangen. Dabei liegt es nahe, eine *vollständige Fallunterscheidung* durchzuführen.
Nach Wahl einer *zweckmäßigen Symbolik* lauten die gegebenen Aussagen
(1) $A = t$; (2) $B \neq t$; (3) $C \neq s$.
1.Fall: (1) ist wahr ; dann wäre (2) falsch, es würde also (2') $B = t$ gelten, was der wahren Aussage (1) widerspricht; also kann dieser Fall nicht eintreten.
2.Fall:



Also kann nur der 3.Fall zutreffen, in dem (3) $C \neq s$ die wahre Aussage ist und folglich (2') $B = t$ und (1') $A \neq t$ gilt, woraus dann $C = b$ folgt. Wie man sich überzeugt, erfüllt diese Zuordnung tatsächlich alle gestellten Bedingungen (*Existenznachweis*).

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe V43)* , bei der die *Tabellenmethode* geübt werden kann. Durch die Aufgabenteile a), b), c) wird eine Untersuchung gefordert, wie sich eine Variation der gegebenen Bedingungen auf die Lösungsmenge auswirkt. Bei a) gibt es genau eine, bei b) genau zwei und bei c) keine Lösung.

Bei *Aufgabe 43a)* gelangt man durch Eintragen der unmittelbaren Folgerungen aus den Bedingungen (1) bis (5) zu der linken Tabelle, während die rechte Tabelle die weiteren Schlußfolgerungen festhält, die dann zu folgendem Resultat führen:
A;Ra/Le , B;Tu/Ga , C;Ma/Vo .

	Ra	Tu	Le	Ma	Ga	Vo
A		- (1)		- (1)		
B		+ (6)				
C	- (3)	- (5)			- (3)	

	Ra	Tu	Le	Ma	Ga	Vo
A	+ (7)	-	+ (10)	-	- (7),(3)	- (10)
B	- (6),(2)	+ (6)	- (8)	- (8)	+ (8)	- (8)
C	-	-	- (9),(4)	+ (9)	-	+ (11)

Bei *Aufgabe 43b)* wird durch das Ersetzen von (1) durch (1') diese Bedingung abgeschwächt, woraus man dann zwar noch $A \neq Tu$, nicht mehr aber $A \neq Ma$ folgern kann. Das Feld A/Ma der Tabelle bleibt daher zunächst frei, was dazu führt, daß auch die Felder C/Ma, C/Le, A/Le, A/Vo und C/Vo nicht gefüllt werden können.
Es läßt sich leicht nachweisen, daß man außer der oben angebenenen Lösung noch eine weitere Lösung erhält, wenn man das Feld A/Ma mit einem "+" füllt. Dies führt dann zur 2.Lösung A;Ra/Ma, B;Tu/Ge, C;Le/Vo .

Bei *Aufgabe 43c)* wird eine neue Bedingung (6) aufgenommen, aus der Ma ≠ Vo folgt, was der aus (1) bis (5) abgeleiteten Feststellung Ma = Vo widerspricht. Also besitzt diese Aufgabe keine Lösung.

Auch die *Aufgabe V55)* ist relativ schwer. Die Tatsache, daß hier nur zwei konkrete Fragen gestellt werden und nicht die komplette Zuordnung von acht Personen, die fünf verschiedene Namen A, E, K, T, Z tragen, zu fünf Eigenschaften von Haaren (Haarfarbe bzw. "Glatze") s, r, d, b, g gesucht ist, bedeutet bei dieser Aufgabe keine Vereinfachung. Eine zusätzliche Erschwernis liegt darin, daß auch das Geschlecht der Personen sowie die Eigenschaft, verheiratet oder ledig zu sein, bei den gegebenen Bedingungen eine Rolle spielt. Hier ist es zweckmäßig, die Beziehung "vh" oder "le" der einzelnen Personen bzw. Familienmitglieder mit in den Zeileneingängen und in den Spalteneingängen der Tabelle abzuspeichern.
In der ersten Tabelle sind wieder nur die unmittelbaren Folgerungen aus den Bedingungen (1) bis (5) abgespeichert. Dabei ist bereits berücksichtigt, daß sich aus Bedingung (4) allein nichts Brauchbares folgern läßt, daß man aber aus (3) und (4) die Feststellung (6) Z = b = vh sowie K = le ableiten kann. Da genau zwei Männer ledig sind, folgt hieraus A = ld . Wegen A ≠ g , K = le und (5) folgt hieraus (7) K = g , und man hat die Antwort auf Frage a) gefunden: Herr Knobel hat eine Glatze.
In der zweiten Tabelle werden die Ergebnisse der Folgerungen aus (6) und (7) festgehalten sowie die Folgerung, daß wegen T = vh und r = ld stets T ≠ r und daher (als letzte verbleibende Möglichkeit) (8) A = r gelten muß. Man erkennt, daß man die zu Frage b) gehörende Antwort "Herr Apel hat rote Haare" erst fast ganz zum Schluß beantworten kann.
Die restlichen Zuordnungen (nach denen nicht gefragt ist) lauten E = s , T = d und (wie bereits früher abgeleitet) Z = b .

	s vh (2)	r	d	b vh (3;4)	g
A ld	- (1)				- (1)
E vh (1)		- (1)	- (3)		
K ld (3;4)				- (3)	+ (7) (5)u.a.
T vh (2)	- (2)				
Z vh(3;4)				+ (6) (3;4)	

	s	r ld	d	b	g
A	- -	+ (8)		- (6)	- -
E		- -	- -	- (6)	- (7)
K	- (7)	- (7)	- (7)	- -	+ (7)
T vh	- -	- (T≠ld)		- (6)	- (7)
Z	- (6)	- (6)	- (6)	+ (6)	- (6),(7)

Von noch höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 64)* . Gesucht sind Zuordnungen zwischen vier Personen Fi, Go, Ha, Jo , vier Berufen A, P, S, D , vier von diesen Personen gekauften oder gelesenen Büchern und den vier Autoren dieser Bücher, die mit den genannten vier Personen identisch sind.
Um das Suchen nach einer Lösung etwas zu erleichtern, wurde der wichtige Lösungshinweis gegeben, daß man zunächst nach der Zuordnung zwischen den Berufen und den gekauften oder gelesenen Büchern suchen soll. Damit wird verhindert, daß der Löser sich einem der fünf anderen Zuordnungspaare zuwendet und dabei in eine Sackgasse gerät.
Eine weitere Hilfe besteht darin, daß man die gekauften oder gelesenen Bücher mit a, p, s, d bezeichnet (d.h. sie sofort mit den Autoren dieser Bücher in Verbindung bringt und auf das Einführen von vier weiteren Bezeichnungen, etwa fi, go, ha, jo verzichtet). Also ist der Astronom A der Autor des Buches a, der Poet der Autor des Gedichtbandes p, der Schriftsteller S der Autor des Prosawerks s und der Dramatiker D der Autor des Theaterstücks d. Daß diese Vereinbarung zweckmäßig ist, erkennt man erst am Ende des Löseprozesses.

Für die Suche nach der genannten Zuordnung kann man wieder eine *Tabelle* verwenden. Dies kann zu folgender Ableitung führen:
Laut Voraussetzung gilt (2) P = d .
Wegen (2), (1) und (4) gilt P ≠ a , A ≠ a und S ≠ a , also muß (7) D = a gelten.
Wegen (7), (2) und (1) gilt D ≠ s , P ≠ s und S ≠ s , folglich muß (8) A = s gelten.
Wegen (1), (7) und (8) gilt P ≠ p , D ≠ p und A ≠ p , folglich muß (9) S = p gelten.
Bislang haben wir abgeleitet (wobei auch Bedingung (6) verwendet wurde):

(8) Der Astronom liest das vom Schriftsteller geschriebene Prosawerk. A = s
(2) Der Poet liest das vom Dramatiker geschriebene Theaterstück. P = d
(9) Der Schriftsteller liest den vom Poeten geschriebenen Gedichtsband. S = p
(7) Der Dramatiker liest das vom Astronomen geschriebene Astronomiebuch. D = a

Damit ist zwar das erste Teilziel erreicht, die größten Schwierigkeiten liegen aber noch vor uns. Hier können folgende Impulse hilfreich sein:

- Von welchem Teilziel ausgehend könnte ich das Ziel erreichen?
- Welche der gegebenen Bedingungen habe ich noch nicht verwendet oder noch nicht voll ausgeschöpft? Was läßt sich aus diesen Bedingungen ableiten?

Bislang haben wir die Bedingungen (3) und (5) noch überhaupt nicht verwendet.
Aus (3) folgt, daß Go *eines der Bücher* von Jo kauft.
Aus (4) folgt, daß S nur ein Buch geschrieben hat.
Folglich muß gelten: (10) S ≠ Jo .
Aus (5) folgt, daß Fi und Go die gekauften Bücher tauschen, die sie dann lesen. Würde ich wissen, welche zwei der Bücher s, d, p, a diese getauschten Bücher sind, dann wäre ich dem Ziel vermutlich viel näher gekommen.
Wenn ich die Zuordnung des Namenpaars (Fi; Go) zum zugehörigen Berufspaar kennen würde, könnte ich wahrscheinlich das Ziel leicht erreichen.
Eine *vollständige Fallunterscheidung* zeigt, daß nur s und d die getauschten Bücher sein können, und daß daher gilt:

A liest s und hat d gekauft;
P liest d und hat s gekauft;
S liest p und hat p gekauft,
D liest a und hat a gekauft.

Alle anderen Fälle führen auf einen Widerspruch, und zwar meist zu der Forderung, daß keine der Personen das von ihr verfaßte Buch gekauft hat. Wären etwa s und p getauscht worden, dann hätte S sein eigenes Buch s gekauft, was nicht stimmt; usw. Die letzte Annahme, daß p und a getauscht wurden, führt zur Feststellung, daß S das Buch a gekauft haben müßte, was nach Bedingung (4) nicht stimmt.
Nun müssen wir noch die Zuordnung zwischen den Berufen A, P, S, D und den Personen Fi, Go, Ha, Jo ermitteln.
Da S nicht zu den Personen gehört, die ihre gekauften Bücher getauscht haben, folgt aus Bedingung (5), daß S ≠ Fi und S ≠ Go gilt. Wie bereits gezeigt gilt (10) S ≠ Jo . Daraus folgt dann (11) S = Ha .
Der Rest ist einfach. Damit ist dann gezeigt, daß sich die gesuchte Zuordnung eindeutig ermitteln läßt, sie lautet:

Fischer ist Poet und liest das Drama von Jordan;
Götting ist Astronom und liest das Prosawerk von Hauser;
Hauser ist Schriftsteller und liest Gedichte von Fischer;
Jordan ist Dramatiker und liest das Astronomiebuch von Götting.

Eine Probe am Text liefert den *Existenznachweis*.

Bei *Aufgabe 5)* ist eine Reihenfolge von vier Personen P, W, K, T zu ermitteln, die drei gegebene Bedingungen erfüllt. Diese Aufgabe sollten die Schüler zunächst selbständig zu lösen versuchen. Bei der Auswertung wird man feststellen, welche Schüler durch inhaltliches

Schließen und welche Schüler durch Umformen von Ungleichungen bei Verwendung einer symbolischen Schreibweise ans Ziel zu kommen versuchen.
Bei dieser Gelegenheit kann man durch inhaltliches Schließen folgende Rechenregeln herleiten lassen:

(R1): Aus $a > b$ und $c = d$ folgt $a + c > b + c$; ("seitenweise Addition")
(R2): Aus $a + c > b + c$ folgt $a > b$; ("beidseitige Subtraktion")
(R3): Aus $a + b = c + d$ und $a > c$ folgt $b < d$ (d.h. $d > b$) .

Die Lösung läßt sich wie folgt festhalten, wobei man mit p, w, k, t die Anzahl der von P, K, W, T gefangenen Fische bezeichnet:

(1) $t > k$;
(2) $p + w = k + t$;
(3) $k + w > p + t$.
(2),(3) $\Rightarrow$ (4) $(p+k) + 2w > (p+k) + 2t$; [seitenweise Addition] .
(4) $\Rightarrow$ (5) $2w > 2t$, also $w > t$; [Subtraktion von $(p+k)$] .
(2),(5) $\Rightarrow$ (6) $k > p$; [Regel (R3)] .
(5),(1),(6) $\Rightarrow$ (7) $w > t > k > p$; [Transitivität von ">"] .

Durch "Übersetzung aus der Symbolsprache in die Wortsprache" gelangt man zum Antwortsatz:
Die Reihenfolge der Angler, geordnet nach ihrem Erfolg beim Angeln, lautet: Wasja, Tolja, Kolja, Petja.

Aufgabe 6) sollte man unmittelbar nach Aufgabe 5) lösen lassen. Übersetzt man die Aufgabenstellung in die Symbolsprache, dann erhält man

(1) $i > g$; (2) $e + r = i + g$; (3) $r + g > i + t$.

Die Schüler sollen erkennen, daß diese Aufgabe mit der Aufgabe 5) *äquivalent* ist, daß nur eine andere inhaltliche Einkleidung vorliegt, und daß man deshalb mit der Lösung von Aufgabe 5) auch über die Lösung von Aufgabe 6) verfügt.

Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe V29).* Es ist sowohl die Zuordnung von vier Vornamen a, b, d, e zu vier Familiennamen A, B, D, E als auch eine Reihenfolge der vier Personen zu ermitteln. Hier kann man das Verwenden einer *zweckmäßigen Symbolik* sowie das geschickte *Folgern aus gegebenen Bedingungen* üben.
Bedeute $x < Y$, daß die Person mit dem Vornamen x jünger ist als die Person mit dem Familiennamen Y , und werde mit xY festgehalten, daß die betreffende Person xY heißt. Dann gilt laut Aufgabenstellung:

(1) $a < e < b$; a ist der jüngste
(2) $a < d < b$; b ist der Älteste
(3) $E < D < A$; E ist der jüngste
(4) $D < B < b$; niemand heißt bB

$\Rightarrow$ (5) aE ist der jüngste

Aus (5),(4) folgt: Niemand heißt aA oder bB oder eE , also gilt (6) Ein Schüler heißt dD .

(5),(6) $\Rightarrow$ (7) Die Schüler heißen aE, bA, eB, dD .

(7),(2) $\Rightarrow$ (8) $aE < dD$.

(7),(4) $\Rightarrow$ (9) $dD < eB < bA$.

(8),(9) $\Rightarrow$ (10) $aE < dD < eB < bA$.

Damit ist ein Lösungsweg gefunden.

Bei *Aufgabe V49)* ist aus 7 Aussagen, unter denen genau eine falsch ist, die Reihenfolge von 5 Schülern, geordnet nach ihrem Alter, zu ermitteln.

Es ist relativ leicht, durch Probieren zur richtigen Vermutung zu gelangen, daß die Aussage (5) die falsche Aussage ist, und dann läßt sich auch die gesuchte Reihenfolge ermitteln und durch eine Probe nachweisen, daß sie die restlichen 6 Bedingungen erfüllt. Schwierig zu finden ist jedoch der geforderte Einzigkeitsnachweis.
Da die Schüler A, B, C, D, E nach wachsendem Alter geordnet werden sollen, ist es günstig, alle gegebenen Aussagen in die Form "X ist jünger als Y" zu bringen und in der Form $X < Y$ festzuhalten. Auf diese Weise gelangt man zu

(1) $E < A$; (2) $B < C$; (3) $D < A$; (4) $C < E$;
(5) $A < C$; (6) $D < E$; (7) $C < D$.

Wenn man annimmt, daß die Aussage (5) die falsche Aussage ist, dann gelangt man sehr leicht zu folgender Reihenfolge, die die restlichen Bedingungen erfüllt:

(*) $B < C < D < E < A$.

Der *Einzigkeitsnachweis* wird wie folgt erbracht:
Man weist nach, daß nur (5) die falsche Aussage sein kann und daß (1),(2),(3),(4),(6),(7) $\Rightarrow$ (*) gilt.
Es gilt:
(1),(5) $\Rightarrow$ (8) $E < A < C$ und (4),(5) $\Rightarrow$ (9) $A < C < E$ und (8).(9) $\Rightarrow$ ↯ (Widerspruch).
Hieraus läßt sich (nur) schließen, daß mindestens eine der Aussagen (1), (4), (5) falsch sein muß.
Ferner gilt:
(3),(5) $\Rightarrow$ (10) $D < A < C$ und (7),(5) $\Rightarrow$ (11) $A < C < D$ und (10),(11) $\Rightarrow$ ↯ (Widerspruch).
Hieraus läßt sich (nur) schließen, daß mindestens eine der Aussagen (3), (5), (7) falsch sein muß.
Da es laut Aufgabenstellung aber nur genau eine falsche Aussage unter den sieben Aussagen gibt, muß dies die Aussage (5) sein.
Diesen Einzigkeitsnachweis wird man nur mit sehr leistungsstarken Schülern besprechen.

Bei der *Aufgabe 7)* sollen die Schüler die *"Multiplikationsregel" für "Auswahlprobleme"* entdekken und allgemein formulieren. Zur Veranschaulichung sollte man auch die vom Unterricht her bekannten "Bäume" verwenden.
Wenn es 3 Gehäusearten G_i gibt und zu jeder Gehäuseart 4 Arten von Zifferblättern B_i , dann gibt es insgesamt $3 \cdot 4 = 12$ Arten von (G_i,B_i) .
Wenn es 12 Arten von (G_i,B_i) gibt, und zu jeder dieser Arten zwei Arten von Zeigern Z_i , dann gibt es insgesamt $12 \cdot 2 = 24$ Arten von (G_i,B_i,Z_i) .
Um zu überprüfen, ob die Schüler das lexikographische Ordnen beherrschen, kann man verlangen, daß sie die ersten drei und die letzten drei der so geordneten 24 Ausführungen von Uhren angeben.

Völlig analog wird die *Aufgabe V18)* gelöst.

Bei *Aufgabe 8)* liegt es nahe, die gegebenen Punkte zu zeichnen und dann alle Geraden zu zeichnen und abzuzählen. Dieses Verfahren ist bei 4 oder 5 und allenfalls noch für 6 gegebene Punkte, nicht mehr aber für 33 gegebene Punkte anwendbar.
Man kann auch die gegebenen Punkte mit A, B, C, D bezeichnen und dann die Geraden (AB),(AC) ...., (CD) systematisch (lexikographisch geordnet) ermitteln und abzählen.
Noch günstiger ist es, diese Geraden in der nebenstehend angegebenen Anordnung zu betrachten und ihre Anzahl in der Form $3 + 2 + 1 = 6$ zu ermitteln.

(AB) (AC) (AD) | 3
(BC) (BD) | 2
(CD) | 1

Von der eingangs angefertigten Zeichnung und dieser Anordnung ausgehend ist folgende Schlußweise anzustreben:

Wenn 4 Punkte A, B, C, D gegeben sind, dann gehen von A 3 Geraden aus, und dann gehen von B noch zwei weitere Geraden und von C noch eine weitere Gerade aus.
Diese Schlußweise läßt sich leicht auf 5, 6 oder 33 Punkte übertragen. Beim Berechnen der zu 33 Punkten gehörenden Anzahl g(33) von Geraden wird man den "Trick des Schülers Gauß" wiederholen und an der Wandtafel festhalten (wobei g(33) = s(32) gilt) :

$s(32) = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 30 + 31 + 32$
$s(32) = 32 + 31 + 30 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1$
$2s(32) = 33 + 33 + 33 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 33 + 33 + 33 = 32 \cdot 33$, also $s(32) = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 33$,

allgemein: $s(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$; $g(n) = \frac{1}{2}(n-1)n$.

Bei *Aufgabe 9)* kann man nochmals das in der AG Klasse 5 eingeführte *lexikographische Ordnen* und übersichtliche Festhalten aller systematisch ermittelten Möglichkeiten wiederholen und üben (vgl. /9/, S.20 ff.). Natürlich spielt wieder die Wahl *günstiger Bezeichnungen* eine Rolle. An der Wandtafel wird festgehalten:

Menge der Jungen: { a, b, c, d, e, f } .

Auswahlmöglichkeiten:

(a,b,c); (a,b,d); (a,b,e); (a,b,f)	4	
(a,c,d); (.....); (a,c,f)	3	
(a,d,e); (.....)	2	
(a,e,f)	1	10
(b,c,d); (.....); (b,c,f)	3	
(b,d,e); (.....)	2	
(b,e,f);	1	6
(c.d.e); (.....)	2	
(c,e,f)	1	3
(d,e,f)	1	1

20 Auswahlmöglichkeiten

Leistungsstarke Schüler sollten die Fragestellung verallgemeinern und das gefundene Lösungsverfahren auf die Fälle "3 Jungen aus 7, 8, 9, ... Jungen" anwenden.
Die Folge 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... sollte als Folge der Dreieckszahlen wiedererkannt werden (vgl. /4/, S.19 und /9/, S.44f.) .

Bei *Aufgabe 10)* wird man die in der AG Kl. 5 eingeführte spezielle Variante des *Extremalprinzips* wiederholen (vgl. /9/, S.19) .

- Was ist gesucht?	Anzahl von Schließversuchen, die .....
- Ungünstigster Fall? °Muß man alle 5 Schlüssel durchprobieren?	1.Schlüssel: 4 Fehlversuche (der 5.Versuch gelingt gewiß
- Analog weiterfolgern!	2.Schlüssel: 3 Fehlversuche 3.Schlüssel: 2 Fehlversuche 4.Schlüssel: 1 Fehlversuch (5.Schlüssel: 0 Fehlversuche)
- Was läßt sich daraus schließen?	höchstens 1+2+3+4 = 10 Fehlversuche
- Mögliche Verallgemeinerung der Aufgabe?	Bei n Schlüsseln und n Schlössern sind höchstens 1+2+3+ ... +(n-1) = $\frac{1}{2}(n-1)n$ Schließversuche erforderlich.

Bei einem Vergleich mit Aufgabe 8) stellen die Schüler fest, daß die Anzahl der höchstens erforderlichen Schließversuche bei n Schlössern gleich der Anzahl der Verbindungsgeraden von n Punkten (in beliebiger Lage) ist.

Auch beim Lösen der *Aufgabe 11)* ist das *Extremalprinzip* das entscheidende Hilfsmittel.
Im ungünstigsten Fall kann man von den 88 roten, den 48 blauen und den 36 schwarzen Kugeln jeweils 16 Kugeln entnehmen, und die 15 weißen und die 13 grünen Kugeln sämtlich entnehmen. Dann hätte man unter den entnommenen 16 + 16 + 16 + 15+ + 13 = 76 Kugeln keine 17 gleichfarbige Kugeln. Entnimmt man dagegen 77 Kugeln, dann kann man sicher sein, daß man 17 gleichfarbige Kugeln entnommen hat (die natürlich nur rot, blau oder schwarz sein können).
Hier sollten die Schüler selbst analoge Aufgaben stellen und lösen. Derartige Aufgaben nebst Lösungsweg lassen sich wie folgt in Kurzform an der Wandtafel festhalten:

gegeben	gesucht	ungünstigster Fall	Lösung
88r, 48b, 36s, 15w, 13g	17 gleichfarbige	16r, 16b, 16s, 15w, 13g	(16+16+16+15+13)+1 =77
" " " " " " " "	2r und 4s und 9g	1r, 48b, 3s, 15w, 8g	(1+48+3+15+8)+1 = 76
10r, 8s, 9g	" " " " " "	1r, 3s, 8g	(1+3+8)+1 = 13
" " " "	1 r oder 1 s	9g	9 + 1 = 10

3.2. Wir berechnen Gewinnchancen bei Spielen

Ziele:
- Systematisches Ermitteln aller "möglichen" und aller "günstigen" Fälle.
- Begriff der Wahrscheinlichkeit.
- Einblicke in die Geschichte der Mathematik (PASCAL) .

Minimalvariante:
Einführen der Definition des Begriffs "Wahrscheinlichkeit" anhand von Aufgabe 1a) .
Anwenden dieser Definition beim gemeinsamen Lösen der Aufgaben 1c), 2a) bis 2d), 3) und V15) .

Maximalvariante:
Selbständiges Erarbeiten der Definition des Begriffs "Wahrscheinscheilichkeit" anhand des Merkstoffs und der Aufgabe 1a) .
Weitgehend selbständiges Lösen der Aufgaben 1) bis 5) sowie V37) .
Gemeinsames Lösen der Aufgabe V58) .

Beim Behandeln der *Aufgabe 1)* wird man zunächst überprüfen, welche Vorstellungen die Schüler mit dem aus dem aus der Alltagssprache vertrauten Begriff "Gewinnchance" verbinden und welche Möglichkeiten sie kennen, eine solche Chance zahlenmäßig auszudrücken.
Die Schüler sollen schätzen, wie groß die Chance ist, eine gerade Zahl zu würfeln, verglichen mit der Chance, eine ungerade Zahl zu würfeln. Hier kann man erwarten, daß die Schüler einen der Ausdrücke "Chancengleichheit", "50%-iger Chance", "Chancenverhältnis 1 : 1" oder "halbe - halbe" verwenden.
Da fast alle Schüler den Prozentbegriff aus der Alltagssprache kennen, kann man verlangen, die jeweiligen Chancen bei den Aufgaben 1a), 1b) und 1c) in Prozent zu schätzen. Man kann auch gleich vereinbaren, die Wahrscheinlichkeit durch eine Zahl zwischen 0 und 1 anzugeben, wobei die "0" der "Unmöglichkeit" und die "1" der "Sicherheit" zugeordnet wird. Die unterschiedlichen Schätzwerte werden an der Wandtafel notiert.
Dann wird man die Begriffe "Ereignis E", "möglicher Fall", "günstiger Fall", "Anzahl m der möglichen Fälle", "Anzahl g der günstigen Fälle", Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E " anhand von Aufgabe 1a) einführen (oder erarbeiten lassen) und auf den "Merkstoff" auf S.30 der Aufgabensammlung hinweisen.
An der Wandtafel kann festgehalten werden:

mögliche Fälle: { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } ; Anzahl m = 6

Ereignis	günstige Fälle	Anzahl	Wahrscheinlichkeit
E_1: "Es fällt eine gerade Zahl"	{ 2, 4, 6 }	$g_1 = 3$	$P(E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
E_2: "Es fällt eine Primzahl"	{ 2, 3, 5 }	$g_2 = 3$	$P(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Die geschätzten Wahrscheinlichkeiten werden mit der berechneten Wahrscheinlichkeit verglichen.

Bei *Aufgabe 1b)* ist zunächst zu klären, daß man das Ergebnis von "drei Würfen nacheinander" durch ein Zahlentripel (a;b;c) mit den gewürfelten Augenzahlen a, b, c festhalten kann, in dem jede Augenzahl mehrfach vorkommen kann und daß zwei Tripel, die sich nur durch die Reihenfolge der Zahlen unterscheiden, zwei verschiedene Ereignisse festhalten.
Hier gilt offensichtlich g = 1 , weil (6;6;6) der einzige günstige Fall ist.

Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt also allein beim Ermitteln von m (weil man natürlich Schülern der Klasse 6 auf gar keinen Fall die betreffenden Formeln aus der Kombinatorik mitteilen wird).
Die Methode zum Ermitteln dieser Anzahl sollte möglichst von den Schüler selbst gefunden werden. Man kann hierbei an das Vorgehen beim Lösen der Aufgabe 9) des vorangegangenen Abschnitts anknüpfen.
An der Wandtafel kann folgendes festgehalten werden:

(1;1;1), (1;1;2), ..., (1;1;6) (1;2;1), ..., (1;2;6) (1;3;1), ... (1;6;1), ..., (1;6;6)	(2;1;1;), ... , (2;1;6) .... (2;6;1),....., (2;6;6)	.....	(6;1;1), ..., (6;1;6) .... ((6;6;1), ..., (6;6;6)
6 · 6 = 36 Fälle	36 Fälle	.....	36 Fälle

Anzahl der möglichen Fälle: $m = 36 \cdot 6 = 216 = 6^3$;
Anzahl der günstigen Fälle: $g = 1$;
gesuchte Wahrscheinlichkeit: $P = \frac{1}{216} \approx 0{,}0046$.

Man kann auch auf folgenden *2.Lösungsweg* hinweisen:
Die Wahrscheinlichkeit, daß im 1.Wurf eine "6" fällt, beträgt $\frac{1}{6}$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß auch im 2.Wurf eine "6" fällt, beträgt dann $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{6}$, also $\frac{1}{36}$.
Die Wahrscheinlichkeit, daß auch im 3.Wurf nochmals eine "6" fällt, beträgt dann $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{36}$, also $\frac{1}{216}$.

Bei *Aufgabe 1c)* wird man nur die Schätzwerte der Schüler festhalten und die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten mit in der Aufgabe 2) vornehmen.

Man sollte beobachten, welche Schüler sofort bemerken, daß die *Aufgabe 1d)* gar nichts mit Wahrscheinlichkeitsrechnung zu tun hat, sondern mit Hilfe des *Extremalprinzips* leicht gelöst werden kann.
Der ungünstigste Fall tritt ein, wenn man 12 Würfel wirft und dabei jede der 6 Augenzahlen genau zwei mal erscheint. Daher muß beim Würfeln mit 13 Würfeln mindestens eine Augenzahl mindestens dreimal auftreten.

Bei *Aufgabe 2)* sollte von den Schüler der Vorschlag kommen, die möglichen Ereignisse in der Form (a;b) festzuhalten, wobei a die von A und b die von B gewürfelte Augenzahl festhält.
Dann sollte man das Ziel stellen, zunächst einen *groben Lösungsplan* zu entwickeln. Der Plan sollte folgendermaßen aussehen:

1. Wir ermitteln alle möglichen Ereignisse (Fälle) und halten sie in übersichtlicher Form fest.
2. Wir ermitteln die zugehörigen Punktsummen $s = a+b$ sowie die zugehörigen Punktprodukte $p = a \cdot b$ und halten sie ebenfalls in übersichtlicher Form fest.
3. Wir halten jeweils in einer Tabelle fest, wie oft jedes vorkommende s bzw. p vorkommt (um hieraus dann jeweils die Anzahl g der günstigen Fälle ermitteln zu können).
4. Wir ermitteln für jede der Teilaufgaben a) bis f) die Anzahl g der günstigen Fälle und berechnen die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

Beim Realisieren dieses Lösungsplans kann arbeitsteilig vorgegangen werden.

mögliche Würfe (Ereignisse)	zugehörige Punktsummen	zugehörige Punktprodukte
(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6)	2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 6
(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6)	3 4 5 6 7 8	2 4 6 8 10 12
(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6)	4 5 6 7 8 9	3 6 9 12 15 18
(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6)	5 6 7 8 9 10	4 8 12 16 20 24
(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6)	6 7 8 9 10 11	5 10 15 20 25 30
(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)	7 8 9 10 11 12	6 12 18 24 30 36

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

p	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
Anzahl	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4	2	1	2	2	2	1	2	1

Nachdem vorhandene (oder auch nicht vorhandene) Symmetrien in den Tabellen festgestellt wurden, werden zu den Teilaufgaben a) bis g) die Anzahlen der günstigen Fälle sowie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Auf diese Weise erhält man:

	Wahrscheinlichkeit	Chancenverteilung
a)	$P(s \text{ ist gerade}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$;	1 : 1
b)	$P(s < 7) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$;	5 : 7
c)	$P(3\|s) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;	1 : 2
d)	$P(3\|s \text{ oder } 7\|s) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	1 : 1
e)	$P(p \text{ ist gerade}) = \frac{3+6+3+6+3+6}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$	3 : 1
f)	$P(p < 10) = \frac{6+4+3+2+1+1}{36} = \frac{17}{36} < \frac{1}{2}$	17 : 19
g)	$P(3\|p) = \frac{2+2+6+2+2+6}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$	5 : 4

Bei *Aufgabe 3)* wird man die Schüler zunächst auffordern, Gemeinsamkeiten mit und Unterschiede zur Aufgabe 2) festzustellen.
In beiden Aufgaben sind aus 6 Elementen (Augenzahlen; Karten) jeweils Paare zu entnehmen. Bei Aufgabe 2) können Paare der Gestalt (x;x) vorkommen, bei Aufgabe 3) dagegen nicht. Von den 36 möglichen Ereignissen in Aufgabe 2) entfallen also die 6 Ereignisse (1;1), (2;2), ..., (6;6). Zwischen den verbliebenen 30 Ereignissen herrscht eine gewisse "Symmetrie", zu jedem (x;y) taucht genau ein zugehöriges (y;x) auf, so daß man sich darauf beschränken kann, nur die 15 Paare (x;y) mit $x < y$ zu betrachten, wenn man auch beim Zählen der "günstigen" Ereignisse nur solche Paare betrachtet. Würde man die Reihenfolge der Elemente in den Paaren beachten, dann würde sich lediglich sowohl m als auch g verdoppeln, was auf den Wert von P keinen Einfluß hat.
Die 6 Karten kann man mit D_e, D_g, D_r, K_e, K_g, K_r bezeichnen.
Die 15 möglichen Ereignisse wird man wieder wie nebenstehend angegeben erfassen. Die Anzahl der möglichen Ereignisse läßt sich offensichtlich auf zweierlei Weise berechnen:
$m = \frac{1}{2}(6^2 - 6) = 5+4+3+2+1 = 15$.

$(D_e;D_g),(D_e;D_r),(D_e;K_e),(D_e;K_g),(D_e;K_r)$
$(D_g;D_r),(D_g;K_e),(D_g;K_g),(D_g;K_r)$
$(D_r;K_e),(D_r;K_g),(D_r;K_r)$
$(K_e;K_g),(K_e;K_r)$
$(K_g;K_r)$

Bei *Aufgabe 4)* sollte man nicht versäumen, einige Bemerkungen zur Geschichte der Mathematik beizufügen. Diese Aufgabe markiert den Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung. PASCAL (1623 - 1662) beschäftigte sich mit diesem Problem und teilte in einem Brief an FERMAT (1601 - 1665) seine Lösung mit. Entsprechendes tat Fermat. Durch den geringen Entwicklungsstand der Naturwissenschaften spielten die Glücksspiele noch lange die entscheidende Rolle bei der Bildung der Begriffe und Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erst im 19. Jahrhundert machte der Aufschwung der Naturwissenschaften einen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung über den Rahmen der Glücksspiele hinaus notwendig. Auch GAUSS (1777 - 1855) war hieran maßgeblich beteiligt. Gegenwärtig findet die Wahrscheinlichkeitsrechnung in vielen wissenschaftlichen Gebieten und auch in der Praxis wichtige Anwendungen.

Bei *Aufgabe 4a)* erhält man für den 1.Vorschlag eine Verteilung von 48 Gr. : 36 Gr. = 4 : 3 , für den 2.Vorschlag eine Verteilung von 56 Gr. : 28 Gr. = 2 : 1 . Die Schüler sollen entscheiden, welcher der beiden Vorschläge der "gerechtere" ist.

Bei *Aufgabe 4b)* muß zunächst geklärt werden, was wir unter "gerecht" oder "regelgerecht" verstehen wollen. Wir wollen die Gewinnchancen der beiden Spieler nach dem Stand von 4 : 3 berechnen und müssen uns daher überlegen, welche Forsetzungen möglich sind.
Folgende Impulse können hierbei nützlich sein:

- Nach wieviel Würfen ist das Spiel mit Sicherheit beendet? [Nach 2 Würfen, weil ...] .
- Wieviel und welche Fortsetzungsmöglichkeiten sind denkbar?
  [Bezeichnet man mit X das Ergebnis des 1.Wurfs und mit Y das Ergebnis des 2.Wurfs und setzt X ,Y = Z, wenn "Zahl" fällt sowie X,Y = W , wenn "Wappen" fällt, dann sind genau folgende vier Spielausgänge möglich:
  (Z;Z), (Z;W), (W;Z), (W;W) . Davon sind für Spieler A 3 Ausgänge, für Spieler B nur 1 Ausgang günstig. Also ist der Gewinn im Verhältnis A : B = 3 : 1 zu verteilen, A erhält 63 Groschen, B erhält 21 Groschen.

Beim Durchlesen der *Aufgabe 5)* kann bemerkt werden, daß die getroffene Regelung zur Verteilung der Preise nicht sehr praktikabel, weil unvollständig ist. Wie werden die Preise verteilt, wenn zwei oder gar drei der Schüler die gleiche Nummer aufschreiben? Für diesen Fall muß eine zusätzliche Regelung getroffen werden, was uns hier aber nicht interessieren soll.
Folgende Impulse können hilfreich sein:

- Wieviel Möglichkeiten hat jeder der drei Sieger, eine Geschenknummer aufzuschreiben?
  [jeweils 10 Möglichkeiten] .
- Wieviel mögliche Fälle (a;b;c) gibt es insgesamt, wenn mit a die vom 1.Gewinner geschriebene Zahl angibt usw. ?
  [Es gibt genau die 1000 Möglichkeiten (0;0;0), (0;0;1), ... , (9;9;9)] .
- Wieviel dieser Fälle sind für Jens günstig?
  - In wieviel Fällen fehlt die "5" an einer der drei Stellen?
    : Wieviel Möglichkeiten hat jeder der Gewinner, keine "5" aufzuschreiben?

  [Jeder Schüler hat 9 Möglichkeiten, keine "5" zu schreiben. Also gibt es 9·9·9 = 729 Möglichkeiten, die für Jens günstig sind] .

Man beachte, daß diese Impulse (vor allem die Unterimpulse) nur dann gegeben werden, wenn die Schüler die Lösung nicht ohne Hilfe finden können.

So kann man zum Resultat P("Die 3 Schüler ziehen keine 5") = $\frac{729}{1000} = 0{,}792$ gelangen.

Die *Aufgabe V15)* gleicht der Aufgabe 3) , es werden aus dem Skatblatt lediglich 2 Karten mehr gezogen.
In diesem Fall gilt für die Anzahl der möglichen Ereignisse
$m = \frac{1}{2}(8^2 - 8) = 7+6+5+4+3+2+1 = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8 = 28.$
Werden aus n Karten 2 Karten gezogen, dann gilt für die Anzahl der möglichen Ereignisse
$m = \frac{1}{2}(n^2 - n) = 1+2+3+...+(n-1) = \frac{1}{2}(n-1)n$.
Leistungsstarke Schüler sollten diese Verallgemeinerung finden und sich von der Gleichheit der Terme überzeugen.
Der Rest ist einfach. Man erhält für die Teilaufgaben a) bis e) folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P_a = \frac{1}{28} \; ; \; P_b = \frac{4}{28} \; ; \; P_c = \frac{16}{28} \; ; \; P_d = \frac{6}{28} \; ; \; P_e = \frac{1}{28} \; .$$

Vor dem Behandeln der *Aufgabe V37)* kann man folgende Hausaufgabe stellen: Man spiele das beschriebene Spiel 180 mal (was einen Einsatz von 180 DM bedeuten würde) und notiere den erzielten Gewinn nach dem 60., dem 120. und dem 180. Spiel.
Es gibt hier wieder die bei Aufgabe 2) betrachteten 36 möglichen Ereignisse (1;1), (1;2), ..., (6;6) .
Offensichtlich ist es ohne Belang, welche Zahl man als "Glückszahl" wählt, diesbezüglich besteht "Chancengleichheit" (wenn man einen "idealen" Würfel verwendet). Jede der sechs Augenzahlen erscheint genau einmal doppelt und genau 10 mal einfach, was die Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermöglicht.
Diese beiden Wahrscheinlichkeiten haben aber ein unterschiedliches "Gewicht" : Beim "Pasch" erhält man das Fünffache, im anderen Gewinnfall nur das Doppelte des Einsatzes zurück.
Wegen P(Glückszahl fällt genau einmal) = $\frac{10}{36}$ und P(Glückszahl fällt zweimal) = $\frac{1}{36}$ sowie
$2\cdot\frac{10}{36} + 5\cdot\frac{1}{36} = \frac{25}{36}$ besteht bei diesem Spiel die Chance, $\frac{25}{36}$ seines Einsatzes zurückzubekommen, bei 180 € Einsatz also 125 € . Dies wird mit den in der Hausaufgabe ermittelten Beträgen verglichen, und es wird dabei hervorgehoben, daß die experimentell ermittelten Werte sich immer mehr dem errechneten Wert nähern, je mehr Spiele durchgeführt werden.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe V58)* . Auch hier sollte man vor dem Rechnen erst einmal experimentieren. Die Versuche scheinen eine mittlere Wurfzahl unter 20 nahezulegen. Statt "mittlere Wurfzahl" wollen wir "mittlere Wartezeit" sagen, wobei wir uns vorstellen, daß die Würfe im Zeittakt von z.B. 1 Sekunde erfolgen.
Zunächst sollen die Schüler die mittlere Wartezeit für das Ereignis ermitteln, daß bei einem Wurf (mit einem Würfel) eine "6" fällt. Wenn wir sehr viele Male würfeln, wird im Mittel jeder sechste Wurf eine "6" sein, d.h. die mittlere Wartezeit beträgt 6 Zeiteinheiten (Sekunden). Nun dürfte es nicht schwer sein, die Frage nach einem Zusammenhang zwischen "mittlerer Wartezeit" auf ein Ereignis und "Wahrscheinlichkeit " dieses Ereignisses zu beantworten:
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die mittlere Wartezeit auf dieses Ereignis hängen zusammen wie Bruch und reziproker Bruch.
Erst nach dieser Feststellung wird man die Schüler auffordern, selbständig nach einer Lösung für Aufgabe V58) zu suchen.
Der Prozeß der Lösungsfindung kann durch folgende Impulse unterstützt werden:

- Der erste Wurf bringt irgendeine Augenzahl, jede ist uns recht. Wie groß ist die zugehörige mittlere Wartezeit? [1] .
- Als nächstes brauchen wir eine Augenzahl aus den restlichen 5 Augenzahlen. Wie groß ist die zugehörige Wahrscheinlichkeit und die zugehörige mittlere Wartezeit?
  - Angenommen, ich habe eine "2" gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf keine "2" zu würfeln? [$\frac{5}{6}$] . Wie groß die mittlere Wartezeit? [$\frac{6}{5}$] .

: Wieviel mögliche Ereignisse gibt es? [6] . Wieviel davon sind günstig? [5] .

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit und die mittlere Wartezeit dafür, im nächsten Wurf wieder *eine* neue Augenzahl *zu* würfeln? [$\frac{4}{6}$ bzw. $\frac{6}{4}$] .
  - Wieviel günstige unter den 6 möglichen Ereignissen gibt es jetzt? [4] .
- Fahre so fort! Wie groß ist also die mittlere Wartezeit dafür, daß alle Augenzahlen von 1 bis 6 mindestens einmal gefallen sind?

Die gesuchte mittelere Wartezeit beträgt

$$\frac{6}{6}+\frac{6}{5}+\frac{6}{4}+\frac{6}{3}+\frac{6}{2}+\frac{6}{1}=1+\frac{6}{5}+\frac{3}{2}+2+3+6 \;=\; 12+\frac{27}{10}=14{,}7$$

Man wird also im Durchschnitt knapp 15 mal würfeln müssen, bis alle Augenzahlen von 1 bis 6 mindestens einmal gefallen sind.

3.3. Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben

Ziele:
- Einführen günstiger Bezeichnungen (Wahl von Variablen).
  - Mathematische Objekte durch Terme festhalten.
  - Beziehungen oder Bedingungen durch Gleichungen festhalten.
- Ermitteln von Erfüllungsmengen durch systematisches Probieren.
- Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen.
- Mit der "informativsten" Bedingung beginnen.
- Folgern aus Bedingungen (zum Zweck des Vereinfachens).
- Einzigkeits- und Existenznachweis.
- Zahlen als Produkte von von Primzahlpotenzen darstellen und hieraus den ggT und das kgV ermitteln.
- Grundgleichung der Zahlentheorie (Satz über die Division mit Rest).
- Anwenden des Euklidischen Algorithmus zur ggT-Bestimmung.
- Vermutung $a \cdot b = ggT(a;b) \cdot kgV(a;b)$ finden.

Wir setzen den im "Lernbereich 1: Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen" vermittelten Unterrichtsstoff voraus. Der Euklidische Algorithmus wird hier als "Zusatzstoff" aufgeführt, man muß sich also vergewissern, welche Schüler ihn schon vom Unterricht her kennen. Der auf S.30 der Aufgabensammlung festgehalte "Merkstoff" sollte dazu genützt werden, den Schülern erstmals zu zeigen, wie man sich aus "Literatur" selbständig Wissen und Können aneignen kann.
Aus der AG Klasse 5 sollte der Abschnitt "Zahlen werden gesucht" wiederholt werden.

Minimalvariante:
Verwenden von Variablen und Gleichungen sowie Übergang vom systematischen Probieren zum geschickten Folgern aus Bedingungen beim Lösen der Aufgaben 1) bis 5) sowie V2) und V12).
Anwenden der Grundgleichung der Zahlentheorie bei Lösen der Aufgabe 6).
Wiederholen der Teilbarkeitsregeln und der ggT- sowie kgV-Bestimmung (m.H. der Darstellung natürlicher Zahlen als Produkt von Primzahlpotenzen) beim Lösen der Aufgaben 9a) bis 9d) .
Gemeinsames Erarbeiten des Euklidischen Algorithmus aus dem "Merkstoff"; Anwenden beim Lösen der Aufgabe 11).
Lösen der Aufgaben V56a), V20), V26) V28) und V32) .

Maximalvariante:
Überprüfen der in der AG Klasse 5 erworbenen Fähigkeiten beim selbständigen Lösen der Aufgaben 3), 6) und 7) .
Selbständiges Lösen der Aufgaben 8) und 9e,f) .
Selbständiges Erarbeiten des Euklidischen Algorithmus aus dem Merkstoff; Anwenden beim selbständigen Lösen der Aufgaben 11) und 12) .
Selbständiges Lösen der Aufgaben V39), V54), V56b,c) und V63) .

Bei *Aufgabe 1)* kann man auch ohne Verwenden von Variablen wie folgt ans Ziel gelangen:
Da laut Aufgabenstellung jeweils eine Aussage über "jeden 9.Schüler" und über "jeden 6.Schüler" getroffen wird, muß die Schüleranzahl n eine durch 18 teilbare Zahl sein. Da laut Voraussetzung $20 < n < 40$ gilt, kann nur $n = 36$ gelten. Hieraus folgt dann, daß (36:9 =) 4 Schüler die Note 1 erhielten, daß (36:3 =) 12 Schüler die Note 3 erhielten, daß (36:6 =) 6 Schüler die Note 4 erhielten. Da kein Schüler die Note 5 oder 6 erhielt, folgt hieraus, daß wegen $36 - (4 + 12 + 6 + 0) = 14$ genau 14 Schüler die Note 3 erhielten.
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Lösung.

In *Aufgabe 2)* ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die fünf Bedingungen erfüllt. Ein *1.Lösungsweg* besteht darin, zu jeder Bedingung die Erfüllungsmenge zu ermitteln und dann deren Durchschnitt zu bilden. Da es sich hier um unendliche Erfüllungsmengen handelt, besteht das Problem darin, das "allgemeine Glied" mit Hilfe von Variablen auszudrücken: "In welcher Form kann man eine Zahl darstellen, die bei Division durch m den Rest r läßt?"
Man kann bereits bei dieser Gelegenheit mit den Schülern den im Merkstoff auf S.30 der Aufgabensammlung festgehaltenen *Satz über die Division mit Rest* besprechen, wobei man natürlich von konkreten Beispielen ausgehen wird. Statt " 22 : 5 = 4 Rest 2 " wollen wir künftighin " 22 = 5·4 + 2 " schreiben. Wenn die Schüler an hinreichend vielen Beispielen geübt haben, zu gegebenem konkretem (a;m) das zugehörige (q;r) zu ermitteln, dann kann man von ihnen verlangen, auch die nachstehend verwendeten Terme mit Variablen zu finden.
Zu den gegebenen Bedingungen gehören folgende Erfüllungsmengen:

M_1 = { 1, 3, 5, 7, ... , 2a+1, ...} ;
M_2 = { 2, 5, 8, 11, ... , 3b+2, ...} ;
M_3 = { 3, 7, 11, 13, ... , 4c+3, ...} ;
M_4 = { 4, 9, 14, 19, 23, $\underline{29}$, 33, ..., 5d+4, ...} :
M_5 = { 5, 11, 17, 23, $\underline{29}$, 35, ... , 6e+5, ...} .

Die Schüler sollen erkennen, daß es ungeschickt wäre, von jeder der Mengen so viel Elemente aufzuschreiben, bis man endlich ein Element findet, das allen Mengen gemeinsam ist. Diese *Methode der Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen* ist hier unangemessen.

Folgende Impulse helfen einen einfacheren *2.Lösungsweg* zu finden:

- Welches ist die *"informativste" Bedingung* (d.h. die Bedingung mit der "kleinsten" Erfüllungsmenge)?
- Schließe aus der Erfüllungsmenge der informativsten Bedingung alle diejenigen Elemente aus, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen!

Hier ist die Bedingung (5) die "informativste" Bedingung, weil M_5 von allen angegebenen Erfüllungsmengen die wenigsten einstelligen, die wenigsten zweistelligen Zahlen usw. enthält. Zuerst wird man die "nächst informative" Bedingung, in unserem Fall also die Bedingung (4) überprüfen. Die Zahl 29 ist die kleinste Zahl, die diese beiden Bedingungen erfüllt. Da die Zahlen 5, 11, 17 und 23 die Bedingung (4) nicht erfüllen, braucht man für diese Zahlen das Erfülltsein der ersten drei Bedingungen nicht mehr zu überprüfen. Da die Zahl 29 die Bedingung (3) nicht erfüllt, müssen weitere Elemente der Erfüllungsmenge M_5 untersucht werden. Das nächste Element, das auch die Bedingung (4) erfüllt, ist die Zahl 59. Wie man sich leicht überzeugen kann, erfüllt diese Zahl auch die ersten drei Bedingungen. Folglich ist z = 59 die kleinste Zahl, die alle gestellten Bedingungen erfüllt.
Bei dieser Art der Herleitung ist neben dem *Einzigkeitsnachweis* auch der *Existenznachweis* erbracht.

Folgende Impulse helfen, einen noch einfacheren *3.Lösungsweg* zu finden:

- Ziehe günstige *Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen*!
  - Was läßt sich über den Nachfolger der gesuchten Zahl x aussagen?

    : Ermittle die Menge aller Zahlen, die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen!
    Gib die Menge der Nachfolger dieser Zahlen an!
    Was läßt sich über die Teilbarkeit dieser Nachfolger aussagen?

Auf diese Weise kann man erkennen, daß aus den gegebenen Bedingungen für die Zahl x die Feststellungen 2|(x+1) und 3|(x+1) und 4|(x+1) und 5|(x+1) und 6|(x+1) folgen. Da die

kleinste Zahl x gesucht ist, die diese Bedingungen erfüllt, muß $x + 1 = kgV(2;3;4;5;6) = 60$ und somit $x = 59$ gelten.
Man sollte bei der Auswertung der Aufgabe alle drei Lösungswege charakterisieren und hervorheben, daß in der Regel das *geschickte Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zu einfacheren Lösungswegen führt als das *systematische Probieren*, und daß es beim systematischen Probieren in der Regel lohnt, mit der *informativsten Bedingung* zu beginnen und aus der so gefundenen Erfüllungsmenge alle diejenigen Elemente auszusondern, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.

Bei *Aufgabe 3)* geht es zunächst darum, die gegebenen Bedingungen günstig festzuhalten. Für $z = \overline{ab} = 10a + b$ mit $a,b \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ und $a \neq 0$ lauten diese Bedingungen:
(1) $a - b = 3$ oder (1') $b - a = 3$;
(2) $\overline{ba} = 2 \cdot \overline{ab} - 9$.

1.Lösungsweg:
Aus (2) wird $b>a$ abgeleitet, woraus dann folgt, daß nur (1') $b - a = 3$ gelten kann. Die Menge aller z , für die (1') gilt, ist dann $M = \{ 14, 25, 36, 47, 58, 69 \}$, aus der man alle diejenigen Elemente aussondert, die die Bedingung (2) nicht erfüllen. Auf diese Weise erhält man als einzige Lösung die Zahl $z = 36$.
Es ist zu erwarten, daß die Schüler zunächst die Menge aller z ermitteln, die die Bedingung (1) erfüllen, und daß sie erst nachträglich feststellen, daß $a - b = 3$ wegen (2) nicht gelten kann. Man sollte die Schüler darauf hinweisen, daß der erste Lösungsansatz oft nicht der geschickteste ist und daß man stets bestrebt sein sollte, für die Lösungsdarstellung einen möglichst geschickten Weg zu wählen.

2.Lösungsweg:
Aus (2) folgt durch Umformung $19a = 8b + 9$, woraus wegen (1') dann $a = 3$ und $b = 6$ folgt. Man beachte, daß bei diesem Lösungsweg ein expliziter *Existenznachweis* erforderlich ist!

Bei *Aufgabe 4)* wird man die gegebenen Bedingungen wie folgt festhalten:
(1) $100 < z < 200$;
(2) $z = 7n$ mit $n \in \mathbb{N}$;
(3) $QS(z) = 11$.
Hier ist offensichtlich Bedingung (1) die informativste Bedingung, weil sie als einzige eine endliche Erfüllungsmenge besitzt.
Die Menge aller Elemente, die (1) und (2) erfüllen, lautet
$M_{1,2} = \{ 105, 112, ..., 105+7n, ..., 196 \}$; diese Menge enthält 14 Elemente.
Die Menge aller Elemente, die (1) und (3) erfüllen, lautet
$M_{1,3} = \{ 119, 128, 137, 146, 155,164, 173, 182, 191 \}$; diese Menge enthält 8 Elemente.
Es ist daher günstiger, aus $M_{1,3}$ alle diejenigen Elemente auszusondern, die (2) nicht erfüllen, als aus $M_{1,2}$ alle diejenigen Elemente auszusondern, die (3) nicht erfüllen.
In beiden Fällen erhält man als gesuchte Lösungsmenge $L = \{ 119, 182 \}$.

Bei *Aufgabe 5)* lauten die gegebenen Bedingungen
(1) $a < 300$; (2) $3|a$; (3) $4|a$; (4) $5|a$.
Hier ist es geschickt, zunächst aus den gegebenen Bedingungen eine *Folgerung zu ziehen*, bevor man die Erfüllungsmengen der Bedingungen betrachtet.
Aus (2),(3),(4) folgt bekanntlich $60|a$, also gilt $M_{2,3,4} = \{ 0 , 60 , 120 , ... , 60k , ... \}$.
Wegen (1) folgt hieraus $L = \{ 0, 60, 120, 240 \}$.
Man beachte: Laut Definition gilt $60|0$, weil $0 = 0 \cdot 60$. Es gilt aber nicht $0|60$, weil 60 kein Vielfaches von 0 ist.

Bei *Aufgabe 6)* lassen sich die gegebenen Bedingungen wie folgt festhalten:
(1) $x + y = 177$ mit $x > y$; (2) $x = 3 \cdot y + 9$.
Beim Formulieren der Bedingung (2) kann man den bei Aufgabe 3) eingeführten *Satz über die Division mit Rest* wiederholen.
Natürlich wäre es hier möglich, die endlich vielen Zahlenpaare, die die Bedingung (1) erfüllen, zu notieren und dann zu überprüfen, welche von ihnen die Bedingung (2) erfüllen. Ein derartiges Vorgehen lehnen wir jedoch als unangemessen umständlich ab.
Die Schüler sollen merken, daß es in der Regel günstiger ist, aus den (in der Sprache der Gleichungen festgehaltenen) Bedingungen zunächst *Folgerungen zum Zweck der Vereinfachung* zu ziehen.
Durch Einsetzen von (2) in (1) kommt man über $3 \cdot y + 9 + y = 177$ und $4y = 168$ zu $y = 42$, woraus dann $x = 177 - 42 = 135$ folgt. Ein derartiger Umgang mit Gleichungen wird im nächsten Abschnitt ausführlich geübt. Hier sollte der AG-Leiter die erforderlichen Umformungen erläutern und eine Motivation für die geplante Beschäftigung mit Gleichungen schaffen.
Es wird hervorgehoben, daß bislang erst folgendes gezeigt ist: Wenn es zwei Zahlen x, y gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllen, dann können dies nur die Zahlen $x = 135$, $y = 42$ sein (*Einzigkeitsnachweis*). Nun muß man sich noch durch eine Probe überzeugen, daß sie diese beiden Bedingungen tatsächlich erfüllen (*Existenznachweis)* .

Auch bei *Aufgabe 7)* besteht die Möglichkeit, den *Satz über die Division mit Rest* zu wiederholen und anzuwenden. Die gegebenen Bedingungen lassen sich in folgender Form festhalten:
(1) $100 = q_1 \cdot x + 4$ (mit $x > 4$) ; (2) $90 = q_2 x + 18$ (mit $x > 18$) .
Auch hier ist es zweckmäßig, zunächst aus den Bedingungen *Folgerungen* zu ziehen.
Aus (1) folgt $96 = q_1 \cdot x$ und hieraus (1') $x|96$ (mit $x > 4$) .
Aus (2) folgt analog (2') $x|72$ (mit $x > 18$) .
Aus (1) und (2) folgt daher, daß x ein gemeinsamer Teiler von 96 und 72 ist, der größer als 18 ist.
Die Menge der gemeinsamen Teiler von 72 und 96 ist { 2, 4, 6, 12, 24 } , und da $x > 18$ gelten soll, kann nur die Zahl $x = 24$ die gestellten Bedingungen erfüllen (*Einzigkeitsnachweis*).
Da $100 = 4 \cdot 24 + 4$ und $90 = 3 \cdot 24 + 18$ gilt, erfüllt die 24 tatsächlich beide Bedingungen (*Existenznachweis*).
Folglich lautet die gesuchte Lösungsmenge $L = \{ 24 \}$.

In *Aufgabe 8)* lernen die Schüler die Teilbarkeitsregel für 11 kennen. Die etwas umständliche Formulierung rührt daher, daß man in Klasse 6 dafür sorgen muß, daß die alternierende Quersumme (Querdifferenz) QD(n) keine negative Zahl wird. Der Rest der Aufgabe ist kombinatorischer Art.

Bei *Aufgabe 8a)* kann man natürlich zulassen, daß die Schüler versuchen, durch (unsystematisches) Probieren ans Ziel zu gelangen. Wenn man auch die Aufgaben 8b,c) lösen will, lohnt es, systematisch vorzugehen.
Zunächst wird man die Frage stellen, ob $QD(n) = 0$ gelten kann. Wegen $s = 1+4+5+6+8+9 = 33$ müßte dann $s_1 = s_2 = \frac{33}{2}$ gelten, was nicht der Fall sein kann. $QD(n) = 11$ kann nur gelten, wenn $s_1 = 22$ und $s_2 = 11$ gilt, und dies kann nur für $s_1 = 9+8+5 = 22$ und $s_2 = 6+4+1 = 11$ eintreten (wie man durch *systematisches Probieren* leicht nachweist). Desgleichen ist leicht nachweisbar, daß $QD(n) < 22$ gelten muß.
Auf die Definition von QD(n) zurückgreifend erhält man mit $9_6 8_4 5_1$ eine durch 11 teilbare Zahl, und kann sofort die *Aufgabe 8c)* lösen: 968451 ist die größte, 154869 die kleinste derartige Zahl.
Wie schon des öfteren gezeigt, gibt es jeweils 6 Möglichkeiten, drei verschiedene Elemente anzuordnen.

Da es sowohl für (9;8;6) als auch für (6;4;1) jeweils 6 verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gibt, gibt es also insgesamt (6·6 =) 36 verschiedene Zahlen, womit wir auch die *Aufgabe 8b)* gelöst haben.

Aufgabe 9) dient einer Wiederholung des Unterrichtsstoffs. Man achte darauf, daß die Schüler Haupt- und Nebenrechnung getrennt durchführen und daß sie bei der Primfaktorzerlegung der Zahlen geschickt vorgehen. Dies kann man anhand der Beispiele im Merkstoff demonstrieren, und bei dieser Gelegenheit sollte auch die Bedeutung des dort formulierten Satzes über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung hervorgehoben werden.

Das Resultat kann in folgender Form an der Wandtafel festgehalten werden:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
a	$30 = 2\cdot3\cdot5$	$12 = 2^2\cdot3$	$10 = 2\cdot5$	$168 = 2^3\cdot3\cdot7$	$660=2^2\cdot3\cdot5\cdot11$	$221 = 13\cdot17$
b	$50 = 2\cdot5^2$	$20 = 2^2\cdot5$	$21 = 3\cdot7$	$196 = 2^2\cdot7^2$	$198=2\cdot3^2\cdot11$	$143 = 11\cdot13$
ggT(a;b)	$10 = 2\cdot5$	$4 = 2^2$	$1 = 1$	$28 = 2^2\cdot7$	$66 = 2\cdot3\cdot11$	$13 = 13$
kgV(a;b)	$150=2\cdot3\cdot5^2$	$60 = 2^2\cdot3\cdot5$	$210=2\cdot3\cdot5\cdot7$	$1176=2^3\cdot3\cdot7^2$	$1980=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot11$	$2431=11\cdot13\cdot17$

Von dieser Übersicht ausgehend wird man die Schüler den Zusammenhang

$$ggT(a;b)\cdot kgV(a;b) = a\cdot b$$

entdecken lassen.

Aufgabe 10) wird zunächst für eine Wiederholung des bereits besprochenen Stoffs aus dem Merkstoff auf S.30 der Aufgabensammlung genutzt.
Im Anschluß an die Definition der Teilbarkeit wird man nochmals begründen lassen, warum zwar stets $a|0$, für kein $a\neq0$ aber $0|a$ gilt.
Zum Satz über die Division mit Rest bilden die Schüler zunächst selbst einige Beispiele, und dann wird anhand des Beispiels für die Anwendung des Euklidischen Algorithmus festgestellt, auf welche Weise hier immer wieder dieser Satz angewendet wird.
Schließlich lösen die Schüler die Aufgabe 9e) [ggT(660;198) = 66] nochmals mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus und überzeugen sich, daß man auf diese Weise tatsächlich wieder den ggT der beiden Zahlen erhält. Auf einen Beweis für diese Behauptung wird verzichtet.

Die in *Aufgabe 11)* geforderte Anwendung des Euklidischen Algorithmus sollte man auf mehrere Zirkel verteilen, um den Übungseffekt zu erhöhen.

Bei *Aufgabe 12)* müssen die Schüler zunächst erkennen, daß man den im Anschluß an Aufgabe 9) entdeckten Zusammenhang verwendet, um aus den gegebenen Zahlen und dem mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ermittelten ggT dann das kgV diese beiden Zahlen ermitteln kann.

Die sehr leichte *Aufgabe V2)* läßt sich durch *systematisches Probieren* lösen, wobei den Schülern die Notwendigkeit eines Einzigkeits- und eines Existenznachweises in der Regel nicht bewußt ist.

Bei der Auswertung sollte man auch auf folgenden *2. Lösungsweg* hinweisen:
Von den gegebenen Bedingungen (1) $5|(4a+1)$ und (2) $4a+1 < 20$ ist (2) die informativere Bedingung, von der aus man durch *Folgern* über $4a < 19$ zu $a < 5$ und damit zu
$M_2 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ gelangt. Aus dieser Menge werden alle Elemente ausgesondert, die die Bedingung (1) nicht erfüllen.
Diese Herleitung liefert neben dem Resultat $L = \{ 1 \}$ sowohl den *Einzigkeits-* als auch den *Existenznachweis*.

Bei *Aufgabe V12)* führt systematisches Probieren wohl kaum ans Ziel, wohl aber das oben beim 2.Lösungsweg angewendete Verfahren.

Die gegebenen Bedingungen lassen sich wie folgt festhalten:

(1) $z' = z + 198$ und z' entsteht aus z durch das Vertauschen von zwei Ziffern ;
(2) $z + z' = 13776$.

Wenn es eine Zahl z gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann gilt:
Aus (1) und (2) folgt [durch Einsetzen von (1) in (2)] $z + z + 198 = 13776$, also $2z = 13578$ und damit (3) $z = 6789$; folglich kann nur $z = 6789$ die beiden gegebenen Bedingungen erfüllen (*Einzigkeitsnachweis*).
Aus (3) und (1) folgt $z' = 6789 + 198 = 6987$, und man erkennt, daß tatsächlich z' aus z durch Vertauschen von zwei Ziffern entstanden ist, und daß z und z' beide Bedingungen erfüllen (*Existenznachweis)* .
Darüberhinaus haben wir erkannt, daß die Bedingung " z' entsteht aus z durch Vertauschen von zwei Ziffern" für die Herleitung nicht benötigt wurde, daß es sich also um eine *"überflüssige"* Bedingung handelt, weil sie aus dem Rest von (1) und aus (2) folgt.

Bei *Aufgabe V20)* ist das Kryptogramm $\overline{STETS}\cdot 9999 = \ldots\ldots\ldots 705$ zu lösen, und es liegt nahe, wie üblich vorzugehen: Da $S\cdot 9$ auf 5 enden soll, muß $S = 5$ gelten, weil....; usw.
Weitaus geschickter ist es jedoch, die Tatsache auszunützen, daß der spezielle Faktor 9999 vorkommt, den man auch in der Form (10000 - 1) schreiben kann. Folglich muß gelten:

$$\begin{array}{rl} \overline{STETS}\cdot(10000-1) = & \overline{STETS}\,0\,0\,0\,0 \\ & \underline{\quad -\ \overline{S\,T\,E\,T\,S}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ 7\,0\,5 \end{array}$$

Beim Durchführen der Subtraktion erkennt man, daß $S = 5$, $T = 9$ und $E = 2$ gelten muß, und daß daher $\overline{STETS} = 59295$ die einzige Lösung unserer Aufgabe ist.

Bei *Aufgabe V26)* kann man folgende *heuristische Vorgehensweise* ins Bewußtsein heben:
Wenn ich eine Aufgabe nicht lösen kann, dann versuche ich, diese Aufgabe zunächst geeignet zu *vereinfachen* und die vereinfachte Aufgabe zu lösen, in der Hoffnung, daß sich die so entdeckte Lösungsidee auch bei der Ausgangsaufgabe anwenden läßt.
Hier liegt es nahe, die Aufgabe dadurch zu vereinfachen, daß man anstelle von 5 Ziffern etwa nur 3 Ziffern wählt.
Zunächst wird wiederholt:
Aus den beiden möglichen Anordnungen (1;2), (2;1) von zwei Ziffern erhalte ich alle möglichen Anordnungen von drei Ziffern, indem ich die dritte Ziffer vor die erste Ziffer, nach der 2.Ziffer und nach der 3.Ziffer plaziere; folglich gibt es $3\cdot 2 = 6$ verschiedene Anordnungen von drei Ziffern. Analog erhält man, daß es genau $4\cdot 6 = 24 = 4\cdot 3\cdot 2$ verschiedene Anordnungen von vier Ziffern und $5\cdot 24 = 120 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$ verschiedene Anordnungen von fünf Ziffern gibt.

123	
132	
213	
231	
312	
321	
1332	

Addiert man die aus drei Ziffern gebildeten sechs Zahlen, dann erkennt man, daß jede der drei Ziffern an der Einerstelle, der Zehnerstelle und der Hunderterstelle jeweils genau zweimal vorkommt, d.h. daß die Summe s der sechs Ziffern z.B. an der Einerstelle $s = 2\cdot(1+2+3) = 12$ beträgt, und daß man die Summe S dieser sechs Zahlen wie folgt berechnen kann: $S = 12\cdot 10^2 + 12\cdot 10 + 12 = 12\cdot 111 = 1332$.
Die Übertragung dieser Lösungsidee auf Zahlen aus fünf Ziffern fällt nun nicht schwer. Bei den 120 fünfziffrigen Zahlen taucht jede der Ziffern an jeder Stelle genau (120:5 =) 24 mal auf. Also erhält man als Summe s der 120 Ziffern z.B. an der Einerstelle die Zahl
$s = 24\cdot(1+2+3+4+5) = 24\cdot 15 = 360$ und für die Summe S der 120 Zahlen die Zahl
$S = 360\cdot(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 360\cdot 11111 = 3999960$.

Sehr leistungsstarke Schüler kann man auffordern, die Lösung für die *verallgemeinerte Aufgabe* zu ermitteln, in der die entsprechende Summe aller Zahlen mit n Ziffern zu berechnen ist.
Es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ verschiedene Zahlen, die aus den n Ziffern 1, 2, ..., n durch Anordnung dieser Ziffern in jeder möglichen Reihenfolge entstehen können.
Jede dieser Ziffern taucht an jeder Stelle genau $n! : n = (n-1)!$ mal auf.
Für die Summe aller Ziffern z.B. an der Einerstelle gilt

$s = (1+2+3+\ldots+n) \cdot (n-1)! = \frac{1}{2} n(n+1)(n-1)! = \frac{1}{2}(n+1)!$.

Für die Summe aller dieser Zahlen gilt dann

$S = \frac{1}{2}(n+1)! \cdot 11\ldots11$, wobei der letzte Faktor n Stellen besitzt.

Diese Formel enthält tatsächlich die von uns ermittelten speziellen Resultate, denn es gilt
$S(3) = \frac{1}{2} \cdot 4! \cdot 111 = 12 \cdot 111 = 1332$ und $S(5) = \frac{1}{2} \cdot 6! \cdot 11111 = 3999960$.

Ein eleganterer *2.Lösungsweg* verwendet das *Symmetrieprinzip*. Man geht von der Tatsache aus, daß es unter den (5! =) 120 fünfstelligen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 genau einmal enthalten, zu jeder Zahl z genau eine Zahl z' mit umgekehrter Ziffernfolge gibt (z.B. z = 42135 ; z' = 53124) . Also kann man diese 120 Zahlen zu 60 Paaren (z;z') zusammenfassen, wobei stets z + z' = 666666 gilt.
Hieraus folgt dann S = 60·66666 = 3999960 .

Bei *Aufgabe V28)* wird man mit *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* beginnen:
Wenn $z = \overline{3a3b2c}$ durch 90 teilbar sein soll, dann ist z auch durch 10 teilbar, folglich muß für die Einerziffer c = 0 gelten.
Ferner muß dann $z = \overline{3a3b20}$ durch 9 teilbar sein, es muß also auch 9|QS(z) gelten.
Hieraus folgt dann $QS(z) = a + b + 8 = 9k$ mit $a,b \in \{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Folglich kann nur a + b + 8 = 9 oder a + b + 8 = 18 gelten.
Nun wird die gesuchte Anzahl aller Möglichkeiten durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* ermittelt:
a + b = 1 wird genau von $(a;b) \in \{ (0;1), (1;0) \}$ erfüllt, das sind 2 Möglichkeiten.
a + b = 10 wird genau von $(a;b) \in \{ (1;9), (2;8), \ldots , (9;1) \}$ erfüllt, das sind 9 Möglichkeiten.
Folglich gibt es genau 11 Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, daß 90|z gilt.

Bei *Aufgabe V32)* wird man zunächst feststellen, daß eine Viertelstunde aus 900 Sekunden besteht und daß in dieser Zeit daher die Zahlen von 0 bis 899 gedruckt werden.
Nun geht es darum, ein *geschicktes Zählverfahren* zu wählen, um die Anzahl der in diesen Zahlen vorkommenden Ziffern "1" zu ermitteln.
Es wäre zwar naheliegend aber ungeschickt, diese Zählung in den Intervallen 0 - 9 ; 10 - 99 ; 100 - 109 ; 110 - 119 , usw. durchzuführen.
Viel geschickter ist es, erst die Anzahl der "1" an den Einerstellen, dann deren Anzahl an den Zehnerstellen und schließlich deren Anzahl an den Hunderterstellen zu ermitteln.
Vom 0.-ten bis zum 89. "Zehner" gibt es in jedem dieser "Zehner" genau eine "1" an der Einerstelle, also insgesamt 90 mal die "1" .
Vom 0.-ten bis zum 8. "Hunderter" gibt es in jedem dieser "Hunderter" genau 10 mal die "1" an der Zehnerstelle, also insgesamt (9·10 =) 90 mal die "1" .
In den 100 Zahlen (von 100 bis 199) gibt es die "1" an jeder Hunderterstelle genau 1 mal, also insgesamt 100 mal.
Wegen 90 + 90 + 100 = 280 werden also in der ersten Viertelstunde genau 280 Ziffern "1" gedruckt.

Bei einem *2.Lösungsweg* wird zunächst die Anzahl der "1" von 00 bis 99 ermittelt und erkannt, daß man dann die Anzahl der "1" von 100 bis 899 leicht berechnen kann, wenn man

beachtet, daß hierbei jeweils jede der Ziffern 1, 2, ..., 8 vor den Block "00 - 99" gestellt wird. Lösungsweg und Resultat lassen sich wie folgt in einer Tabelle festhalten:

Zahlen	Anzahl der "1" als Einerziffer oder Zehnerziffer	Anzahl der "1" als Hunderterziffer
0 - 99	1+9+10 = 20	0
100 - 899	8·20 = 160	100 (in 100 - 199)

Folglich werden in der ersten Viertelstunde genau (20+160+100 =) 280 Ziffern "1" gedruckt.

Bei *Aufgabe V39)* führt ein systematisches Auszählen nicht mehr zum Ziel. Günstig ist wiederum ein *Folgern aus den "informativsten" Bedingungen* verbunden mit dem Aussondern aller "lösungsverdächtigen" Elemente, die eine der restlichen Bedingungen nicht erfüllen.
Die gegebenen Bedingungen lauten

(1) $1 \le z \le 1984$; (2) $5|z$; (3) $7 \nmid z$; (4) $11 \nmid z$.

Aus (1) und (2) folgt $M_{1,2} = \{ 5, 10, 15, \ldots, 5k, \ldots, 1975, 1980 \}$, d.h. es gibt (2·185 =) 396 Zahlen, die (1) und (2) erfüllen.
Wegen (3) müssen aus diesen Zahlen alle diejenigen ausgeschieden werden, die Vielfache von 7 sind, und das sind (wegen 369 = 56·7 + 4) insgesamt 56 Zahlen.
Wegen (4) müssen weiterhin alle diejenigen Zahlen ausgeschieden werden, die Vielfache von 11 sind. Wegen 369 = 36·11 + 3 sind dies 36 Zahlen.
Nun muß noch (was oft übersehen wird) beachtet werden, daß wir die gemeinsamen Vielfachen von 7 und 11 , d.h. die Vielfachen von 77 doppelt ausgeschieden haben. Dies sind (wegen 396 = 5·77 + 1) genau 5 Zahlen.
Folglich gibt es genau (396 - 56 - 36 + 5 =) 309 Zahlen, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Wenn man bei *Aufgabe V54)* die unbekannten Ziffern mit a, b, c bezeichnet, dann ist die Anzahl aller $z = \overline{43a1b5c}$ zu ermitteln, für die $75|z$ gilt.
Diese Bedingung ist äquivalent mit $3|z$ und $25|z$. Da 55 kein Vielfaches von 25 ist, kann nur $c = 0$ und somit $z = \overline{43a1b50}$ mit $QS(z) = a + b + 13$ gelten.
Aus $3|z$ folgt $3|QS(z)$ und damit $a+b+13 = 3k$ mit $a,b \in \{ 0, 1, 2, \ldots, 9 \}$ und $k \in \mathbf{N}$.
Weiteres *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* führt wegen $0 \le a + b \le 18$ und
$a + b = 3k - 13$ zu $k \in \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$.
Nun führt das *systematische Erfassen aller möglichen Fälle* zum Ziel.
Es wäre möglich, zu zeigen, daß alle Folgerungen sogar logische Äquivalenzen sind, was es dann gestatten würde, auf einen Existenznachweis in Form einer Probe zu verzichten. Davon wird man in Klasse 6 keinen Gebrauch machen, sondern man wird von den Schülern einen expliziten *Existenznachweis* in Form einer Probe verlangen.
Die Fallunterscheidung kann man übersichtlich in einer Tabelle festhalten:

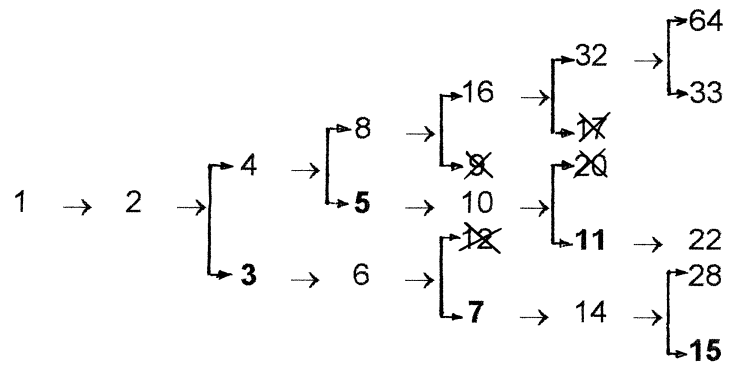
Fallunterscheidung	mögliche Fälle für (a;b)	Anzahl
k = 5 : a + b = 2	(0;2), (1;1), (2;0)	3
k = 6 : a + b = 5	(0;5), (1;4), (2;3), (3;2), (4;1), (5;0)	6
k = 7 : a + b = 8	(0;8), (1;7), ... , (7;1), (8;0)	9
k = 8 : a + b = 11	(2;9), (3;8), ... , (8;3), (9;2)	8
k = 9 : a + b = 14	(5;9), (6;8), ... , (8;6), (9;5)	5
k = 10 : a + b = 17	(8;9). (9;8)	2

Folglich gibrt es genau (3+6+9+8+5+2 =) 33 siebenstellige Zahlen, die die gestellten Bedingungen erfüllen.

Die *Aufgabe V56)* umfaßt die sehr leichte Aufgabe V56a), die mittelschweren Aufgaben V56b,c) und die schwere Aufgabe V56d).
Nachdem jeder Schüler versucht hat, in einer vorgegebenen Zeit möglichst viele dieser Teilaufgaben selbständig zu lösen, sollte eine Zwischenauswertung durchgeführt werden, die zu folgenden Erkenntnissen führt:
Hier ist es günstig, die Lösung "von hinten her" aufzuziehen. Man wird nach zu den gegebenen Regeln "inversen" Regeln suchen, die es gestatten, aus der Zahl im letzten Waggon die möglichen Zahlen im vorletzten Waggon zu ermitteln usw.
Aus (R1) und (R2) folgt zunächst, daß im vorletzten Waggon nur die 2 stehen kann, d.h. daß alle Zahlenzüge auf (2; 1) enden müssen.
Ferner folgt

(R5): "Vor einer ungeraden Zahl (2n+2) steht stets deren Doppeltes 2(2n+1)" sowie
(R6): "Vor einer geraden Zahl 2n steht entweder die Zahl 4n oder die Zahl (2n+1) ".

Durch *systematisches Erfassen aller Möglichkeiten* erkennt man zunächst, daß es genau 3 verschiedene Zahlenzüge mit 4 Waggons und genau 5 verschiedene Zahlenzüge mit 5 Waggons gibt.
Dann wird begründet, warum man die von der "9" und die von der "12" weiterführenden Möglichkeiten nicht weiter beachten muß, wenn es nur mehr darum geht, die Zahlenzüge mit der größtmöglichen bzw. mit der kleinstmöglichen Zahl im ersten Waggon zu erfassen. Diese beiden "uninteressanten" Zahlen werden in dem "Baum" gestrichen.
Daß man nicht auch die "10" mit streichen darf, zeigen schon die Züge mit 6 Waggons, wo die aus der "10" erhaltene "11" die kleinstmögliche Zahl im 1. Waggon ist.
Analog wird begründet, warum man jetzt die "17" und die "20" streichen darf.
So erhält man schließlich die in folgendem "Baum" festgehaltenen "interessanten" Züge mit 7 Waggons und erkennt, daß die größtmögliche Zahl im ersten Waggon die "64" , die kleinstmögliche Zahl die "15" ist.



Leicht zu erkennen und zu begründen ist die Vermutung, daß die größte Zahl, die im ersten Waggon eines Zahlenzuges mit n Waggons stehen kann, die Zahl $W_g(n) = 2^{n-1}$ ist.
Folglich gilt $W_g(7) = 64$, $W_g(10) = 512$ und $W_g(11) = 1024$.
Wesentlich schwieriger ist es, die entsprechende Vermutung für die kleinste derartige Zahl $W_k(n)$ zu finden.
Dem "Baum" (in dem diese Zahlen fett gedruckt sind) ist zu entnehmen, daß es günstig sein wird, die beiden Fälle " n ist gerade" und " n ist ungerade" zu unterscheiden.
Für gerades n gelangt man von einer Zahl der Folge zur nächsten, indem man sie verdoppelt und dann um 1 erhöht. Dies führt zur Folge 2 , 5 , 11 , 23 , 47 , 95 , 191 , 383 , ... mit der *Rekursionsformel* $W_k(2) = 2$; $W_k(2i+2) = 2W_k(2i) + 1$.
Für ungerades n geht man ebenso vor, wobei man von $W_k(1) = 1$ ausgeht. Dies führt zur Folge 1 , 3 , 7 , 15 , 31 . 63 , 127 , 255 , ...

Beim Lösen von *Aufgabe 2)* wird man für Mengen von Teilern und Mengen von Vielfachen folgende abkürzende Bezeichungen vereinbaren: $T_n = \{ x \in \mathbb{N} \mid x|n \}$; $V_n = \{ x \in \mathbb{N} \mid n|x \}$.
Zunächst sollen die Schüler angeben, wieviel verschiedene Arten von Teilmengen die Menge $T_6 = \{ 1, 2, 3, 6 \}$ bezüglich der Anzahl der Elemente besitzt. Hierbei wird oft die leere Menge als Menge mit 0 Elementen vergessen.
Dann sollen die Schüler alle Teilmengen mit einem, zwei, drei bzw. vier Elementen in lexikographischer Ordnung angeben.
Anschließend wird die Anzahl der Teilmengen einer Menge M_1 mit einem Element, einer Menge M_2 mit zwei Elementen und einer Menge M_3 mit drei Elementen ermittelt. Die Schüler werden aufgefordert, eine Vermutung für die Anzahl der Teilmengen einer Menge M_n mit n Elementen zu äußern.
Die Resultate kann man wie folgt an der Wandtafel festhalten:

Teilmengen von $T_6 = \{ 1, 2, 3, 6 \}$	Anzahl der Teilmengen von T_6
$\emptyset$	1
{1} , {2} , {3} , {6}	4
{1;2} , {1;3} , {1;6} , {2;3} , {2;6} , {3;6}	6
{1;2;3} , {1;2;6} , {1;3;6} , {2;3;6}	4
{1;2;3;6}	1
	$16 = 2^4$

$M_1 = \{ a \}$	besitzt	$1 + 1 = 2 = 2^1$	Teilmengen: $\emptyset$, { a }
$M_2 = \{ a; b \}$	besitzt	$1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$	Teilmengen: $\emptyset$, {a}, {b}, {a;b}
$M_3 = \{ a; b; c \}$	besitzt	$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$	Teilmengen
$M_4 = \{ a; b; c; d \}$	besitzt	$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$	Teilmengen
$M_n = \{ a_1; a_2; ...; a_n \}$	besitzt	2^n	Teilmengen

Bei dieser Gelegenheit wird man die Abschnitte "Wir lernen systematisch arbeiten" und "Wir suchen nach Vermutungen" wiederholen und den Begriff "Pascalsches Dreieck" nennen.
In leistungsstarken AGn sollten die Schüler

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ sowie } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

berechnen, den Zusammenhang mit den Zahlen des Pascalschen Dreiecks entdecken und eine Vermutung bezüglich $(a + b)^4$ äußern.

Bei *Aufgabe 3)* ist die *Transitivität der Teilmengenbeziehung* hervorzuheben. Das Resultat ist in der Form $B \subset C \subset A$ bzw. $Q \subset R \subset P \subset T \subset V$ festzuhalten.

Die *Aufgaben 4) und 5)* dienen der Aneignung der Begriffe *"Vereinigung"* und *"Durchschnitt"*.

Bei *Aufgabe 6)* sollen die Schüler erkennen und nachweisen, daß stets $A \cup (A \cap B) = A$ und $A \cap (A \cup B) = A$ gilt.
Man stelle es den Schülern frei, ob sie mit Hilfe eines konkreten Beispiels aus Aufgabe 3) oder etwas allgemeiner über Mengendiagramme zu dieser Vermutung gelangen. Besonders leistungsstarke Schüler dürften das Resultat unmittelbar aus den betreffenden Definitionen ableiten. Auf eine Veranschaulichung für jeden der oben angegebenen vier Fälle sollte man nicht verzichten.

Bei *Aufgabe 7)* sollen die Schüler erkennen, daß man wieder Mengendiagramme benutzen kann, um zur Vermutung zu kommen, welche der vier gegebenen Aussagen wahr und welche

3.6. Mengenlehre

Ziele:
- Einführen günstiger Bezeichungen.
- Mengendiagramme als Hilfsmittel beim Lösen von Aufgaben.
- Aneignen der Begriffe "leere Menge", "Teilmengenbeziehung", "Vereinigungsmenge", "Durchschnittsmenge" und "Produktmenge" nebst Veranschaulichung mit Hilfe von Diagrammen.

Dieser Abschnitt bringt eine Erweiterung und Vertiefung des Unterrichtsstoffs. Man prüfe nach, welche der genannten Begriffe den Schülern bereits bekannt sind und wiederhole aus der AG Klasse 5 den Abschnitt "Mengendiagramme helfen beim Lösen von Aufgaben".

Auch in diesem Abschnitt sollen die Schüler keine Definitionen auswendiglernen, sondern sollen beim Lösen von Aufgaben nur nachweisen, daß sie sich die entsprechenden Begriffe angeeignet haben.

In Aufgabe 4) des Abschnitts 3.5. haben die Schüler bereits Beispiele für Vereinigung und Durchschnitt von Mengen kennengelernt. Nun werden sie in *Aufgabe 1)* aufgefordert, den zugehörigen Text im Merkstoff zu lesen und selbst weitere Bespiele zu bilden. Ferner sollen sie systematisch nach Teilmengenbeziehungen zwischen den in Aufgabe 4) des Abschnitts 3.5. vorkommenden Mengen suchen und selbst weitere Beispiele bilden. So können sie bereits jetzt entdecken, daß stets $M \subseteq (M \cup N)$ und $(M \cap N) \subseteq M$ gilt. Abschließend wird man zusammenfassend festhalten:

(1) $M \subseteq N$: Jedes Element von M ist auch Element von N .

(2) $M \subset N$: Wie bei (1), es gibt jedoch mindestens ein Element von M , das nicht zu N gehört ; (*"echte"* Teilmenge) .

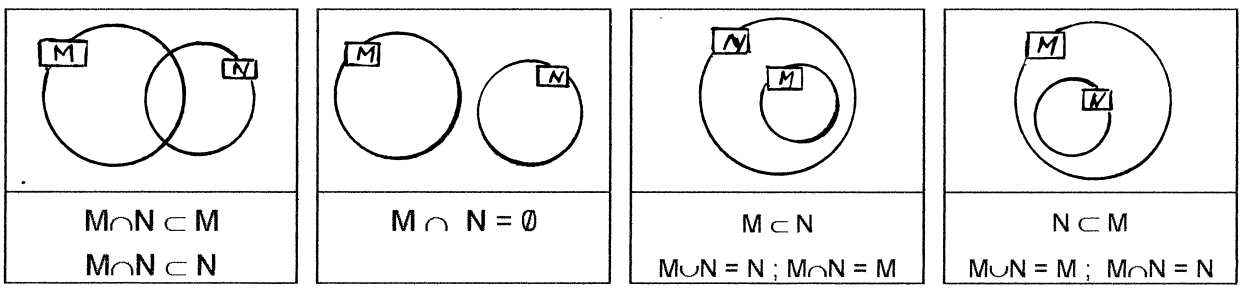
(3) $M \cup N$: Menge aller Elemente, die zu M *oder* zu N (oder zu beiden Mengen) gehören.

(4) $M \cap N$: Menge aller Elemente, die zu M *und* zu N gehören.

(5) $M \times N$: Menge aller geordneten Paare $[x; y]$ mit $x \in M$ und $y \in N$.

Das Ermitteln aller geordneten Paare mit $x \in M$ und $y \in N$ ist den Schülern aus der AG Klasse 5 bereits bekannt, neu ist lediglich die Bezeichnung $M \times N$ und der Name "Produktmenge" (der deshalb gewählt wurde, weil die Anzahl der geordneten Paare gleich dem Produkt der Anzahlen der Elemente aus M bzw. aus N ist). Man weise darauf hin, daß im allgemeinen $M \times N \neq N \times M$ gilt.

Beim Veranschaulichen von Vereinigung und Durchschnitt mit Hilfe von Diagrammen werden die Schüler aufgefordert, alle verschiedenen Fälle der "gegenseitigen Lage" zweier Mengen anzugeben. Dabei entsteht folgende Übersicht:



Für $M \neq N$ ist diese Fallunterscheidung vollständig.

3.5. Aussagen, Aussageformen und Terme

Ziele:
- Ermitteln von Erfüllungsmengen durch systematisches Probieren oder inhaltliche Überlegungen.
- Kennenlernen und Aneignen der Begriffe "Aussage" (Einzelaussage, Allaussage, Existenzaussage), "Aussageform" (erfüllbare, allgemeingültige, nicht erfüllbare Aussageform), "Erfüllungsmenge" (leere Menge), "Term" (Konstante, Variable), "Definition" .
- Einführen der Verknüpfungszeichen $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

In diesem Abschnitt ist es wichtig, daß der AG-Leiter nicht doziert, theoretisiert oder Definitionen auswendiglernen läßt. Die Schüler sollen lediglich befähigt werden, derartige mathematische Gebilde zu identifizieren und durch Angabe von Beispielen zu erläutern. Einige dieser Begriffe müßten den Schülern vom Unterricht her bekannt sein.

In *Aufgabe 1)* werden die Schüler aufgefordert, den zugehörigen "Merkstoff" durchzulesen. Dies sollte in gemeinsamer Arbeit erfolgen, wobei die Schüler sofort zu jedem der angeführten Begriffe Beispiele nennen. Abschließend werden entsprechende Beispiele auf S.7 der Aufgabensammlung eingetragen.

Die *Aufgabe 2)* sollte in zwei aufeinanderfolgenden Zirkeln gelöst werden, um eine bessere Aneignung der Begriffe zu ermöglichen. Vorher wird man mit den Schülern einen *"Entscheidungsalgorithmus"* erarbeiten.
Zunächst sollte man sich stets die Frage stellen, ob man dem betreffenden Gebilde einen der Wahrheitswerte "wahr (W)" oder "falsch (F)" zuordnen kann. Wenn das zutrifft, dann liegt eine *Aussage* vor, es sei denn, daß in einem der Ausdrücke "heißt", "nennt man" oder "bezeichnet" vorkommt, wodurch eine *Definition* charakterisiert wird. Liegt eine Aussage vor, dann wird man sofort entscheiden, ob es sich um eine Einzelaussage, Allaussage oder Existenzaussage handelt.
Liegt keine Aussage vor und tritt keine Variable auf, dann muß es sich um einen Term handeln, speziell um eine *Konstante*, die ein bestimmtes mathematisches Objekt bezeichnet.
Liegt keine Aussage vor und treten Variable auf, dann interpretiere man alle vorkommenden Variablen. Geht das Gebilde dabei in eine Aussage über, dann ist das Gebilde eine *Aussageform*, von der man gleich entscheiden sollte, ob sie erfüllbar, nicht erfüllbar oder allgemeingültig ist. Geht das Gebilde in keine Aussage sondern in die Bezeichnung eines Objekts (d.h. in eine Konstante) über, dann handelt es sich um einen *Term*.
Neben dieser (semantischen) Definition für den Begriff "Term" gibt es noch eine (syntaktische) Definition, auf die im Merkstoff durch die in Klammern stehende Bemerkung hingewiesen wird.
Man wird den Unterschied zwischen *"Operationszeichen"* und *"Relationszeichen"* erklären lassen und die Schüler auffordern, die in der Aufgabe 2) vorkommenden Operationszeichen +, :, ggT, kgV sowie die vorkommenden Relationszeichen =, <, | herauszusuchen und weitere Beispiele für solche Zeichen zu nennen.
Schließlich sollen die Schüler folgendes zweite Unterscheidungskriterium finden und formulieren: Kommen in einer mathematischen Zeichenreihe außer Konstanten und Variablen nur Operationszeichen vor, dann ist diese Zeichenreihe ein Term; kommt dagegen (u.U. neben Operationszeichen) ein Relationszeichen vor, dann ist diese Zeichenreihe eine Aussageform (bzw. eine Aussage, wenn keine freien Variablen vorkommen).
Bei Aussage (4) wird der AG-Leiter mitteilen, daß es sich um die Goldbachsche Vermutung handelt, für die bislang weder ein Gegenbeispiel noch ein Beweis gefunden werden konnte.
Vielen Schülern bereitet es Schwierigkeiten, zwischen wahren Aussagen und allgemeingültigen Aussageformen bzw. zwischen falschen Aussagen und nicht erfüllbaren Aussageformen zu unterscheiden. Beispiele hierfür findet man bei (6) und (7) bzw. bei (17)und (18). Diese Pro-

Damit kann man *Aufgabe 56c)* als gelöst betrachten, weil sich mit Hilfe dieser Rekursionsformel für jede Länge n eines Zahlenzuges auch die kleinstmögliche Zahl berechnen läßt, die im ersten Waggon vorkommen kann. Speziell gilt $W_k(7) = 15$, $W_k(10) = 47$ und $W_k(11) = 63$.
Abschließend kann man auf die Beziehungen zwischen einer expliziten Formel, wie wir sie für das Berechnen von $W_g(n)$ entdeckt haben, und einer Rekursionsformel eingehen. Die explizite Formel gibt die Gestalt des n-ten Gliedes der zugehörigen Folge an und ermöglicht es daher, sofort jedes beliebige Glied der Folge zu berechnen, ohne alle vorangegangenen Glieder kennen zu müssen. Der Übergang von einer expliziten Formel zu einer zugehörigen Rekursionsformel fällt im allgemeinen leicht. So gilt etwa $W_g(1) = 1$, $W_g(n+1) = 2W_g(n)$.
Wesentlich schwieriger ist der Übergang von einer Rekursionsformel zu einer zugehörigen expliziten Formel. Die Schüler erhalten den Auftrag, nach einer expliziten Formel für $W_k(n)$ zu suchen.
Relativ einfach ist zu erkennen, daß die Folge 1 , 3 , 7 , 15 , 31, 63 , ... das allgemeine Glied $2^n - 1$ für n = 1, 2, 3,... besitzt.
Weit mehr Findigkeit gehört dazu, zu erkennen, daß sich das allgemeine Glied der Folge 2 , 5 , 11 , 23 , 45 , 91 , ... in der Form $(3 \cdot 2^{n-1} - 1)$ mit n = 1,2,3,... schreiben läßt.

Relativ schwer ist die *Aufgabe V63)* . Hier besteht keinerlei Chance, die gesuchte Zahl durch Probieren zu ermitteln oder zu erraten. Die Aufgabe wird nicht schwieriger, wenn man verlangt, alle Zahlen zu ermitteln, die die gegebenen Bedingungen erfüllen.
Keine Schwierigkeiten bereitet das Festhalten der gegebenen Bedingungen. Bei Verwendung des Satzes über die Division mit Rest erhält man

(1) $z = 11a + 1$; (2) $z = 12b + 2$; (3) $z = 13c + 3$; (4) $z = 14d + 4$.

Eine ähnliche Aufgabenstellung findet man in Aufgabe 2) und Aufgabe 7).
Bei Aufgabe 2) waren wir beim 2.Lösungsweg von der "informativsten" Bedingung ausgegangen, hatten die zugehörige Erfüllungsmenge ermittelt, aus der wir diejenigen Elemente aussonderten, die die nächst informative Bedingung nicht erfüllten usw. Diese Vorgehensweise führt bei unserer Aufgabe nicht zum Ziel, weil erst das 857. Element der Erfüllungsmenge M_4 alle gestellten Bedingungen erfüllt.
Bei Aufgabe 7) waren wir von der Bedingung $100 = q_1x + 4$ über $q_1x = 96$ zur Teilbarkeitsaussage $96|x$ übergegangen. Ein analoges Folgern aus den gegebenen Bedingungen würde uns bei unserer Aufgabe zu

(1') $11|(z - 1)$; (2') $12|(z - 2)$; (3') $13|(z - 3)$; (4') $14|(z - 4)$

führen, was hier auch nicht weiterhilft.
Wir müssen also durch *"geschicktes" Folgern aus den gegebenen Bedingungen* eine spezielle Eigenschaft dieser Bedingungen noch besser ausnützen.
Bei Addition von 11 (bzw. 12, 13, 14) zu einer Zahl bleibt die Teilbarkeit durch 11 (bzw. 12, 13, 14) erhalten.

(1') $11|(z - 1) \Rightarrow$ (1*) $11|(x + 10)$;
(2') $12|(z - 2) \Rightarrow$ (2*) $12|(x + 10)$;
(3') $13|(z - 3) \Rightarrow$ (3*) $13|(x + 10)$;
(4') $14|(z - 4) \Rightarrow$ (4*) $14|(x + 10)$.

Hieraus folgt dann $kgV(11;12;13;14)|(x + 10)$ bzw. $x + 10 = 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot k$ und somit

$x = 12012k - 10$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Die kleinste Zahl, die alle gestellten Bedingungen erfüllt, lautet daher 12002 .
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit.

3.4. Gleichungen und Sachaufgaben

Ziele:
- Tabellen mit günstig gewählten Variablen zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsweg.
- "Übersetzen in die Sprache der Gleichungen".
- Rückwärtsarbeiten und Vorwärtsarbeiten.
- Verwenden von Lösungsgraphen zum Festhalten von Lösungsplänen.
- Lösen von Gleichungen durch "Folgern zum Zweck der Vereinfachung".
- Umrechnen von Größen.

Dieser Abschnitt hängt sehr eng mit dem Unterrichtsstoff zusammen und sollte daher besonders bei leistungsschwächern AGn einen Schwerpunkt der Arbeit bilden. Vorausgesetzt wird der Unterrichtsstoff aus dem "Lernbereich 2: Gebrochene Zahlen". Beim Lösen von Gleichungen und beim Umformen von Termen nehmen wir ausnahmsweise einen Teil des Unterrichtsstoffs der nächst höheren Klasse vorweg.
Aus der AG Klasse 5 sollten die Abschnitte "Hier helfen Variable, Tabellen und Gleichungen", "Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen" sowie "Aufgaben über Flächen und Körper" wiederholt werden.

Minimalvariante:
Ausbilden elementarer Fertigkeiten beim Lösen von einfachen Gleichungen durch Umformen (beidseitige Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) anhand der Aufgabe 1); Anwenden dieser Fertigkeiten beim Lösen von Sachaufgaben.
Ausbilden der Fähigkeit, Terme bzw. Gleichungen mit Variablen zum Festhalten von mathematischen Objekten bzw. Beziehungen zu verwenden. Anwenden dieser Fähigkeit beim Lösen der Sachaufgaben 3) bis 16) sowie der Aufgaben V1), V5), V6), V9), V11), V13), V16), V17), V21), V24), V31) und V35) .

Maximalvariante:
Überprüfen der oben genannten Fähigkeiten und Fertigkeiten beim selbständigen Lösen der Aufgaben 1), 15) bis 19) sowie der Aufgaben V36), V38), V44), V46), V48), V50), V53) und V57).
Umformen von Ungleichungen zum Zweck des Vereinfachens bei Aufgabe 2) .

In der AG Klasse 5 wurden beim Behandeln des Abschnitts "Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen" zunächst die Verfahren *"inhaltliches Lösen"* und *"systematisches Probieren"* einander gegenübergestellt. Beim Lösen der Aufgaben 5) und 6) auf S.13 in /4/ sollten die Schüler die Grenzen dieser Lösungsmethoden erkennen und das *"Vereinfachen durch Umformen"* als einen Spezialfall der Methode des *"Folgerns zum Zweck der Vereinfachung"* kennenlernen. Sie sollten einige Umformungsregeln entdecken, die dem Ziel dienen, die vorgelegte Gleichung in die Gestalt " x = a " zu bringen (bzw. in die Gestalt " x = x " oder " x = x + a " mit $a \neq 0$) .
Nach einer Wiederholung dieses Abschnitts aus der AG Kl.5 wird man hervorheben, daß die Teilhandlungen "Klammern beseitigen", "Brüche beseitigen", "Ordnen", "Zusammenfassen", "Variable isolieren" keinesfalls immer in der genannten Reihenfolge erfolgen müssen. Es ist stets unser Ziel, die gesuchten Lösungen möglichst geschickt zu ermitteln. Ferner wird man spätestens an dieser Stelle mitteilen, daß man anstelle von $\frac{3}{2}\cdot x$ bzw. $2\cdot(x + 3)$ auch kürzer $\frac{3}{2}x$ bzw. $2(x + 3)$ schreiben darf.

In *Aufgabe 1)* werden Gleichungen gelöst, die zum Teil in den darauf folgenden Sachaufgaben als Ansatzgleichung auftreten. Um den Übungseffekt zu erhöhen, empfiehlt es sich, das Lösen der Gleichungen auf mehrere Zirkel zu verteilen.

Beim Umformen von Gleichungen sollten sich die Schüler folgende Fragen stellen:

- Was "stört" am meisten? Was will ich "beseitigen"?
- Durch welche Rechenoperation läßt sich die gewünschte Vereinfachung herbeiführen?
- Wie kann ich erreichen, daß die Gleichung die Gestalt " x = ... " annimmt?

Dem Unterrricht vorgreifend wird den Schülern mitgeteilt, daß man beide Seiten einer Gleichung (oder Ungleichung) mit derselben (positiven) Zahl multiplizieren bzw. durch eine solche Zahl dividieren darf, und daß man auf beiden Seiten "dasselbe" (Zahl oder Term mit Variablen) addieren oder subtrahieren darf, und daß diese Operationen zum Vereinfachen von Gleichungen verwendet werden. Man prüfe nach, ob die Schüler die Bruchrechnung hinreichend beherrschen oder ob man diesbezüglich eine zusammenfassende Wiederholung durchführen muß.
Um das (im Unterricht relativ spät behandelte) Dividieren durch einen Bruch zum umgehen, wird man etwa bei *Aufgabe 5d)* zwei Umformungsschritte durchführen lassen:

$\frac{5}{2}x = 15 \mid \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 5x = 30 \mid :5 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad (\quad \Rightarrow \quad L = \{6\} \;)$

Da wir an dieser Stelle auf den Begriff des äquivalenten Umformens noch nicht eingehen wollen, ist ein *Existenznachweis* in Form einer Probe unerläßlich. Dies ermöglicht meist auch ein Üben der Bruchrechnung.
Die Schüler sollen erkennen, daß das Umformen zum Zweck der Vereinfachung (analog wie die "begründete Herleitung" bei zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben) den notwendigen *Einzigkeitsnachweis* liefert. Um die Gemeinsamkeiten dieser beiden Aufgabenarten hervorzuheben, kann man die Lösung auch in Form einer (der vereinfachten Gleichung entnommenen) Lösungsmenge schreiben.

Bei *Aufgabe 2)* wird analog vorgegangen. Allerdings muß hier die Frage, wie ein Existenznachweis zu führen ist, offenbleiben, und auch auf das Hinschreiben der Lösungsmenge wird man verzichten.

Die *Aufgaben 3) und 4)* sind Zahlenrätsel, bei denen die Schüler das *"Übersetzen in die Sprache der Gleichungen"* üben und festigen sollen. Bei dem geforderten selbständigen Bilden analoger Aufgaben wird dann das *"Übersetzen aus der Sprache der Gleichungen in die Wortsprache"* geübt. Hier sollte man hinreichend Zeit investieren, um auch bei leistungsschwächeren Schülern entsprechende Fähigkeiten und Fertigkeiten zu entwickeln.

Bei *Aufgabe 5)* wird man auf die Bedeutung einer geschickten Variablenwahl hinweisen. Hier ist es günstig, die Länge der 2.Teilstrecke mit x zu bezeichnen. Eine zweite in der Tabelle ebenfalls angegebene Möglichkeit führt zu einer komplizierteren Ansatzgleichung, die dritte Möglichkeit ist noch ungünstiger. In der Tabelle sollte auch die "Probe am Text" festgehalten werden.
Man beobachte, welche Schüler in der Lage sind, die Ansatzgleichung $2x + x + 6x = 20$ hinzuschreiben, ohne eine Tabelle als Hilfsmittel zu verwenden.

1.Teilstrecke	$2x$	$\frac{40}{9}$	x	$\frac{40}{9}$
2.Teilstrecke	x	$\frac{20}{9}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{20}{9}$
3. Teilstrecke	$6x$	$\frac{120}{9}$	$3x$	$\frac{120}{9}$
Gesamtstrecke	20	$\frac{180}{9} = 20$	20	$\frac{180}{9} = 20$
Ansatzgleichung	$9x = 20$		$\frac{9}{2}x = 20$	

Die *Aufgaben 6) bis 12)* lassen sich analog lösen.
Folgende Impulse sind bedeutsam:

- Variable einführen! (Günstigste Möglichkeit?)
- Läßt sich die Aufgabenstellung in einer Tabelle übersichtlich festhalten?
- Gegebene Beziehungen in Form einer Gleichung festhalten (in die "Sprache der Gleichungen" übersetzen)!
- (Ansatz-) Gleichung lösen! Antwortsatz!

Dabei wollen wir die Ansatzgleichung nicht als Größengleichung sondern als Gleichung zwischen Maßzahlen von Größen mit verträglichen Einheiten schreiben. Die Schüler müssen bei einer Sachaufgabe stets überprüfen, ob die gegebenen Größen verträgliche Einheiten haben oder ob man dies durch Umrechnen von Größen erst erzeugen muß.

Bei *Aufgabe 6)* lautet die *Ansatzgleichung* $\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + 100 = x$, wenn man die Länge der (in km gemessenen) zurückgelegten Gesamtstrecke mit x bezeichnet.

Bei *Aufgabe 7)* lautet die *Ansatzgleichung* $x + 5x = 10$, wenn man die Länge des (in Meter gemessenen) ersten Teils des Rohres mit x bezeichnet.

Bei *Aufgabe 8)* lautet die *Ansatzgleichung* $\frac{4}{15}x + \frac{2}{5}x + 100 = x$, wenn man die Länge der (in km gemessenen) gesamten Trainingsstrecke mit x bezeichnet. Es wäre ungeschickt, die beiden gesuchten Längen mit Variablen zu bezeichnen, um dann ein Gleichungssystem als "Ansatz" zu erhalten. Verwendet man eine *Tabelle* als Hilfsmittel, dann kommt man leicht mit einer geschickt gewählten Variablen aus und kann so die gesuchten Größen aus den in der Ansatzgleichung vorkommenden Termen (die auch in der Tabelle festgehalten sind) berechnen.

Wenn man bei *Aufgabe 9)* mit x die Stückzahl der im Januar produzierten Tische bezeichnet, dann lautet die *Ansatzgleichung*

$$x + (x+10) + (x+20) + ... + (x+100) + (x+110) = 1920 .$$

Die linke Seite der Gleichung läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$12x + 10(1 + 2 + ... + 10 + 11) = 12x + 10 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 12x + 660.$$

Aus $12x + 660 = 1920$ folgt dann $12x = 1260$, also $x = 105$. Nun ist noch zu berücksichtigen, daß im Juni $(x + 50)$ und im Dezember $(x + 110)$ Tische gefertigt wurden.

Wesentlich geschickter ist es, mit y die gesuchte Anzahl der im Juni produzierten Tische zu bezeichnen. Die *Ansatzgleichung* lautet dann

$$(y - 50) + (y - 40) + ... + (y - 10) + y + (y + 10) + ... + (y + 50) + (y + 60) .$$

Die linke Seite läßt sich dann sehr einfach in $12y + 60$ umformen, woraus dann $12y = 1860$ und schließlich $y = 155$ folgt.

Bei *Aufgabe 10)* lautet die *Ansatzgleichung* $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7$, wobei mit x der Betrag von Rainers Spargeld bezeichnet wurde.

Bei *Aufgabe 11)* lautet die *Ansatzgleichung* $x = \frac{3}{8}x + 1{,}5$, wobei mit x der (in € angegebene) Preis des Buches bezeichnet wurde. Die Schüler sollen sich entscheiden, ob sie den vorkommenden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch umwandeln wollen oder den vorkom-

menden Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch. Auf jeden Fall wird man das Resultat als Dezimalbruch angeben, da es unüblich ist, einen in € anzugebenden Preis durch einen gemeinen Bruch auszudrücken. In diesem Fall ist der scheinbare "Umweg" über die gemeinen Brüche dennoch der einfachere Weg (was bei einer anderen Gleichung dieser Art durchaus nicht der Fall zu sein braucht).

Bei *Aufgabe 12)* kann bei leistungsschwächeren Schülern eine *Skizze* gute Dienste leisten. Bezeichnet man die (in m gemessene) Länge der Rechteckseite, die nicht mit der Quadratseite übereinstimmt, mit a , dann lautet die *Ansatzgleichung* $30^2 + 30a = 3000$.

Bei den *Aufgaben 13) und 14)* sind die Einheiten der gegebenen Größen nicht verträglich, folglich muß man sich für verträgliche Einheiten entscheiden und dann eine *Umrechnung der Größen* vornehmen.

Bei den *Aufgaben 15) und 16)* wird man - anknüpfend an "Aufgaben über Flächen und Körper" aus der AG Kl.5 - die das *Rückwärtsarbeiten* charakterisierenden Impulse wiederholen und *Lösungsgraphen* zum Abspeichern von Lösuingsplänen verwenden.
Durch Übergang zu einer zugehörigen *parameterhaltigen Aufgabe* mache man den Schülern deutlich, daß ein solcher Lösungsgraph einen Lösungsplan für beliebig viele zugehörige konkrete Aufgaben liefert.

Aufgabe 15):

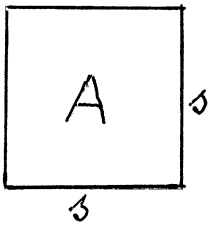
- Was ist gesucht?
- Was ist gegeben?
  - Günstige Variable einführen!
- Woraus ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Begründung!
- Woraus ließe sich .....

Was läßt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründung!

Halte den Lösungsplan fest!

Ges.: Flächeninhalt A (in ha) ;

Geg.: Kosten k = 992 (in €) ;
Preis p = 4 (in € pro Meter)



A ließe sich aus der Seitenlänge s berechnen, weil $A = s^2$.

s ließe sich aus dem Umfang u berechnen, weil $u = 4s$

Der Umfang u , weil .....

k

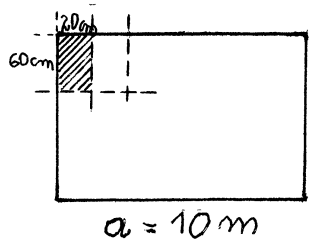
$\rightarrow$ u $\rightarrow$ s $\rightarrow$ [A]

p

Es geht hier noch nicht darum, das allgemeine Resultat $A = \frac{k^2}{16p^2}$ herzuleiten (dies sollte allenfalls als "Differenzierungsaufgabe" gestellt werden). Die Schüler sollen vielmehr nur lernen, den Lösungsplan für die zugehörige parameterhaltige Aufgabe allgemein zu formulieren:
"Ich berechne aus den gegebenen Kosten und dem gegebenen Preis (durch Division) den Umfang des Quadrats (in m), hieraus (nach Formel) seine Seitenlänge und hieraus (nach Formel) seinen Inhalt (in m²). Abschließend berechne ich diesen Inhalt in ha ."

Aufgabe 16)

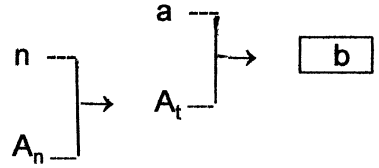
1.Lösungsweg



b = x m

Plattenanzahl: n = 400 ; Platteninhalt: 60·40 = 2400 (in cm²)

Lösungsplan:



Man überzeuge sich (vgl. Skizze), daß die 400 Platten tatsächlich so gelegt werden können, daß sie die Terasse bedecken.

2.Lösungsweg:
Wegen 1000cm : 60cm = $16\frac{2}{3}$ und 1000cm : 40cm = 25 können die Platten nur so liegen, wie in der Skizze angedeutet.
Wegen 400 : 25 = 16 ist die Terasse mit 16 Plattenreihen ausgelegt; wegen 16·60cm = 960cm ist die Terrasse 9,6m breit.
Man sollte nicht vergessen, Vor- und Nachteile der beiden Lösungswege zu diskutieren.

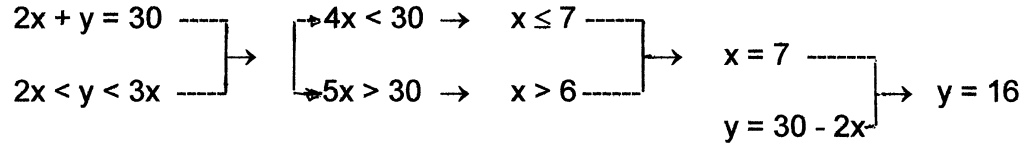
Bei *Aufgabe 17)* ist es günstig, die Anzahl der 20-Euroscheine mit x zu bezeichnen und die anderen Anzahlen durch x auszudrücken.

Ein *1.Lösungsweg* verwendet das *systematische Probieren,* wobei zu begründen ist, warum die gefundene Lösung die einzige Lösung ist.

x (20 €)	x - 1 (10 €)	y = 29 - x - (x - 1) (50 €)	Bedingung 2x < y < 3x
5	4	29 - 9 = 20	10 < 20 < 15 falsch
6	5	29 - 11 = 18	12 < 18 < 18 falsch
7	**6**	29 - 13 = **16**	14 < 16 < 21 **wahr**
8	7	29 - 15 = 14	16 < 14 < 24 falsch

Bei einem *2.Lösungsweg* werden die Hilfsmittel *Variable - Gleichung* eingesetzt:

(x - 1) + x + y = 29



Diese Herleitung liefert den *Einzigkeitsnachweis* ; der *Existenznachweis* ist durch eine "Probe am Text" zu erbringen.

Bei *Aufgabe 18a)* bietet sich nach der geschickten Wahl einer *Variablen* eine *Tabelle* als Hilfsmittel an, in der die gegebenen Bedingungen übersichtlich abgespeichert werden.

		Probe am Text
1.Zahl	2x + 3	2·6 = 3 = 15
2.Zahl	x	6
3. Zahl	[(2x + 3) + x =] 3x + 3	3·6 + 3 = 21
4. Zahl	[2(3x + 3) - 1 =] 6x + 5	6·6 + 5 = 41
Summe	12x + 11	83

Ansatzgleichung: 12x + 11 = 83 ⇒ 12x = 72 ⇒ x = 6

Bei *Aufgabe 18b)* soll die 4.Zahl bei Division durch 4 den Rest 1 lassen und die Summe soll kleiner als 83 sein. Daraus folgt x < 6 , also x∈{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 } , und es bietet sich *systematisches Probieren* als Hilfsmittel an.

2.Zahl	x	0	1	2	3	4	5
4.Zahl	6x + 5	5	11	17	23	29	35
Rest bei Division durch 4		1	3	1	3	1	3

Damit ist gezeigt, daß diese Aufgabe mehr als eine Lösung besitzt.
Es sollte hervorgehoben werden: Für die Darstellung der Lösung reicht es, festzustellen, daß es zwei Quadrupel von Zahlen gibt, die alle gegebenen Bedingungen erfüllen, z.B. die Quadrupel (7;2;9;17) und (11;4;15:29), und diese Feststellung durch zwei Proben zu bestätigen. Man muß bei dieser Aufgabenstellung nicht angeben, wie man die beiden Lösungen gefunden hat.

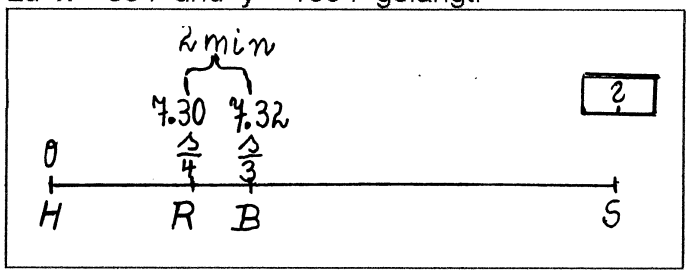
Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 19).* Es ist günstig, zuerst den zweitgenannten Fall zu betrachten, daß die beiden Autos den Rundkurs in entgegengesetzter Richtung durchfahren.
Man beginnt wieder mit dem Einführen von *Variablen*:

a: Geschwindigkeit von A (in m/s) ;
b: Geschwindigkeit von B (in m/s) ;
r: Länge des Rundkurses (in m) .

Der Aufgabe ist zu entnehmen, daß B schneller als A ist, daß also $b > a$ gilt.
Nun kann man *folgern*: Da sich A und B in 1 Sekunde um (a + b) Meter voneinander entfernen und da sie nach 5 Sekunden insgesamt r Meter hinter sich gebracht haben, gilt
$r = 5(a + b)$.
Günstiger ist es, die "Relativität der Bewegung" auszunützen. Wir gehen vom Standpunkt des B aus, der sich als ruhend empfindet. Folgende Fragen können nützlich sein:
Mit welcher Geschwindigkeit entfernt sich A von dem als ruhend angesehenen B ?
[Um (a + b) Meter pro Sekunde] .
Welche Zeit benötigt A , um die Länge r des Rundkurses zurückzulegen? [5 Sekunden] .
Was läßt sich daraus schließen? [$r = 5(a + b)$] .
Analog wird der 2.Fall behandelt, in dem A und B in gleicher Richtung den Rundkurs durchfahren. Hier entfernt sich A von dem als ruhend gedachten B mit einer Geschwindigkeit von (b - a) Meter pro Sekunde und benötigt für die r Meter des Rundkurses 20 Sekunden. Folglich gilt die Beziehung $r = 20(b - a)$.
Nun liegt es nahe, aus den beiden Ansatzgleichungen auf die Gleichung $5(b + a) = 20(b - a)$ zu schließen. Dies führt über $5b + 5a = 20b - 20a$ zu $25a = 15b$, und man erkennt, daß dies in eine Sackgasse führt, weil man nur eine Aussage über das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten erhält.
Für die Berechnung der gesuchten Fahrzeit pro Runde würde man die Rundenlänge r und die Geschwindigkeit benötigen, es sollte also r in den Gleichungen erhalten bleiben. Das führt von $r = 5(a + b)$ zu $b + a = \frac{r}{5}$ und von $r = 20(b - a)$ zu $b - a = \frac{r}{20}$. Nun kann man durch seitenweise Addition zu $2b = \frac{4r}{20} + \frac{r}{20} = \frac{5r}{20} = \frac{r}{4}$ und folglich zu $b = \frac{r}{8}$ zu gelangen. Hieraus folgt dann $a = \frac{r}{5} - \frac{r}{8} = \frac{3r}{40}$. Hieraus folgt dann, daß B zum Durchfahren des Rundkurses 8 Sekunden braucht, A dagegen $\frac{40}{3}$ Sekunden.

Bei der sehr leichten *Aufgabe V1)* kommt man durch *Vorwärtsarbeiten* ans Ziel, wobei es lohnt, für die unbestimmte Anzahl der errungenen Goldmedaillen die *Variable* g einzuführen.
Wie man leicht erkennt, wurden 21 Silbermedaillen und 11 Bronzemedaillen errungen, also muß $g + 21 + 11 = 42$ gelten, woraus dann $g = 10$ folgt. Damit ist nachgewiesen, daß die Aufgabe eindeutig lösbar ist *(Einzigkeitsnachweis).*
Eine Probe am Text bestätigt die Richtigkeit der ermittelten Zahlen *(Existenznachweis).*

Bei *Aufgabe V5)* liegt es nahe, als Hilfsmittel *"Variable - Gleichungen"* einzusetzen.
Aus den Ansatzgleichungen $x + y = 2028$ und $\frac{x}{28} = \frac{y}{128}$ folgt $y = 2028 - x$ und $128x = 28y$, woraus man durch Einsetzen und Umformen zu $x = 364$ und $y = 1664$ gelangt.
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit des Resultats.



Bei *Aufgabe V6)* führt *Vorwärtsarbeiten* zum Ziel, wobei eine *Skizze* der Veranschaulichung des Sachverhalts dienen kann.
Bezeichnet man die Länge von $\overline{HS}$ mit s, dann hat $\overline{RB}$ die Länge $(\frac{s}{3} - \frac{s}{4} =) \frac{s}{12}$.
Da die Strecke $\overline{RB}$ in 2 Minuten durchlaufen wurde, folgt hieraus, daß für die Strecke $\overline{HS} = s$ insgesamt 24 Minuten, für $\overline{HR} = \frac{s}{4}$ also 6 Minuten und für $\overline{RS} = \frac{3s}{4}$ also 18 Minuten benötigt wurden, woraus sich dann außer der Ankunftszeit von 7.48 Uhr auch noch 7.24 Uhr als Zeitpunkt des Aufbruchs ermitteln läßt.

Bezeichnet man bei *Aufgabe V9)* die für den 1.Abschnitt benötigte (in Stunden gemessene) Zeit mit t, dann lautet die *Ansatzgleichung* $t + 3t + \frac{3}{2}t = 110$, woraus $t = 20$ folgt. Der Rest ist einfach.

Bezeichnet man in *Aufgabe V11)* die (in km gemessene) Länge der Gesamtstrecke mit s, dann lautet die *Ansatzgleichung* $\frac{1}{3}s + 150 + \frac{1}{4}s = s$, woraus $s = 360$ folgt. Der Rest ist einfach.

Bezeichnet man bei *Aufgabe V13)* das Gewicht der Kugeln, der Würfel bzw. der Pyramide mit k, w bzw. p, dann gilt laut Aufgabenstellung $p + 5w = 14k$ und $p = w + 8k$, woraus durch Einsetzen die Gleichung $w + 8k + 5w = 14k$ und somit $6w = 6k$ bzw. $w = k$ folgt. Setzt man dies in $p = w + 8k$ ein, dann erhält man $p = 9k$. Damit ist gezeigt, daß nur folgende Beziehung gelten kann: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.
Eine Probe am Text liefert den *Einzigkeitsnachweis*.

Auch die *Aufgabe V16)* ist mit dem Hilfsmittel *"Variable - Gleichungen"* zu bewältigen. Es ist günstig, das Alter des jüngsten Kindes mit x zu bezeichnen. Die einzige Schwierigkeit könnte darin bestehen, das Alter des Großvaters durch x auszudrücken. Da das Alter des ältesten Kindes $4x$ beträgt, ist $(64 + 4x)$ das Alter des Großvaters.
Die *Ansatzgleichung* lautet $x + 2x + 4x + 2(x+2x+4x) + (14x + x) = 64 + 4x$, woraus $x = 2$ folgt. Der Rest ist einfach.

Von einem etwas anderen Typ ist die *Aufgabe V17)*. Hier führt *Folgern aus den Bedingungen* sowie *systematische Erfassen aller möglichen Fälle* zum Ziel.
Laut gegebener Bedingung sind 21 Flaschen und der Inhalt von $(7 + \frac{7}{2} =) \frac{21}{2}$ Flaschen gleichmäßig zu verteilen, also bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $3\frac{1}{2}$ Flaschen.
Folglich kann Anke höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt.

Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.
Folglich muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten.
Durch systematisches Ermitteln aller Verteilungen, die die Bedingungen erfüllen, gelangt man dann zu folgenden beiden Lösungen:

	voll	halb	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halb	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

Bezeichnet man in *Aufgabe V21)* die erste Zahl mit x, dann lautet die *Ansatzgleichung* $x + (x+10) + 3x = 210$, was zu $x = 40$ führt.

Bezeichnet man in *Aufgabe V24)* den Futtervorrat mit x, den Tagesbedarf der Kühe, Schweine bzw. Ziegen mit k, s bzw. z und die gesuchte Anzahl von Tagen mit t, dann gilt laut Aufgabenstellung $4k = \frac{x}{10}$, also $k = \frac{x}{40}$. Analog erhält man $s = \frac{x}{60}$ und $z = \frac{x}{120}$. Die *Ansatzgleichung* lautet dann $\frac{x}{40}\cdot t + \frac{x}{60}\cdot t + \frac{x}{120}\cdot t = x$ wegen $x \neq 0$ also $\frac{t}{40} + \frac{t}{60} + \frac{t}{120} = 1$.
Hieraus folgt $t = 20$, also reicht der Futtervorrat für alle Tiere gemeinsam 20 Tage.
In diesen 20 Tagen verzehren die Kühe $\frac{x}{2}$, die Schafe $\frac{x}{3}$, die Ziegen $\frac{x}{6}$, wegen $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x$ also tatsächlich den ganzen Futtervorrat.

Bei *Aufgabe V31)* lauten die gegebenen Bedingungen

(1) $\frac{m}{n} = 0{,}4$ mit $m,n \in \mathbf{N}$ und $n > 0$; (2) $m + n = z^2$ mit zweistelligem z^2.

Bei *Aufgabe V31a)* kommt man durch *systematisches Probieren* zum Ziel. Man ermittelt systematisch alle (m;n), die Bedingung (1) erfüllen und prüft nach, ob sie auch (2) erfüllen.
Es gilt

$\frac{m}{n}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{12}{30}$	$\frac{14}{35}$	.....	$\frac{28}{70}$	$\frac{30}{75}$
m + n	7	14	21	28	35	42	**49**	.....	98	105

Bei *Aufgabe V31b)* wäre diese Vorgehensweise viel zu aufwendig. Hier wird wieder deutlich, daß *Folgern aus den Bedingungen* in der Regel die günstigere Vorgehensweise ist.
Aus (1) folgt $\frac{m}{n} = \frac{2k}{5k}$, also $m + n = 7k$. Aus (2) folgt dann, daß $k = 7i^2$ mit $i \in \mathbf{N}$ gelten muß, weil nur dann $7k$ eine Quadratzahl sein kann.
Nun braucht man nur noch diejenigen i zu ermitteln, für die $m + n = 7k$ zweistellig bzw. dreistellig wird.

Für $i = 1$ gilt $m + n = 7^2 = 49$ sowie $m = 2\cdot 7 = 14$ und $n = 5\cdot 7 = 354$, also $\frac{m}{n} = \frac{14}{35}$.

Für $i = 2$ gilt $m + n = 7^2\cdot 2^2 = 196$ sowie $m = 56$ und $n = 140$, also $\frac{m}{n} = \frac{56}{140}$.

Für $i = 3$ gilt $m + n = 7^2\cdot 3^2 = 441$ sowie $m = 126$ und $n = 315$, also $\frac{m}{n} = \frac{126}{315}$.

Für $i = 4$ gilt $m + n = 7^2\cdot 4^2 = 784$ sowie $m = 224$ und $n = 560$, also $\frac{m}{n} = \frac{224}{560}$.

Für $i > 4$ wird $(m + n)$ nicht mehr dreistellig.

Folglich können nur die angegebenen drei Brüche Lösungen unserer Aufgabe sein. *(Einzigkeitsnachweis).*
Eine Probe bestätigt,. daß sie tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllen *(Existenznachweis).*

Die *Aufgabe V35)* läßt sich durch *Vorwärtsarbeiten* bewältigen, wobei die vom Unterricht her bekannte *Dreisatzrechnung* wiederholt werden kann.

Bezeichnet man in *Aufgabe V36a)* den ersten der neun Summanden mit x , dann lautet die *Ansatzgleichung*

$$x + (x + \tfrac{1}{2}) + (x + 1) + (x + \tfrac{3}{2}) + (x + 2) + (x + \tfrac{5}{2}) + (x + 3) + (x + \tfrac{7}{2}) + (x + 4) = 48 ,$$

folglich $9x + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{2} + \tfrac{5}{2} + \tfrac{6}{2} + \tfrac{7}{2} + \tfrac{8}{2}) = 48$,

folglich $9x + \tfrac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + 7 + 8) = 48$,

folglich $9x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 9 = 48$,

folglich $9x + 18 = 48$

und somit $x = \tfrac{30}{9} = \tfrac{10}{3}$.

Daher ist $\tfrac{10}{3}$ der kleinste und $(\tfrac{10}{3} + 4 =) \tfrac{22}{3}$ der größte der neun Summanden.

Zu einem einfacheren Lösungsweg gelangt man, wenn man den 5. Summanden (also den "mittleren" der 9 Summanden) mit y bezeichnet. Die *Ansatzgleichung* lautet dann

$$(y - 2) + (y - 1{,}5) + \ldots + y + \ldots + (y + 1{,}5) + (y + 2) = 48 ,$$

also gilt $9y = 48$ bzw. $y = \tfrac{16}{3}$ mit $(y - 2 = \tfrac{16}{3} - 2 =) \tfrac{10}{3}$ als kleinstem Summanden und zu $(y + 2 =) \tfrac{22}{3}$ als größtem Summanden

Bei *Aufgabe 36b)* wird man analog vorgehen, allerdings wird man nicht alle Summanden hinschreiben. Da der hundertste Summand $(x + \tfrac{99}{2})$ lautet, gilt

$$x + (x + \tfrac{1}{2}) + (x + \tfrac{2}{2}) + \ldots + (x + \tfrac{99}{2}) = 2495 ,$$

also $100x + \tfrac{1}{2}(1 + 2 + \ldots + 99) = 2495$,

folglich $100x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 99\cdot 100 = 2495$

und somit $100x + 2475 = 2495$,

also $x = \tfrac{1}{5}$.

Somit ist $\tfrac{1}{5}$ der kleinste und $(\tfrac{1}{5} + \tfrac{99}{2} =) \tfrac{497}{10}$ der größte der hundert Summanden.
Sehr leistungsstarke Schüler kann man auffordern, die *verallgemeinerte Aufgabe* zu lösen, in der eine Zahl m als Summe von n derartigen Summanden dargestellt werden soll. Analoges Vorgehen führt zur Gleichung $nx + \tfrac{1}{4}(n - 1)n = m$, von der aus man zu $x = \frac{4m - (n - 1)n}{4n}$ gelangen kann. Da man für $m = 48$ und $n = 9$ tatsächlich $x = \tfrac{10}{3}$ erhält, ist es sehr wahrscheinlich, daß beim Umformen kein Fehler aufgetreten ist.

Bei *Aufgabe V38)* kann man das *Einführen günstiger Bezeichnungen* üben. Dann kann man die gegebenen Bedingungen und einige Folgerungen wie folgt darstellen:

(1) $v + m + k_1 + k_2 = 124$;:
(2) $v + m = 3(k_1 + k_2)$;
(3) $v > m > 2k_1$;
(4) $v - m = 9(k_1 - k_2)$.

(1),(2) $\Rightarrow$ $4(k_1 + k_2) = 124 \Rightarrow$ (5) $k_1 + k_2 = 31$

Nun wäre es möglich, mit Hilfe von (4) und (6) sowohl v als auch m allgemein durch d auszudrücken. Man kann aber auch durch systematisches Probieren für d = 1 , 3 , 5 ... die zugehörigen v und m ermitteln und dann überprüfen, in welchen Fällen die (bisher noch nicht verwendete) Bedingung (3) erfüllt ist. Dies führt zu folgender Tabelle:

$k_1 - k_2 = d$	v	m	k_1	k_2	(3) erfüllt?	(3') erfüllt?
1	51	42	16	15	ja	ja
3	60	33	17	14	nein	ja
5	69	24	18	13	nein	nein

Ersetzt man in *Aufgabe 38b)* die Bedingung (3) durch (3') $m > 2k_2$, dann erkennt man, daß in diesem Fall die Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist.

Man kann die Lösung von Aufgabe 38a) auch *variablenfrei* darstellen, wie das in der Musterlösung zur Aufgabe 130731 der Mathematik-Olympiade der Fall ist:
"Wegen (1) und (2) ist die vierfache Alterssumme beider Kinder gleich 124; die Kinder sind deshalb zusammen 31 Jahre, die Eltern zusammen 93 Jahre alt.
Da die Lebensalter der vier Personen in ganzen Jahren angegeben werden, und da 31 eine ungerade Zahl ist, so ist von den Altersangaben der Kinder die eine gerade, die andere ungerade. Daher ist die Differenz der Lebensalter der beiden Kinder eine ungerade Zahl.
Betrüge sie 3 oder mehr Jahre, so wäre sie bei den Eltern 27 oder mehr Jahre. Dann wäre das eine Kind 17 Jahre oder älter, das andere Kind 14 Jahre oder jünger, die Mutter 33 Jahre oder jünger und der Vater 60 Jahre oder älter.
Wegen 2·17 > 33 und (3) entfällt diese Möglichkeit. Somit beträgt die Differenz bei den Kindern 1 Jahr, bei den Eltern also 9 Jahre.
Daraus folgt:
Der Vater ist 51 Jahre, die Mutter 42 Jahre, das älteste Kind 16 und das andere Kind 15 Jahre alt."
Es ist fraglich, ob eine derartige variablenfreie Darstellung besonders vorteilhaft ist.

Als Lösung für *Aufgabe V44)* reicht die Feststellung, daß diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist, weil sowohl der Betrag von 2080 € als auch der Betrag von 2010 € alle gegebenen Bedingung erfüllt. Es gilt nämlich
sowohl 12·10€ + 13·20€ + 34·50€ = 2080€
mit 12+13+34 = 59 , 12 = 13 - 1 , 2·13 < 34 < 3·13
als auch 13·10€ + 14·20€ + 32·50€ = 2010€
mit 13+14+32 = 59 , 13 = 14 - 1 , 2·14 < 32 < 3·14 .
Hierbei wird deutlich, daß das Finden und das Darstellen der Lösung einer Aufgabe in der Tat zweierlei ist. Um die beiden Lösungen zu finden, wird man sich wie üblich der Hilfsmittel "Variable - Gleichungen" oder "systematisches Probieren" bedienen. Für das Darstellen der Lösung ist dies hier jedoch ohne Bedeutung.

Aufgabe V46) stimmt weitgehend mit Aufgabe 18) überein.
Bezeichnet man die dritte gedachte Zahl mit x , dann lautet die Ansatzgleichung bei V46a)
(3x + 3) + (2x + 3) + x + (4x + 3) = 89 , woraus 10x + 9 = 89 und somit x = 8 folgt.
Also lauten die vier Zahlen, die sich Axel gedacht hat : 27 , 19 , 8 , 35 .
Die Summe aus der ersten und der dritten Zahl beträgt dann (4x + 3) , und diese Summe ist genau dann durch 3 teilbar, wenn dies für x der Fall ist.
Für x = 3 lauten die vier Zahlen 12 , 9 , 3 , 15 , und für die Summe gilt s = 39 < 89 .
Für x = 6 lauten die vier Zahlen 21 , 15 , 6 , 27 , und für die Summe gilt s = 69 < 89 .

Die Summe aus der ersten und der dritten Zahl beträgt dann $(4x + 3)$, und diese Summe ist genau dann durch 3 teilbar, wenn dies für x der Fall ist.
Für $x = 3$ lauten die vier Zahlen 12 , 9 , 3 , 15 , und für die Summe gilt $s = 39 < 89$.
Für $x = 6$ lauten die vier Zahlen 21 , 15 , 6 , 27 , und für die Summe gilt $s = 69 < 89$.
Also besitzt die Aufgabe von Bodo mehr als eine Lösung, und Axel hat mit seiner Aussage recht.

Die *Aufgabe V48)* stimmt - mit Ausnahme der gegebenen Zahlenwerte - mit der Aufgabe 19) überein.

Bei *Aufgabe V50)* spielt wieder das Hilfsmittel *"Variable - Gleichungen"* eine wichtige Rolle. Man kann für jeden der in der Skizze gegebenen 6 Aufhängepunkte eine Gleichung angeben, wobei sich die zu den beiden obersten Aufhängepunkten gehörenden Gleichungen als überflüssig erweisen. Bei naheliegender Variablenwahl lauten die restlichen vier Gleichungen:

(1) $k + f = g$;
(2) $(k+f+g) + s = 2f + g$, folglich $k + s = f$;
(3) $2s = k$;
(4) $x = 3s + k$.

(2),(3) $\Rightarrow$ (5) $f = 3s$;
(1),(5) $\Rightarrow$ (6) $g = 5s$;
(3),(4) $\Rightarrow$ (7) $x = 5s$.

Hieraus lassen sich dann alle gesuchten Möglichkeiten ableiten:

$x = 5s = 3s+k = 2s+f = s+2k = k+f = g$.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe V53)* . Hier hängt viel vom geschickten *Einführen von Variablen* ab, und *Tabellen* erweisen sich als günstiges Hilfsmittel.

1.Lösungsweg:
Wählt man "früher", "jetzt" und "später" als Zeileneingänge und bezeichnet das "frühere" Alter von Bernd mit b sowie die zwischen "früher" und "später" liegende Anzahl von Jahren mit x , dann kann man laut Aufgabenstellung das Feld (B/f) mit "b", die Felder (A/j) und (B/s) jeweils mit "2b" füllen, und in Feld (A/f) steht dann "2b - x" , im Feld (B/j) steht "b+x" . Ferner kann man die "63" als Summe der Altersangaben zum Zeitpunkt "später" eintragen.
Laut Aufgabenstellung gilt ferner $2b - x = b + x$, also $b = 2x$.
Wenn es uns gelingen würde, auch das Feld (A/s) zu füllen, dann kämen wir zu einer Ansatzgleichung mit der "63" auf der rechten Seite.
Da es nicht gelingt, in das freie Feld einen Term mit der Variablen b zu plazieren, versuchen wir, alle Felder unter Verwendung der Variablen x zu füllen. Wegen $b = 2x$ gilt $B_f = 2x$, und es fällt leicht, fünf der sechs Felder der Tabelle mit Ausdrücken in x zu füllen. Die entscheidende Erkenntnis (auf die man bei Betrachtung der Tabelle stoßen kann) besteht darin, daß nicht nur zwischen "früher" und "jetzt", sondern auch zwischen "jetzt" und "später" x Jahre liegen. Das gestattet es, das Feld (A/s) mit dem Term $5x$ zu füllen, was dann zur Ansatzgleichung $5x + 4x = 63$ und somit zu $x = 9$ führt.
Abschließend wird man die Felder der Tabelle mit den zugehörigen Zahlen füllen und eine "Probe am Text" als *Existenznachweis* durchführen.

	f	j	s
A	2b - x	2b	
B	b	b + x	2b
Summe			63

	f	j	s
A	3x	4x	**5x**
B	2x	3x	4x
Summe			63

	f	j	s
A	21	28	35
B	14	21	28
Summe			63

2.Lösungsweg:
Bezeichnet man das jetzige Alter von A (also A_j) mit a und die Zeitdifferenz zwischen "früher" und "jetzt" mit t , dann wird $A_f = a - t = B_j$ sowie $B_f = \frac{1}{2}a$, also $B_j = \frac{1}{2}a + t$. Hieraus folgt dann $a - t = \frac{1}{2}a + t$, also $a = 4t$. Der Rest verläuft wie oben angegeben.

Bezeichnet man bei *Aufgabe V57)* die gesuchte Schüleranzahl mit x , dann erhielt jeder Schüler (x - 1) Fotografien. Laut Aufgabenstellung muß daher $x(x - 1) = 812$ gelten, wobei x eine (positive) natürliche Zahl ist.
Es gilt $812 = 2^2 \cdot 7 \cdot 29$. Da x und (x - 1) benachbarte natürliche Zahlen sind, erfüllt nur die Zerlegung $812 = 28 \cdot 29$ die gestellten Bdingungen.
Folglich tauschten 29 Schüler in der genannten Klasse ihre Fotos.

blematik sollte man jedoch nicht überbewerten. Man wird die Schüler darauf aufmerksam machen, daß alle mathematischen Formeln und viele mathematische Sätze nur als (allgemeingültige) Aussageform aufgeschrieben werden, daß dabei aber stets wahre Allaussagen gemeint sind, bei denen das "Für alle .... gilt: ..." nicht mit hingeschrieben wurde (aber stets mit gesprochen werden sollte).

Bereits bei Aufgabe 2) kann man die Frage stellen, wie man aus Aussageformen Aussagen gewinnen kann. In *Aufgabe 3)* werden die Schüler aufgefordert, zu vorgegebenen Aussageformen jeweils zwei Variablenbelegungen so zu finden, daß bei der einen Belegung eine wahre, bei der anderen Belegung eine falsche Einzelaussage entsteht. Dabei sollen sie erkennen, daß diese Aufgabe für bestimmte (nämlich allgemeingültige oder nicht erfüllbare) Aussageformen nicht lösbar ist.

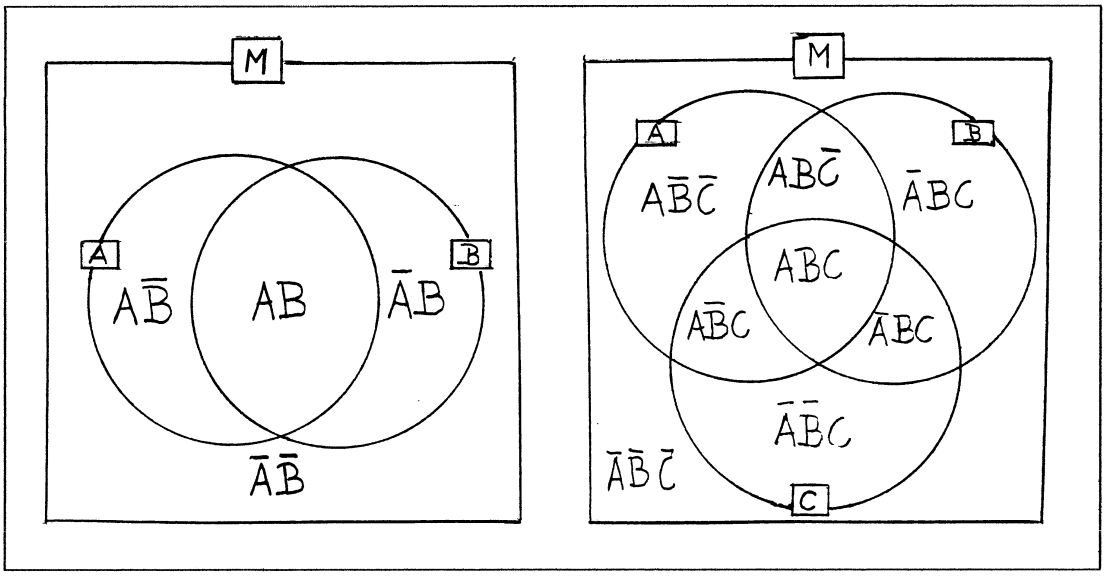
Beim Behandeln der *Aufgabe 4)* wird man die Schüler fragen, wer die hier vorkommenden Zeichen "$\wedge$" und "$\vee$" bereits kennt. Es werden die im Merkstoff auf S.31 stehenden Ausführungen durchgelesen und dann die Teilaufgaben von Aufgabe 4) zunächst *"aus der Symbolsprache in die Wortsprache übersetzt".* Anschließend werden die gesuchten Erfüllungsmengen der gegebenen Aussageformen durch systematisches Probieren oder durch inhaltliche Überlegungen ermittelt.
Die Schüler sollen erkennen, daß zur *Konjunktion* bzw. *Alternative* zweier Aussageformen der *Durchschnitt* bzw. die *Vereinigung* der Erfüllungsmengen dieser Aussageformen gehören, wobei man auf die geschickte Wahl der Symbolik "$\wedge$ - $\cap$" bzw. "$\vee$ - $\cup$" aufmerksam machen wird.
Ferner sollen die Schüler erkennen, daß nicht erfüllbare Aussageformen die *leere Menge* als Erfüllungsmenge besitzen, und daß bei allgemeingültigen Aussageformen die Erfüllungsmenge mit dem vorgegebenen Grundbereich übereinstimmt.
Das Resultat der Aufgabe 4) sollte man in Tabellenform wie folgt festhalten:

Aussageform $H(x)$; $x \in X$	Erfüllungsmenge M
$x \mid 6$; $x \in \mathbb{N}$	$M_1 = \{ 1, 2, 3, 6 \}$
$6 \mid x$; $x \in \mathbb{N}$	$M_2 = \{ 0, 6, 12, 18, ..., 6n, ... \}$
$x < 4$; $x \in \mathbb{N}$	$M_3 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$
$x \mid 6 \wedge 6 \mid x$	$M_1 \cap M_2 = \{ 6 \}$
$x \mid 6 \vee 6 \mid x$	$M_1 \cup M_2 = \{ 0. 1. 2. 3. 6. 12. 18. ... \}$
$x \mid 6 \wedge x < 4$	$M_1 \cap M_3 = \{ 1, 2, 3 \}$
$x \mid 6 \vee x < 4$	$M_1 \cup M_3 = \{ 0, 1, 2, 3, 6 \}$
$ggT(x;4) = 2$; $x \in \mathbb{N}^+$	$M_4 = \{ 2, 6, 10, 14, ..., 2+4k, ... \}$
$ggT(x;3) = 2$; $x \in \mathbb{N}^+$	$M_5 = \emptyset$
$kgV(x;3) = 6$; $x \in \mathbb{N}^+$	$M_6 = \{ 2, 6 \}$
$kgV(x;6) = 6$; $x \in \mathbb{N}^+$	$M_7 = \{ 1. 2. 3, 6 \}$
$2x + 1 = 4$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_1 = \{ \frac{3}{2} \}$
$(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_2 = \{ \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \}$
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_3 = \mathbb{Q}_+$
$x^2 = x^2 + 1$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_4 = \emptyset$
$x < x$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_5 = \emptyset$
$x < x + 1$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$M_6 = \mathbb{Q}_+$

falsch sind. Zur Widerlegung der falschen Aussagen (2) und (3) langt jeweils ein Gegenbeispiel, wofür man Mengendiagramme verwenden darf.
Zum Nachweis der Wahrheit der Aussagen (1) und (4) langt dagegen die Angabe von Beispielen nicht aus; für die hier verlangte "Begründung" kann man zwar Mengendiagramme mit heranziehen, man sollte aber darüberhinaus auf die entsprechenden Definitionen zurückgreifen.

Bei *Aufgabe 8)* sollten die Schüler zunächst erkennen, daß es sich hier um Distributivgesetze handelt. Man wird darauf hinweisen, daß für Zahlen zwar $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ gilt, nicht aber stets auch $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$.
Das Ausfüllen des Arbeitsblatts auf S.10 der Aufgabensammlung sollte man auf zwei Zirkel verteilen, um den Übungseffekt zu erhöhen. Die Schüler sollen erkennen, daß hier keine vollständige Fallunterscheidung vorliegt, sie sollen selbst weitere mögliche Fälle finden und einen dieser Fälle in die letzte Zeile des Arbeitsblatts eintragen. Wir veranschaulichen jeweils die Mengen auf der rechten und der linken Seite der Gleichung und vergleichen. In der 1.Zeile des Arbeitsblatts wurde die geforderte Veranschaulichung bereits eingetragen.

Beim Lösen der *Aufgaben 9) und 10)* knüpfe man an den Stoff aus der AG Klasse 5 an (vgl. /9/, S.40 ff.) und lasse die Schüler die in /4/, S.32 angegebene "Musterlösung" durcharbeiten. Die Aufgaben sind so leicht, daß man (ohne explizites Einführen günstiger Bezeichnungen) nur durch Eintragen der entsprechenden Zahlen in das Mengendiagramm zur Lösung gelangen kann



Dennoch sollte man das Einführen günstiger Bezeichnungen hier wiederholen und die Nützlichkeit dieses Vorgehens beim Lösen von schwereren Aufgaben dieser Art demonstrieren. Die Schüler sollten die obenstehenden Abbildungen ins Heft übernehmen.
Wir treffen folgende Vereinbarungen:
Die "Allmenge" M wird durch ein Rechteck dargestellt, in dessen Rand die Anzahl ihrer Elemente eingetragen wird. Ist diese Anzahl nicht bekannt, dann wird sie ebenfalls mit M bezeichnet (was zwar nicht ganz korrekt, aber dennoch unmißverständlich ist).
Teilmengen A, B, C von M , über die etwas ausgesagt wird, werden durch Kreise dargestellt, wobei man (falls nicht ausdrücklich etwas anderen gefordert wird) bezüglich der gegenseitigen Lage den "allgemeinsten" Fall wählt. Auch hier werden die Anzahlen der Elemente in den Rand der Kreise eingetragen. In das Innere der 8 Felder werden dann die Anzahlen der Elemente der Mengen ABC, $AB\bar{C}$, $A\bar{B}C$, ..., $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ eingetragen.

Folgende allgemeine *Impulse* können beim Lösen solcher Aufgaben nützlich sein:

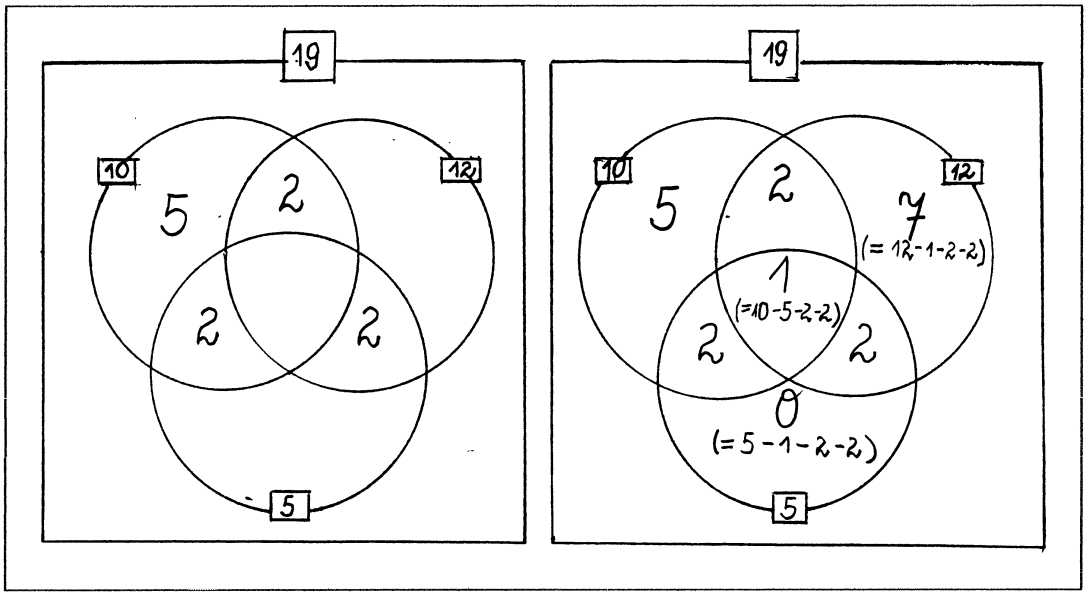
- Günstige Veranschaulichung?
  - Wieviel Mengen sind zu veranschaulichen? Wie soll das erfolgen?
- Günstige Bezeichnungen?
  - Wie halte ich die Anzahl der Elemente fest, die zur 1. Menge gehören; die zur 1. und 2.Menge, nicht aber zur 3.Menge gehören; usw.
  - Wo trage ich diese Anzahlen in das Mengendiagramm ein?
- Gegebenes und Gesuchtes festhalten!
  - Mengendiagramm bzw. eingeführte Bezeichnungen verwenden!
- Was läßt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründung!
- Was läßt sich nun berechnen? Begründung!

Man beachte, daß die mit "∘" gekennzeichneten Unterimpulse nur dann verwendet werden sollen, wenn die mit "-" gekennzeichneten Hauptimpulse noch nicht zum gewünschten Ergebnis führen, und daß die Unterimpulse möglichst von Schülern gestellt werden sollen, die bereits einen Lösungsweg gefunden haben.

Bei Aufgabe 9) bezeichnen wir mit H , K bzw. S die Anzahl der Sportler, die den Handstand, den Kopfstand bzw. den Salto beherrschen. Die Anzahl aller dieser Sportler (Bodenturner) bezeichnen wir mit B . Dann können wir das Gegebene wie folgt (schriftlich oder durch Eintrag in ein Mengendiagramm) festhalten:

<u>Geg.:</u>

B = 19 ;
H = 10 ;
K = 12 ;
S = 5 ;
$HK\overline{S}$ = 2
$H\overline{K}S$ = 2
$\overline{H}KS$ = 2 ;
$H\overline{K}\overline{S}$ = 5 .



Welches leere Feld können wir nun füllen? Begründung!

Das zentrale Feld läßt sich als erstes füllen, weil $HKS = H - (HK\overline{S} + H\overline{K}S + \overline{H}KS)$ = = 10 - (5+2+2) = 1 gilt.

Als nächstes läßt sich das Feld mit $\overline{H}K\overline{S}$ = 12 - (1+2+2) = 7 , dann das Feld mit $\overline{H}\overline{K}S$ = 5 - (2+2+1) = 0 .

Damit ist gezeigt: Wenn die Aufgabe eine Lösung besitzt, dann kann dies nur die im Diagramm festgehaltene sein *(Einzigkeitsnachweis)* .

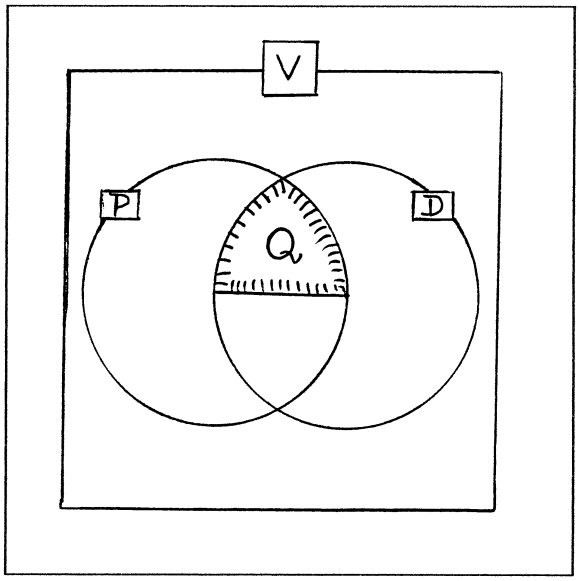
Nun muß noch überprüft werden, ob diese Lösung tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllt *(Existenznachweis)*. Würde man die (für unsere Herleitung nicht benötigte) Bedingung

B = 19 etwa durch B = 18 ersetzen, hätte unsere Aufgabe keine Lösung. In unserem Fall gilt jedoch tatsächlich
$B = HK\bar{S} + H\bar{K}S + \bar{H}KS + H\bar{K}\bar{S} + \bar{H}K\bar{S} + \bar{H}\bar{K}S = 1 + 2 + 2 + 2 + 5 + 7 + 0 = 19$.

Aufgabe 10) läßt sich analog lösen; die Schüler sollten versuchen, selbständig ans Ziel zu gelangen.

Bei *Aufgabe V22)* liegt die Vermutung nahe, daß ein Mengendiagramm nützlich sein könnte. Hier führt jedoch *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* einfacher ans Ziel. Dabei ist es günstig, mit Bedingung (2) zu beginnen.
Es gilt (2) Wenn U und R , dann F (und D) .
(2) $\Rightarrow$ (3) Wenn U und R , dann R und F (und D) .
Es gilt (1) Wenn R und F , dann E .
(3),(1) $\Rightarrow$ (4) Wenn U und R , dann E und F und D .
Also benötigen diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen der anderen drei Vortragssprachen (das sind Englisch, Französisch und Deutsch) keinen Dolmetscher.

Bei *Aufgabe V27)* geht es um Beziehungen zwischen vier Mengen P , Q , D , V , wobei V als die "Allmenge" angesehen werden kann.
Das nebenstehende Mengendiagramm liefert die in V27a) geforderte Zeichnung, wobei nicht zu erwarten ist, daß die Schüler sofort ein derartiges Diagramm finden. Beim Lesen der ersten vier Sätze des Aufgabentextes kann man der Auffassung sein, daß Q der Durchschnitt von P und D ist. Erst der fünfte Satz zeigt, daß das falsch ist. "Es gibt Drachekel, die Paradukel aber keine Quadrakel sind". Dies führt dann zu der angegebenen Korrektur des ursprünglich gezeichneten Diagramms. Man überzeugt sich, daß das neue Diagramm alle gegebenen Bedingungen erfüllt.

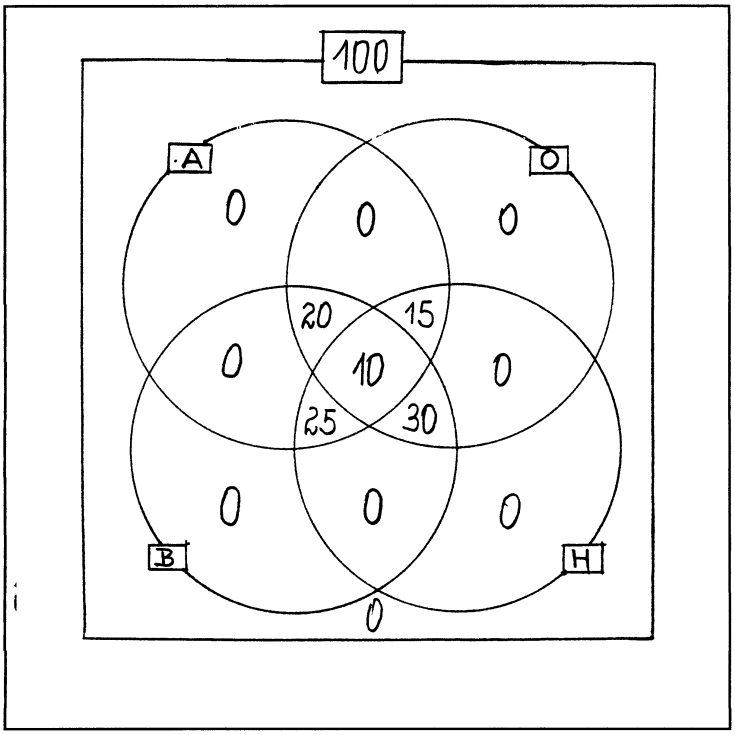


Die in V27b) und V27c) gestellten Fragen sind jetzt leicht zu beantworten:
Es gibt keine Quadrakel, die Paradukel aber keine Drachekel sind.
Wenn ein Bewohner gleichzeitig ein Paradukel und ein Vierokel ist, dann muß er keinesfalls auch ein Drachekel sein.
Man könnte natürlich auch die Menge B aller Bewohner als Allmenge wählen und die Menge V als eine Teilmenge von B , die die Mengen P und D (und damit auch Q) umfaßt.

Bei *Aufgabe V34)* geht es um Beziehungen zwischen drei Mengen M , E , D , die alle in einer Menge S enthalten sind, die 39 Elemente besitzt, wofür wir kurz und unmißverständlich S = 39 schreiben.
Verwendet man zur Veranschaulichung ein Mengendiagramm, dann lassen sich die Informationen aus den gegebenen Bedingungen (1) M = 11 , (2) E = 19 und (3) D = 23 nicht sofort eintragen, wohl aber die Information aus Bedingung (4) $M\bar{E}\bar{D} = 1$. Auch die in den Bedingungen (5) $\bar{M}E\bar{D} = 4$, (6) $\bar{M}\bar{E}D = 7$ und (7) $M\bar{E}D = 2$ enthaltenen Informationen lassen sich sofort im Diagramm abspeichern. Nun läßt sich wegen (4), (5) und (1) das zu $M\bar{E}\bar{D}$ gehörende Feld füllen, u.s.w. Auf der Grundlage des so gefundenen Lösungsplans läßt sich die Lösung wie folgt darstellen, wobei man auf die Angabe des Mengendiagramms verzichten kann:

Aus (1), (4), (5) und (7) folgt wegen 11 - 1 - 4 - 2 = 4 , daß genau 4 Schüler genau in Mathematik die Zensur 2 haben.
Aus (2), (4), (6) und (7) folgt wegen 19 - 1 - 7 - 2 = 9 , daß genau 9 Schüler genau in Englisch die Zensur 2 haben.
Aus (3), (4), (5) und (6) folgt, daß wegen 23 - 1 - 4 - 7 = 11 genau 11 Schüler genau in Deutsch die Zensur 2 haben.
Wegen 4 + 9 + 11 = 24 haben somit genau 24 Schüler dieser Gruppe in genau einem der genannten Fächer die Zensur 2 .
Da wegen (5). (6) und (7) genau 13 Schüler in genau zwei der Fächer eine 2 haben und wegen (4) noch ein weiterer Schüler hinzukommt, haben wegen 24 + 13 + 1 = 38 mithin genau 38 Schüler in wenigstens einem der Fächer die Zensur 2 .
Folglich hat genau 1 Schüler dieser Gruppe in keinem der genannten Fächer die Zensur 2 .

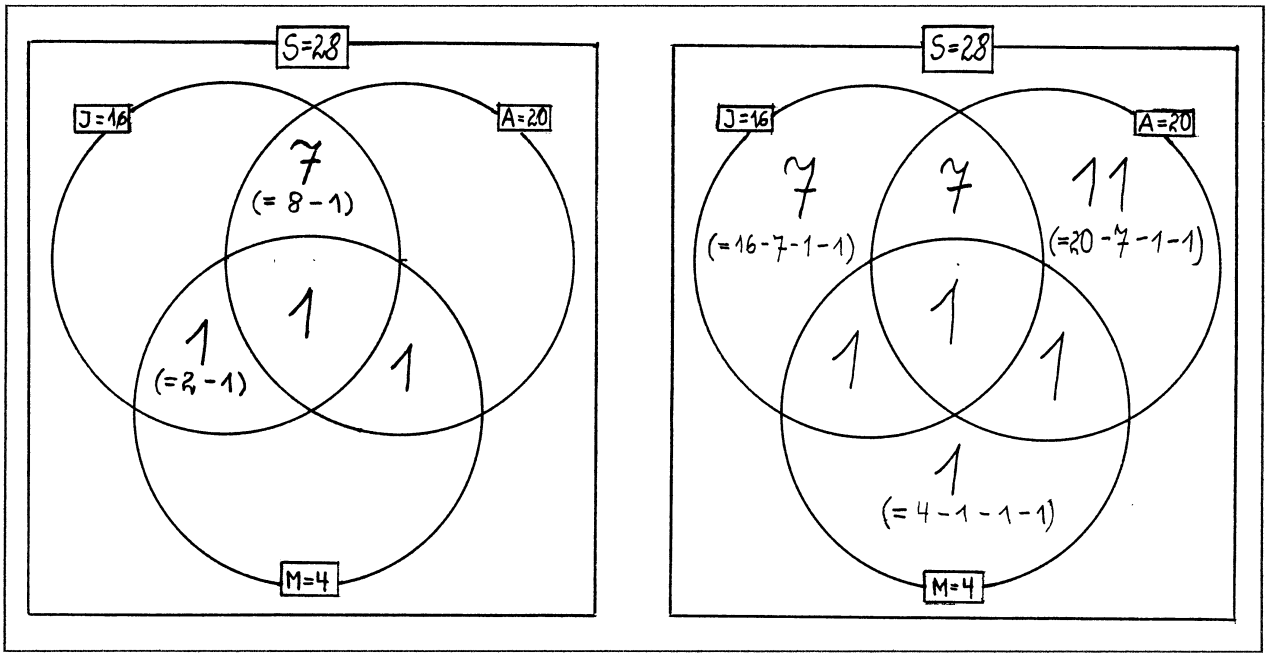
Bei *Aufgabe V41)* geht es um Beziehungen zwischen vier Mengen A, O, H, B . Wie auf S.64 gezeigt wurde, kann man für 2 Mengen ein Mengendiagramm mit 1+2+1 = 4 = 2^2 Feldern und für 3 Mengen ein Mengendiagramm mit 1+3+3+1 = 8 = 2^3 Feldern zeichnen, in die man dann alle interessierenden Anzahlen eintragen kann. Für 4 Mengen müßte das "allgemeine" Diagramm 1+4+6+4+1 = 16 = 2^4 Felder enthalten. Das nebenstehende Diagramm enthält aber nur 1+4+4+4+1= 14 Felder. Die zu AOHB und zu AOHB gehörenden Anzahlen lassen sich in dieses Diagramm nicht eintragen. Bei dieser Aufgabe spielt das keine Rolle, weil - wie wir sehen werden - AOHB = 0 und AOHB = 0 gilt.



Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, daß man (mit Ausnahme der Anzahl 100 der Elemente der Allmenge) keine der gegebenen Zahlen 70, 75, 80, 85 sofort in eines der Felder des Diagramms eintragen kann.
Die entscheidende Information besteht darin, daß jede der 100 Personen mindestens drei der genannten Körperteile verlor. Also können wir 9 Felder des Diagramms mit einer "0" füllen. Die entscheidende Frage lautet jetzt: Wieviel der Personen verloren kein Auge, kein Ohr, keine Hand bzw. kein Bein?
Wenn von den 100 Personen 70 Personen ein Auge verloren, dann haben 30 Personen kein Auge verloren, und wir können die 30 in das zu AOHB gehörende Feld eintragen. Analog können wir drei weitere Felder mit den Zahlen 25, 20 bzw. 15 füllen.
Wegen 100 - (30+25+20+15) = 10 können wir nun auch das letzte noch freie Feld mit der 10 füllen.
Die Antworten auf die in a), b) und c) gestellten Fragen sind nun leicht zu finden.

Aufgabe V52:
Sei J die Anzahl der Jungen aus einer Klasse mit S = 28 Schülern (also J die Anzahl der Mädchen), sei A die Anzahl derjenigen Schüler, die eine AG besuchen und sei M die Anzahl derjenigen Schüler, die an der Mathematik-Olympiade teilgenommen haben.

Dann lassen sich die gegebenen Anzahlen J = 16 , A = 20 , M = 4 , JAM = 1 und $\overline{J}AM = 1$ wie in der Figur angegeben sofort in ein Mengendiagramm eintragen. Für die gegebenen Anzahlen JA = 8 und JM = 2 ist dies jedoch nicht möglich.
Wegen $JA\overline{M} = JA - JAM = 8 - 1 = 7$ und $J\overline{A}M = JM - JAM = 2 - 1 = 1$ lassen sich nun zwei weitere Felder des Mengendiagramms füllen (vgl. die linke Figur). Damit wurden (mit Ausnahme von S = 28) alle gegebenen Anzahlen verwendet, und es ist nun leicht möglich, die restlichen drei Felder des Diagramms mit $J\overline{A}\overline{M} = 7$, $\overline{J}A\overline{M} = 11$ und $\overline{J}\overline{A}M = 1$ zu füllen (vgl. rechte Figur).
Wegen 7+7+11+1+1+1+1 = 29 entsteht ein Widerspruch zu S = 28 , also können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.



Daß es nicht unbedingt nötig ist, alle angegebenen Anzahlen zu berechnen, zeigt der folgende
2.Lösungsweg:
Aufgrund der Gesamtzahl der Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften (20) und der Zahl der Jungen unter ihnen (8) und wegen 20 - 8 = 12 müßte es in der Klasse 12 Mädchen geben, die in Arbeitsgemeinschaften tätig sind.
Aufgrund der Gesamtanzahl der Olympiadeteilnehmer (4) und der Zahl der Jungen unter ihnen (2) und wegen 4 - 2 = 2 müßte es in der Klasse genau 2 Mädchen geben, die an der Olympiade teilgenommen haben.
Es wird nun ausgesagt, daß genau eines dieser Mädchen auch Mitglied einer Arbeitsgemeinschaft ist. Also folgt aus den Angaben, daß außer 12 Mädchen, die Mitglieder von Arbeitsgemeinschaften sind, noch ein weiteres Mädchen in die Klasse gehen müßte. Da somit die Zahl der Mädchen in der Klasse mindestens 13 sein würde, die Zahl der Jungen mit 16 angegeben wird, 13 + 16 = 29 ist, die Klasse aber nur 28 Schüler umfassen soll, können die Angaben von Frank Schludrig nicht stimmen.

3.7. Das Umformen und Umkehren von Sätzen

Ziele:
- Logisch-sprachliche Schulung;
  - Fähigkeit, Sätze umzuformen und umzukehren;
  - Fähigkeit, durch Einführen günstiger Bezeichnungen Sätze als Zeichenreihen zu schreiben und solche Zeichenreihen wieder in die "Wortsprache" zu übersetzen.
- Anleitung zu selbständigem Wissenserwerb.

Zunächst sollte man sich informieren, welche Schüler das (im Lehrplan als "Zusatzstoff" bezeichnete) Umkehren von Sätzen im Unterricht bereits kennengelernt haben. Im allgemeinen wird man davon ausgehen können, daß der hier zu behandelnde Stoff über den Unterrichtsstoff hinausgeht.

Minimalvariante:
- Formulieren mathematischer Sätze als Implikation (Trennen in "Vorausetzung" - "Behauptung"); Vertrautmachen mit der "Symbolsprache"; Aufgabe 1) .
- Gemeinsames etappenweises Erarbeiten des "Merkstoffs".
- Umformen (Kontraponieren) von Sätzen mit einer Voraussetzung (auch aus nichtmathematischen Bereichen); entsprechende Teile von Aufgabe 2) .
- Umkehren von Sätzen mit einer Voraussetzung (auch aus nichtmathematischen Bereichen); entsprechende Teile von Aufgabe 3) .

Maximalvariante:
- Selbständiges Erarbeiten des Merkstoffs mit anschließender Kontrolle beim weitgehend selbständigen Lösen der Aufgaben 1), 2) und 3) .
- Umformen und Umkehren von Sätzen mit mehreren Voraussetzungen einschließlich dem Zusammenfassen von Satz und wahrer Umkehrung zu einem "Genau-dann-wenn-Satz"; (Morgansche Regeln sowie Herausziehen von Teilvoraussetzungen); Kontrolle der erworbenen Fähigkeiten anhand von Aufgabe 4) .
- Sicherheit im Übersetzen von Sätzen aus der "Wortsprache" in die "Symbolsprache" und umgekehrt.

Bei *Aufgabe 1)* geht es darum, als Zeichenreihen geschriebene Sätze verschiedenartig in die "Wortsprache" zu übersetzen. Der Satz S(3) $4|a \Rightarrow 2|a$ läßt sich folgendermaßen formulieren:

"Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar."

"Aus der Teilbarkeit durch 4 folgt die Teilbarkeit durch 2 ."

"Durch 4 teilbare Zahlen sind stets auch durch 2 teilbar."

Man begründe, warum von den verschiedenen Formulierungsmöglichkeiten die "Wenn-dann-Form" besonders wichtig ist und teile den Schülern mit, daß es eine weitere wichtige Formulierungsform eines Satzes gibt, die im Unterricht im allgemeinen nicht behandelt wird. Unter der Zielstellung "Wir wollen lernen, uns selbständig Wissen anzueignen", werden die Schüler aufgefordert, auf Seite 33 der Aufgabensammlung /1/ die 15 Zeilen Text von "Wahre Aussagen heißen ..." bis "... nicht $4|x$" durchzuarbeiten und zu versuchen, den ersten Teil von *Aufgabe 2)* zu lösen, d.h. die Kontrapositionen zu den Sätzen (S1) bis (S6) , die jeweils nur eine Voraussetzung besitzen, mündlich zu formulieren.
Nach Formulierung der Merkregel "Vertauschen und Verneinen von Voraussetzung und Behauptung ist erlaubt" wird man die Frage stellen, ob es auch "erlaubt" ist, V und B nur zu vertauschen. Hier müßten die Schüler vom Unterricht her wissen, daß die auf diese Weise erhaltene Umkehrung auch eine falsche Aussage sein kann.

Nach dem Durchlesen der ersten 5 Zeilen des Abschnitts "Das Umkehren von Sätzen" sollen die Schüler den ersten Teil der *Aufgabe 3)* lösen, d.h. jeweils die Umkehrung der Sätze (S1) bis (S6) in symbolischer Form notieren, in der "Wortsprache" formulieren und entscheiden, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt. Falsche Umkehrungen sind durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ferner wird man den Schülern erklären, wie man einen Satz (mit einer Voraussetzung) und seine wahre Umkehrung zu einem "Genau-dann-wenn-Satz" zusammenfassen kann.

An der Wandtafel sollte man folgendes festhalten:

(S3)	$4\|x$	$\Rightarrow$	$2\|x$,	(W) ; Beweis erforderlich .
(K3)	$2\nmid x$	$\Rightarrow$	$4\nmid x$;	(W) ; kein erneuter Beweis erforderlich .
(U3)	$2\|x$	$\Rightarrow$	$4\|x$;	(F) ; Gegenbeispiel $a = 6$: $2\|6 \not\Rightarrow 4\|6$.
(S5)	$9\|QS(x)$	$\Rightarrow$	$9\|x$;	(W) ; Beweis erforderlich .
(U5)	$9\|x$	$\Rightarrow$	$9\|QS(x)$;	(W) ; Beweis erforderlich .
(Z5)	$9\|x$	$\Leftrightarrow$	$9\|QS(x)$;	(W) ; kein erneuter Beweis erforderlich .

In einer Teilzusammenfassung sollte man nochmals hervorheben, daß der Übergang von ($V \Rightarrow B$) zu (nicht $B \Rightarrow$ nicht V) "erlaubt" ist, weil dabei der Wahrheitswert der Aussage stets erhalten bleibt, der Übergang von ($V \Rightarrow B$) zu ($B \Rightarrow V$) dagegen "nicht erlaubt" ist, weil dadurch eine neue Aussage entsteht, die auch falsch sein kann. Der Übergang von ($V \Leftrightarrow B$) zu ($B \Leftrightarrow V$) ist wieder erlaubt, weil es sich hierbei um zwei gleichbedeutende Sätze handelt.
Nun sollten die Schüler dazu gebracht werden, selbst die Frage zu stellen und zu beantworten, ob der Übergang von ($V \Rightarrow B$) zu (nicht $V \Rightarrow$ nicht B) erlaubt ist oder nicht.

Nach erfolgreicher Bewältigung dieser Aufgaben kann man leistungsstarken Schüler den Auftrag geben, den restlichen Text aus dem Merkstoff zu "Das Umformen und Umkehren von Sätzen" durchzuarbeiten und dann in *Aufgabe 2)* die Kontrapositionen zu den Sätzen (S7) bis (S10) mit zwei Voraussetzungen zu bilden. Anhand selbstgewählter Beispiele sollen sie sich überzeugen, daß "*nicht* (A *und* B)" gleichbedeutend ist mit "(*nicht* A) *oder* (*nicht* B)".
Beim Lösen des Restes der *Aufgabe 3)* wird man hervorheben, daß man zu Sätzen mit zwei Voraussetzungen insgesamt drei Umkehrungen bilden kann, und daß es durchaus möglich ist, daß ein derartiger Satz mehr als eine wahre Umkehrung besitzt. Falsche Umkehrungen sollen durch Gegenbeispiele widerlegt werden.
Besonders problematisch ist das Zusammenfassen eines Satzes mit mehreren Voraussetzungen und einer wahren Umkehrung dieses Satzes. Zu diesem Zweck müssen sich die Schüler zunächst anhand von Beispielen davon überzeugen, daß " Wenn A und B , dann C " gleichbedeutend ist mit den Sätzen "Wenn A , dann gilt: Wenn B , dann C " bzw. "Wenn B , dann gilt: Wenn A , dann C " , und sie müssen dieses *"Herausziehen einer Teilvoraussetzung"* üben. Erst dann kann das Zusammenfassen eines solchen Satzes mit einer wahren Umkehrung geübt werden.
Das Suchen nach einer wahren Umkehrung eines Satzes mit mehreren Voraussetzungen und das Zusammenfassen eines solchen Satzes mit einer wahren Umkehrung liegt erfahrungsgemäß an der oberen Leistungsgrenze von Schülern der Klassenstufe 6 und sollte nur besonders leistungsstarken Schülern zugemutet werden. Das Resultat solcher Überlegungen kann wie folgt festgehalten werden:

(S10)	(α, β Stufenw. an g,h) $\wedge$ g||h $\Rightarrow$ $\alpha = \beta$;	(W); Beweis erforderlich .
(K10)	$\alpha \neq \beta \Rightarrow$ nicht [(α, β Stufenw. an g,h) $\wedge$ g||h];	(W) ;ohne Beweis .
	$\alpha \neq \beta \Rightarrow$ (α, β keine Stw. an g,h) oder nicht g||h ;	(W); ohne Beweis .
($K_1$10)	$\alpha \neq \beta \wedge$ g||h $\Rightarrow$ (α, β keine Stw. an g,h) ;	(W) ; ohne Beweis .

($K_2$10)	(α, β Stufenw. an g,h) $\wedge\ \alpha \neq \beta \Rightarrow$ nicht g||h ;	(W) ; ohne Beweis .
(U10)	$\alpha = \beta \Rightarrow$ [(α, β Stufenw. an g,h) $\wedge$ g||h] ;	(F) ; Scheitelwinkel .
($U_1$10)	$\alpha = \beta \wedge$ g||h $\Rightarrow$ (α, β Stufenw. an g,h) ;	(F) ; Wechselwinkel .
($U_2$10)	(α, β Stufenw. an g,h) $\wedge\ \alpha = \beta \Rightarrow$ g||h ;	(W) ; Beweis erforderlich .
(S10)	(α, β Stw. an g,h) $\Rightarrow$ [g||h $\Rightarrow\ \alpha = \beta$] ;	(W) ; ohne Beweis .
($U_2$10)	(α, β Stw. an g,h) $\Rightarrow$ [$\alpha = \beta \Rightarrow$ g||h] ;	(W) ; ohne Beweis .
($Z_2$10)	(α, β Stw. an g,h) $\Rightarrow$ [$\alpha = \beta \Leftrightarrow$ g||h] ;	(W) ; ohne Beweis .

Dabei ist es für die sprachliche Schulung sehr bedeutsam, daß die Schüler diese Sätze in der "Wortsprache" und auch variablenfrei formulieren.
Wenn die Schüler "die" Umkehrung des Stufenwinkelsatzes (womit die einzige wahre Umkehrung gemeint ist) im Unterricht kennengelernt haben, dann wird man darauf hinweisen, daß in den Lehrbüchern die gemeinsame Voraussetzung von (S10) und ($U_2$10) in der Regel "stillschweigend" herausgezogen wird, damit den Schülern das Formulieren dieser Umkehrung leichterfällt. Aus demselben Grund wird auf die falschen Umkehrungen nicht eingegangen, wodurch bei den Schülern der Eindruck entsteht, daß ein Satz höchstens eine wahre Umkehrung besitzen kann.

Beim Lösen der recht anspruchsvollen *Aufgabe 4)* können folgende *Impulse* helfen:

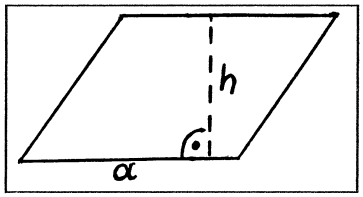
- Wie lautet die Behauptung?
- Wie lautet die Voraussetzung?
  - Wieviel Voraussetzungen kommen vor?
- Günstige Bezeichnungen einführen!
- Satz in "symbolischer Form" (unter Verwendung dieser Bezeichnungen) festhalten!
- Alle möglichen Umkehrungen bilden und deren Wahrheitswert feststellen!
- Die Falschheit einer Umkehrung durch Angabe eines Gegenbeispiels angeben!
- Welche Voraussetzung haben der Satz und eine wahre Umkehrung dieses Satzes gemeinsam? Diese Voraussetzung jeweils "herausziehen" und dann die beiden zu einem Genau-dann-wenn-Satz zusammenfassen!

Bei *Aufgabe 4a)* sollen die Schüler erkennen, daß der Satz

(S11)	[2|x	und	3|QS(x)]	$\Rightarrow$	6|x		die wahre Umkehrung
(U11)	6|x	$\Rightarrow$	[2|x	und	3|QS(x)]		besitzt und daß daher
(Z11)	6|x	$\Leftrightarrow$	[2|x	und	3|QS(x)]		gilt.

Durch Anwendung der bekannten Teilbarkeitsregel $3|x \Leftrightarrow 3|QS(x)$ geht Z(11) in die ebenfalls bekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 6 über. Hier tritt der relativ seltene Fall ein, daß bei einem Satz (S) mit zwei Voraussetzungen bereits die "globale" Umkehrung (U) eine wahre Aussage ist, woraus dann folgt, daß trivialerweise auch (U_1) und (U_2) wahre Aussagen sind

Die Lösung der *Aufgabe 4b)* kann wie folgt festgehalten werden:
Seien a_1 und a_2 die Längen der Grundseiten, h_1 und h_2 die Längen der zugehörigen Höhen sowie A_1 und A_2 die Flächeninhalte zweier beliebiger Parallelogramme.
Dann gilt stets:



(S) $[(a_1 = a_2) \wedge (h_1 = h_2)] \Rightarrow A_1 = A_2$; (W) ; Beweis nötig!

(U) $A_1 = A_2 \Rightarrow [(a_1 = a_2) \wedge (h_1 = h_2)]$; (F)

Gegenbeispiel: $a_1 = 1$, $h_1 = 4$, $a_2 = 2$, $h_2 = 2$, $A_1 = A_2 = 4$.

(U_1) $[(A_1 = A_2) \wedge (h_1 = h_2)] \Rightarrow a_1 = a_2$; (W) ; Beweis nötig!

(U_2) $[(a_1 = a_2) \wedge (A_1 = A_2)] \Rightarrow h_1 = h_2$; (W) ; Beweis nötig!

Bei einem derartigen Vorgehen üben die Schüler den Einsatz symbolischer Schreibweisen. Man sollte jedoch nie vergessen: Das Verwenden von "Symbolik" ist kein Selbstzweck, sondern nur Mittel zum Zweck! Man sollte daher überprüfen, welche Schüler bereits in der Lage sind, ohne expliziten Einsatz von Symbolik die gesuchten Umkehrungen korrekt zu bilden und "variablenfrei" zu formulieren, und man sollte dies als anzustrebendes Endziel hervorheben. Es sollten etwa folgende Formulierungen angestrebt werden:

(U) Flächengleiche Parallelogramme haben gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen. (F)

(U_1) Flächengleiche Parallelogramme mit gleich langen Höhen haben auch gleich lange Grundseiten. (W)

(U_2) Flächengleiche Parallelogramme mit gleich langen Grundseiten haben auch gleich lange Höhen. (W)

(Z_1) Wenn zwei Parallelogramme gleich lange Höhen haben, dann gilt:
Diese Parallelogramme sind inhaltsgleich genau dann, wenn sei gleich lange Grundseiten haben.

(Z_2) Wenn zwei Parallelogramme gleich lange Grundseiten haben, dann gilt:
Diese Parallelogramme sind inhaltsgleich genau dann, wenn sei gleich lange Höhen haben.

Hier liegt der relativ seltene Fall vor, daß die Umkehrungen (U_1) und (U_2) beide wahr sind. In diesem Fall gilt dann auch folgende Genau-dann-wenn-Aussage, die sich ebenfalls in zwei wahre Wenn-dann-Aussagen zerlegen läßt:

(Z_3) Wenn zwei Parallelogramme inhaltgleich sind, dann gilt:
Diese Parallelogramme haben gleich lange Grundseiten genau dann, wenn sie gleich lange Höhen haben.

Diese Problematik kann man beim Lösen der Aufgabe 13) auf S.17 von /1/ wieder aufgreifen. Sollte den Schülern zu diesem Zeitpunkt die Formel zur Berechnung des Inhalts von Parallelogrammen noch unbekannt sein, dann betrachte man den entsprechenden Satz für Rechtecke.

3.8. Das Beweisen von Sätzen ; zahlentheoretische Beweisaufgaben

Z i e l e :
- Erkennen der Beweisnotwendigkeit und Methode des direkten Beweises.
- Übertragen der (beim Lösen von Bestimmungsaufgaben eingeführten) Strategien VA und RA auf das Lösen von Beweisaufgaben.
- Verwenden von Lösungsgraphen zum Abspeichern von Beweisplänen.
- Verwenden von Variablen zum Festhalten von Sätzen in symbolischer Schreibweise.
- Übersetzen in die Sprache der Gleichungen.
- Dreispaltige Beweisschemata als Darstellungsform für Beweise.

Laut "Lehrplan Gymnasien - Mathematik , Klassen 5 - 12" des Sächsischen Staatsministeriums für Kultus wird das "Erstmalige Bekanntmachen mit der Beweisnotwendigkeit und der Methode des direkten Beweises" für den "Lernbereich 5: Dreiecke und Kongruenz von Figuren" vorgesehen. Es ist vorteilhaft, in einer AG das Beweisen auf der Grundlage des Stoffs aus dem Lernbereich 1 "Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen" einzuführen.

Wiederholung von Stoff aus der AG Klasse 5:
RA und VA beim Lösen von Bestimmungsaufgaben aus dem Abschnitt "Aufgaben über Flächen und Körper". RA beim Suchen nach Gewinnstrategien bei mathematischen Spielen.

Minimalvariante:
- Feststellen der Wahrheitswerte der Aussagen in Aufgabe 1) und Aufgabe 8) .
- Gemeinsames Erarbeiten des Beweises von Aussage (1) in Aufgabe 1); Aufgabe 2) .
- Beweis der Aussagen (1) bis (4) in Aufgabe 4) .
- Aufgabe 3) und Aufgabe 6) .

Maximalvariante:
- Weitgehend selbständiges Lösen der Aufgaben 1), 3), 4), 6), 8) .
- Aufgaben 5), 7) und 9) .

Es ist anzustreben, daß die Schüler die Impulse, die das VA unf RA beim Lösen von Bestimmungsaufgaben kennengelernt und wiederholt haben, möglichst selbst auf das Lösen von Beweisaufgaben übertragen. Es empfiehlt sich, die "Merkschemata" mit den beiden Fragezeichen recht oft an der Wandtafel erscheinen zu lassen und dabei immer wieder auf die Gemeinsamkeiten dieser Vorgehensweisen beim Lösen sehr unterschiedlicher Aufgaben aufmerksam zu machen.

○ —?→ ? Was läßt sich aus {dem Gegebenen / den Voraussetzungen} unmittelbar {berechnen / ableiten} ?
Begründung!

? —?→ □ Woraus ließe sich {das Gesuchte / die Behauptung} unmittelbar {berechnen / ableiten}
Begründung!

Zuerst sollen die Schüler für die in *Aufgabe 1)* und *Aufgabe 8a)-d)* gegebenen Allaussagen eine Vermutung über den Wahrheitswert äußern, indem sie durch Interpretation der Variablen zu Einzelaussagen übergehen, deren Wahrheitswert leicht feststellbar ist. Läßt sich auf diese Weise ein Gegenbeispiel finden, dann ist die betreffende Allaussage sicher falsch, gelingt dies nicht, dann dürfte sie vermutlich wahr sein.
Bei *Aufgabe 1)* sind die Beziehungen zwischen den gegebenen Aussagen festzustellen:

Die Aussagen (2) und (4) unterscheiden sich nur dadurch von den Aussagen (1) und (3), daß anstelle eines "$\wedge$" ein "$\vee$" steht. Dabei muß nochmals wiederholt und anhand von Beispielen erläutert werden, daß eine Alternative $A_1 \vee A_2$ genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der verknüpften Aussagen wahr ist, während eine Konjunktion $A_1 \wedge A_2$ genau dann wahr ist, wenn beide verknüpften Aussagen wahr sind. Also ist $(2|2 \vee 2|3)$ eine wahre Aussage, und wegen $2 \nmid (2+3)$ ist Aussage (2) durch dieses Gegenbeispiel widerlegt.
Ferner ist hervorzuheben: Wenn Aussage (4) wahr sein sollte, dann muß Aussage (3) erst recht wahr sein.
Bei den falschen Aussagen (5) und (6) sollte man versuchen, einige Schüler "hereinzulegen", indem man einige Interpretationen angibt, bei denen wahre Einzelaussagen entstehen, z.B. $(2|12 \wedge 4|12) \Rightarrow 6|12$, $(4|48 \wedge 8|48) \Rightarrow 12|48$ bzw. $(2|12 \wedge 3|12) \Rightarrow 6|12$, $3|30 \wedge 5|30 \Rightarrow 15|30$.
Erfahrungsgemäß finden die Schüler für Aussage (5) recht leicht Gegenbeispiele, nicht so aber für Aussage (6) .Wenn etwa das Gegenbeispiel $(4|36 \wedge 6|36) \not\Rightarrow 24|36$ gefunden wurde, dann sollten die leistungsstärksten Schüler untersuchen, welche Voraussetzung man zusätzlich stellen muß, damit aus (6) eine wahre Aussage wird. Auf diese Weise kann man mit leistungsstarken AGn den folgenden Satz entdecken: $(a|c \wedge b|c \wedge ggT(a;b) = 1) \Rightarrow ab|c$.
Auch zu den in den Aufgaben 8b) und 8d) gegebenen falschen Aussagen finden die meisten Schüler kein Gegenbeispiel. So gilt z.B. $a<b \not\Rightarrow a \cdot 0<b \cdot 0$, und (x^2+x+1) wird zwar für $x = 1, 2, \ldots, 9$, aber weder für $x = 10$ noch für $x = 11$ eine Primzahl.
Zusammenfassend wird man feststellen, daß Vermutungen, die aufgrund einiger konkreter Beispiele gefunden oder bestätigt wurden, auch falsch sein können, und daß daher erst ein Beweis die Wahrheit einer Aussage zu garantieren vermag.

Nun wenden wir uns der in Aufgabe 1) als vermutlich wahr erkannten Aussage (1) zu, betrachten also folgenden

Satz: Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen teilt, so teilt sie auch deren Summe.

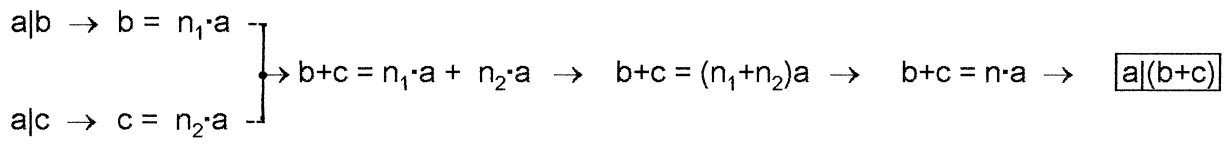
Zunächst wird die Teibarkeitsdefintion wiederholt und in Kurzform an der Wandtafel festgehalten:
Definition: $a|b \quad \Leftrightarrow_{Df} \quad b = n \cdot a \quad$ mit $\quad n \in \mathbf{N}$.

Um einen Beweis für diesen Satz zu finden, kann man folgende *Impulse* einsetzen:

- Variable einführen! [$a,b,c \in \mathbf{N}$] .
- Voraussetzungen und Behauptung herausschreiben! [V_1: $a|b$; V_2: $a|c$; Beh.: $a|(b+c)$] .
- Suche nach einem Beweis! Welche Fragen könnten helfen? [Fragen zum RA oder VA] .
- Woraus ließe sich $a|(b+c)$ unmittelbar ableiten? Geeignetes Hilfsmittel?
  [Obige Definition liefert die hinreichende Feststellung $b+c = n \cdot a$ mit $n \in \mathbf{N}$] .
- Was läßt sich aus den Voraussetzungen unmittelbar ableiten? Geeignetes Hilfsmittel?
  [Obige Definition liefert die ableitbaren Feststellungen $b = n_1 \cdot a$ und $c = n_2 \cdot a$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$].
- Was läßt sich hieraus unmittelbar ableiten? Beachte das hinreichende Teilziel!

Der AG-Leiter hält die Voraussetzungen und die Behauptung in den Endknoten eines Lösungsgraphen fest und trägt die gewonnenen Feststellungen in diesen Lösungsgraphen ein. Auf diese Weise entsteht an der Wandtafel der folgende

Lösungsgraph:



Die zugehörigen "Begründungen" (mit denen die Kanten des Lösungsgraphen belegt werden) sowie die Nebenbedingungen (z.B. $n_1 \in \mathbf{N}$) lasse man mündlich festhalten.
Man beachte, daß solche Lösungsgraphen kein Selbstzweck, sondern nur ein didaktisches Hilfsmittel für den AG-Leiter sind, und daß sie stets auch nur von ihm an der Wandtafel festgehalten werden. Mit ihrer Hilfe soll man demonstrieren, wie man durch RA/VA zu einem Beweis gelangen kann, wobei es darauf ankommt, daß die Schüler die zugehörigen Fragen und Impulse selbst formulieren.
Ferner dienen Lösungsgraphen dazu, so gefundene Lösungspläne abzuspeichern, um damit als Ausgangspunkt für eine Beweisdarstellung zu dienen, für die wir folgende Form eines dreispaltigen *Beweisschemas* wählen:

V_1: $a|b$;
V_2: $b|c$;
Beh.: $a|(b+c)$.
Beweis:

V_1	$\Rightarrow$ (1) $b = n_1 a$ mit $n_1 \in \mathbf{N}$;	[Definition "Teilbarkeit"] .
V_2:	$\Rightarrow$ (2) $c = n_2 a$ mit $n_2 \in \mathbf{N}$,	[Definition "Teilbarkeit"] .
(1),(2)	$\Rightarrow$ (3) $b + c = n_1 a + n_2 a$;	[beidseitige Addition] .
(3)	$\Rightarrow$ (4) $b + c = (n_1+n_2)a$;	[Distributivgesetz] .
(4)	$\Rightarrow$ (5) $b + c = na$;	[Wenn $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, dann $(n_1+n_2) \in \mathbf{N}$] .
(5)	$\Rightarrow$ Beh. $a	(b+c)$;	[Definition "Teilbarkeit"] .

Ein derartiges Darstellen von Beweisen ist eine erlernbare Technik, die sich die Schüler recht rasch aneignen sollten. Wenn Unsicherheiten auftreten, dann lasse man zuerst die abgeleitete Feststellung nennen, dann die zugehörige Begründung, aus der sich dann die Vorderglieder der Implikation in der entsprechenden Beweiszeile ergeben.
Man versäume nicht, den Beweis mit folgenden Worten abschließen zu lassen: "Damit ist bewiesen, daß für beliebige (alle) natürlichen Zahlen a , b , c gilt: Wenn .... , dann .... . "

Es ist stets vorteilhaft, wenn ein zu beweisender Satz den Schülern nicht gegeben, sondern von ihnen (als vermutlich wahre Aussage) selbst entdeckt wird. Dabei sollte man in der Regel von konkreten Beispielen ausgehen und vor allem auch leistungsschwächere Schüler mit einbeziehen, in der Hoffnung, daß von diesen auch eine falsche Vermutung geäußert wird, die dann nachträglich durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden kann.

In *Aufgabe 1)* sind nun noch die beiden wahren Aussagen (3) und (4) zu beweisen, wobei wir schon festgestellt hatten, daß (3) aus (4) folgt und wir uns daher mit dem Beweis von (4) begnügen können.
Dieser Beweis soll von den Schülern in selbständiger Arbeit gefunden werden. RA führt zu $bc = na$; VA führt zu $b = n_1 a$ oder $c = n_2 a$, und man sieht sofort, daß aus jeder dieser beiden abgeleiteten Feststellungen die hinreichende Feststellung durch eine einfache Umformung folgt.

Aufgabe 2) ist zu einem späteren Zeitpunkt in selbständiger Arbeit zu bewältigen. Der Beweis ist mit dem oben geführten Beweis fast identisch.

Bevor man sich den Aufgaben 3) und 4) zuwendet, muß man durch intensives Üben absichern, daß die Schüler über hinreichende Fertigkeiten im Umformen von Termen sowie im Aufstellen von Termen oder Gleichungen zu vorgegebenen Sachverhalten verfügen (vgl. hierzu auch den Abschnitt 3.4. "Gleichungen und Sachaufgaben"). Diese Übungen sollte man über mehrere Zirkel verteilen, so daß auch die leistungsschwächeren Schüler hinreichend davon profitieren.
Die leistungsstärkeren Schüler werden dann, wie in *Aufgabe 5)* gefordert, eigene Aufgaben bilden.
In Vorarbeit zu Aufgabe 3) oder an anderer geeigneter Stelle sollte das "Übersetzen in die Sprache der Gleichungen" anhand folgender Aufgaben geübt werden:

x ist gerade : $x = 2n$;. y ist ungerade : $y = 2m+1$;

z ist durch 5 teilbar: $z = 5k$; usw.

a ist die Summe von 3 aufeinanderfolgenden Zahlen : $a = n + (n+1) + (n+2)$

b ist die Summe von 4 aufeinanderfolgenden Zahlen, deren kleinste durch 5 teilbar ist : $b = 5k + (5k+1) + (5k+2) + (5k+3)$.

c ist das Produkt zweier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen : $c = (2m+1)(2m+3)$.

d ist das Produkt zweier beliebiger ungerader Zahlen : $c = (2m+1)(2n+1)$.

Ferner wird man das in der AG Klasse 5 eingeführte Multiplizieren von Klammerausdrücken (als Erweiterung des Distributivgesetzes) sowie das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors aus einer Summe ausführlich üben.

Die *Aufgabe 3)* läßt sich durch *Vorwärtsarbeiten* bewältigen:

x ist gerade $\rightarrow x = 2m$ ---┐
y ist ungerade $\rightarrow y = 2n + 1$ ---┘→ $xy = 2m(2n + 1) = 2\cdot(2mn + n) = 2k$ mit $k \in \mathbf{N}$.

Bei *Aufgabe 4)* stelle man die Sätze (1), (2) und (3) zunächst zurück, sie sollten von den Schülern später selbständig bewiesen werden.
Bei der Suche nach einem Beweis für die Sätze (3) bis (6) sollte man den ersten Schritt stets durch RA zurücklegen lassen, um auf diese Weise zunächst ein hinreichendes Teilziel zu erzeugen, das dann von den in die Sprache der Gleichungen übersetzten Voraussetzungen ausgehend zielgerichtet durch VA angesteuert werden kann. Dabei sollten Lösungsgraphen zum Festhalten des Lösungsplans verwendet werden.
Beim Beweis des Satzes (6) wird man die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n natürlichen Zahlen wiederholen und den Lösungsplan wie folgt festhalten:

V: $z = 3n + (3n+1) + (3n+2) + \ldots + (3n+9)$;

B: $15|z$.

V $\rightarrow$ $z = 10\cdot 3n + (1+2+3+\ldots+9) = 30n + 45 = 15(2n+3) \rightarrow z = 15k \rightarrow \boxed{15|z}$

Bei *Aufgabe 6)* liefert nicht die Teilbarkeitsdefinition, sondern ein Satz (der Satz über die Teilbarkeit durch 6) hinreichende Teilziele für die Behauptung.
Um diese Teilziele von der Voraussetzung $z = n(n+1)(n+2)$ ausgehend erreichen zu können,

? $\rightarrow$ $2|z$ ---┐
? $\rightarrow$ $3|z$ ---┘→ $\boxed{6|z}$

muß man erkennen, daß unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen stets genau eine durch 3 teilbare Zahl und mindestens eine durch 2 teilbare Zahl vorkommt.

Von wesentlich höherem Schwierigkeitsgrad ist die *Aufgabe 7)* . Wiederum ist es wichtig, daß man die Voraussetzungen und die Behauptung geschickt "in die Sprache der Gleichungen übersetzt". Als Hilfsmittel dient dabei der Satz über die Division mit **Rest**, den die Schüler nötigenfalls durch das Lesen des Merkstoffs auf S. 30 selbständig wiederholen sollten.
Die durch VA und RA gewonnen Teilresultate kann man wie folgt festhalten:

Mit Blick auf das Ziel wird man dann beim VA zunächst den Term rs berechnen und so lange umformen, bis man als hinreichendes Teilziel die Gleichung $rs = 5(...) + 4$ erhalten hat, wobei der Ausdruck in der Klammer eine natürliche Zahl darstellen muß. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, daß man die auftretende 9 in (5+4) aufspalten muß, um dann die 5 ausklammern zu können und die 4 als Rest zu erhalten.

Bei *Aufgabe 8)* ist die Wahrheit von (8a) sehr leicht nachweisbar, wenn man mit Variablen umgehen kann: Stets gilt $n(n + 1) = n^2 + n$.

Die Falschheit von (8b) läßt sich durch das (einzige) Gegenbeispiel $c = 0$ nachweisen.

Schwieriger ist der Nachweis der Wahrheit von (8c).
Wenn $z = 2n + 1$, dann gilt $z^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n + 1)$. Da unter den beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen n und (n+1) stets genau eine gerade ist, folgt hieraus, daß $z^2 - 1$ stets durch 8 teilbar ist.

Der in (8d) vorkommende Term (x^2+x+11) nimmt für $x = 0, 1, 2, ..., 9$ die Werte 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101 an, und dies sind sämtlich Primzahlen. Dies führt viele Schüler zur falschen Vermutung, daß (8d) eine wahre Aussage ist.
Das am leichtesten zu findende Gegenbeispiel ist $x = 11$, aber auch $x = 10$ liefert ein Gegenbeispiel.

Die Wahrheit von (8e) wird durch eine geschickte Fallunterscheidung erbracht. Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, dann trifft dies auch für ihr Produkt zu. Ist dies nicht der Fall, dann hat eine der Zahlen die Form (3m+1), die andere die Form (3n+2) , und man sieht sofort, daß ihre Summe durch drei teilbar ist.
Diese Aussage läßt sich auf zwei verschiedene Weisen *verallgemeinern.* Man kann die Behauptung verschärfen, indem man sie durch "ist stets entweder ihre Summe oder ihr Produkt durch 3 teilbar" ersetzt. Man kann auch ihre Voraussetzung abschwächen, indem man zuläßt, daß die beiden Zahlen einander gleich sind. In diesem Fall wird die Differenz der beiden Zahlen gleich 0 , und wegen $3|0$ gilt die ursprüngliche Behauptung.

(8f) ist eine Existenzaussage, deren Wahrheit leicht durch die Angabe von Beispielen nachzuweisen wäre. Das Primzahltripel (3;5;7) ist leicht zu finden. Um die Falschheit von (8f) nachzweisen, ist dagegen ein Beweis nötig. Dieser ist mit der Feststellung erbracht, daß sich unter drei aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen stets mindestens eine durch 3 teilbare Zahl befindet.

Aufgabe 9) hat wiederum einen höheren Schwierigkeitsgrad.
Relativ leicht ist zu erkennen, daß eine Primzahl p , die größer als 3 ist, bei Division durch 3 stets den Rest 1 oder 2 läßt, also entweder die Form (3n+1) oder die Form (3n+2) besitzt. Folglich gilt für Primzahlzwillinge p, (p+2) , daß ihre Summe stets die Gestalt (6n + 3) besitzt. Da man auch davon ausgehen kann, daß derartige Primzahlzwillinge die Gestalt (3m+1) oder (3m-1) besitzen, muß ihre Summe sogar die Gestalt 6m annehmen, also durch 6 teilbar sein. Da Primzahlen größer 3 auch nicht gerade sein können, kann man analog zeigen, daß sie die Gestalt (6n+1) oder (6n-1) besitzen müssen, woraus für die Summe eines Primzahlzwillings dann folgt, daß sie die Gestalt 12n besitzt und daher durch 12 teilbar sein muß.
Man wird den Schülern an dieser Stelle mitteilen, daß es vermutlich unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, daß es aber bislang noch nicht gelungen ist, diese Aussage zu beweisen.

3.9. Geometrische Aufgaben

Die in den Abschnitten 3.9.1., 3.9.2., 3.9.3. und 3.9.4. besprochenen Aufgaben müssen keinesfalls nacheinander behandelt werden, ein "Vermischen" dieser Aufgaben ist sogar zu empfehlen. So sollte man etwa die Lücke zwischen der Behandlung zahlentheoretischer und geometrischer Beweisaufgaben nicht zu groß werden lassen. Wenn wir dem Unterricht nicht vorgreifen wollen, werden vom Lehrplan diesbezüglich einige Grenzen gesetzt.

Aus der *AG Klasse 5* kann auf den Abschnitt "Aufgaben über Flächen und Körper" zurückgegriffen werden. Hier wird das RA beim Lösen von Bestimmungsaufgaben, das Abspeichern der Aufgabenstellung durch informativ gestaltete Figuren sowie Lösungsgraphen zum Festhalten von Lösungsplanen behandelt.

Unabhängig vom Unterrichtsstoff der Klasse 6 sind nur die geometrischen Bestimmungsaufgaben 7), 8), 9), 10), 12) des Abschnitts 3.9.2., einige geometrische Bestimmungsaufgaben, die unter den "Vermischten Aufgaben" als Aufgabe 3), 8), 10), 14), 21), 25), 30), 33) und 60) angegeben sind, sowie die Konstruktionsaufgaben 1) und 2) aus dem Abschnitt 9.3.4.
Erst nach Behandlung des "Lernbereich 4: Spiegelung, Verschiebung, Drehung", der auch den Scheitelwinkelsatz, den Nebenwinkelsatz und die Sätze über Winkel an geschnittenen Parallelen enthält, kann man die sechs Aufgaben des Abschnitts 3.9.1. über Bewegungen sowie die geometrischen Bestimmungsaufgaben 1), 2) und 5) behandeln.
Der erste Teil des "Lernbereich 5: Dreiecke und Kongruenz von Figuren" enthält den Basiswinkelsatz, den Innenwinkelsatz und den Außenwinkelsatz. Auf dieser Grundlagen lassen sich die geometrischen Bestimmungsaufgaben 3), 4), 6), 11) 13), 14), 15) , die geometrischen Beweisaufgaben 1), 2), 3), 5), 6), 7), 9), 10), 11) sowie die "Vermischten Aufgaben" 42), 45), 47), 51) behandeln.
Erst nach dem letzten Teil des Lernbereichs 5., in dem die Kongruenz von Dreiecken und Dreieckskonstruktionen behandelt werden, kann man die Beweisaufgaben 4) und 8) sowie die Konstruktionsaufgaben 3) bis 12) behandeln.

Minimalvariante:
Aufgaben über Bewegungen:
- Wiederholen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs.
- Die wichtigsten Eigenschaften von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen.
- Darstellen von Punkten im Koordinatensystem.
- Aufgaben 1), 2), 3a,b), 4a) .

Bestimmungsaufgaben :
- Wiederholen und Vertiefen des Unterrichtsstoffs.
- Informativ gestaltete Figuren; Hilfsmittelfrage beim VA und RA; Lösungsgraphen; Lösungsschemata.
- Aufgaben 1), 2), 3a), 5), 6a), 7), 8), 9), 10), 12) .

Beweisaufgaben:
- Informativ gestaltete Figuren; Hilfsmittelfrage beim VA und RA; Lösungsgraphen; Beweisschemata.
- Aufgaben 1), 2), 3), 4), 5), 8), 9), 10) .

Konstruktionsaufgaben:
- Informativ gestaltete Figuren; geometrische Örter als Erfüllungsmengen; Methode der geometrischen Örter ; Darstellung der Konstruktionsbeschreibung in Kurzform (Verwenden von Bezeichnungen aus der Mengenlehre).
- Einsicht in die Notwendigkeit von Einzigkeits- und Existenznachweis bei Konstruktions- und Ortsaufgaben.

- Aufgaben 1), 2), 3), 4), 5), 6), 10).

Maximalvariante:

Aufgaben über Bewegungen:
- Eigenschaften von Bewegungen .
- Gleitspiegelungen; Dreispiegelungssatz.
- Aufgaben 3c), 4b,c), 5), 6), 7), 8).

Bestimmungsaufgaben:
- Informativ gestaltete Figuren; Teilzielfrage und Hilfsmittelfrage beim VA und RA; "Suche nach Gleichungen" als spezielle Hilfsmittelfrage; Lösungsgraphen und Lösungsschemata.
- Parameterhaltige Aufgaben; überbestimmte Aufgaben; Proben am Spezialfall.
- Aufgaben 3b), 4), 6b), 13), 14), 15).

Beweisaufgaben:
- Informativ gestaltete Figuren; Teilzielfrage und Hilfsmittelfrage beim VA und RA; Lösungsgraphen und Beweisschemata.
- Aufgaben 5), 6), 7), 9), 10), 11), 12), 13).

Konstruktionsaufgaben:
- Informativ gestaltete Figuren; Methode der geometrischen Örter; Methode der Hilfselemente (als VA und RA);
- Geometrische Örter als Erfüllungsmengen; vollständige Darstellung einer Konstruktionsaufgabe (Konstruktionsbeschreibung; Einzigkeitsnachweis; Existenznachweis); Determination bei parameterhaltigen Aufgaben.
- Aufgaben 1), 2), 7), 8), 9), 10), 11), 12).

3.9.1. Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen

Ziele:
- Wiederholung und Vertiefung des Unterrichtsstoffs.
- Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen als eineindeutige Abbildungen einer Ebene auf sich.
- Nacheinanderausführen von Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen; Bewegungen als Produkt von Geradenspiegelungen; Dreispiegelungssatz.
- Darstellung von Punkten im Koordinatensystem.
- Entdecken von Beziehungen zwischen Abbildungen; Lösen von Aufgaben über Abbildungen.

Man halte die Schüler an, quadratisch karierter Papier zu verwenden und die dadurch entstehenden Vorteile für ein schnelles und genaues Konstruieren zu nutzen. Man wird sich zwar überzeugen, ob die Schüler aus dem Unterricht hinreichende Fertigkeiten im Umgang mit Zeichengeräten mitbringen, wir stellen uns aber nicht das Ziel, die Fertigkeiten im genauen Konstruieren zu erhöhen. Auch in diesem Stoffgebiet geht es uns vorwiegend um eine Entwicklung der Fähigkeit zum problemlösenden Denken.

Das Durcharbeiten des Merkstoffs auf S.34 kann man mit einer Wiederholung des Unterrichtsstoffs verbinden. Es wird hervorgehoben, daß jede Verschiebung durch unendlich viele Pfeile festgelegt wird, die in Länge, Richtung und Richtungssinn übereinstimmen. Es wird die Gemeinsamkeit mit der Tatsache hervorgehoben, daß jede gebrochene Zahl durch unendlich viele Brüche dargestellt wird, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Arbeitet man in einem Koordinatensystem, dann spielt der "Ortspfeil" (dessen Schaft im Ursprung

des Koordinatensystems liegt) in der Menge aller dieser Pfeile dieselbe Rolle, wie der gekürzte Bruch in der Menge aller dieser Brüche: Beides sind nur spezielle (möglichst "einfache") Vertreter aus der zugehörigen Menge.
Nach Erläuterungen zum Begriff "Bewegung" sollte man die Arbeit am Merkstoff unterbrechen und mit dem Lösen von Aufgaben beginnen.

Bei *Aufgabe 1)* wird man sich zunächst überzeugen, ob die Schüler die hier verwendet Symbolik verstehen.

Bei *Aufgabe 1a)* sollen die Schüler das Bild A'B'C' und dessen Bild A"B"C" in die Figur auf S.13 der Aufgabensammlung einzeichnen und die (u.U. aus dem Unterricht bekannte) Vermutung äußern, daß das "Produkt" der beiden Spiegelungen an parallelen Geraden eine Verschiebung ist, die man mit $V(\overrightarrow{AA''})$ oder etwa auch mit $V(\overrightarrow{BB''})$ oder $V(\overrightarrow{CC''})$ bezeichnen kann.
Nun geht es darum, den (als Vertreter gewählten) Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP'}$ zu charakterisieren. Es ist leicht zu erkennen (und mit Hilfe von Eigenschaften der Geradenspiegelung zu begründen), daß $PP' \perp g$ gilt. Schwieriger ist die Erkenntnis (und deren Begründung), daß der Verschiebungspfeil doppelt so lang ist wie der Abstand zwischen den gegebenen parallelen Geraden g und h .
Das Resultat dieser Überlegungen wird in folgender Form in die dafür vorgesehene Leerstelle in der Aufgabensammlung eingetragen: $Sp(g) \circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$ mit $PP' \perp g,h$ und $\overline{PP'} = 2d(g;h)$.

Die *Aufgaben 1b) und 1c)* werden analog behandelt.

In Aufgabe 1) haben wir festgestellt, daß das "Produkt" zweier Geradenspiegelungen eine Verschiebung oder eine Drehung (speziell eine Punktspiegelung) sein kann. Die Schüler werden aufgefordert, zu überlegen, welche Fragen wir uns jetzt stellen könnten. Folgende Fragen sollten gestellt werden:
Was kann man als Produkt zweier Verschiebungen, zweier Drehungen oder zweier Punktspiegelungen erhalten?
Was kann man als Produkt von drei, vier oder noch mehr Geradenspiegelungen erhalten?
Was kann man als Produkt einer Verschiebung mit einer Geradenspiegelung, einer Verschiebung mit einer Punktspiegelung usw. erhalten?
Man wird den Schülern klarmachen, wie wichtig es ist, möglichst viele derartige Fragen zu stellen, auch wenn man nicht alle diese Fragen beantworten kann oder will. Es wäre sehr erfreulich, wenn ein Schüler auch die Frage stellt, ob man die "Faktoren" in derartigen "Produkten" stets vertauschen darf, wie das bei den Faktoren eines Produkts von Zahlen stets statthaft ist.

Durch analoges Vorgehen wie in Aufgabe 1) sollen die Schüler in *Aufgabe 2)* entdecken, Daß das Produkt zweier Punktspiegelungen Sp(P) und Sp(Q) stets die Verschiebung $V(2\overrightarrow{PQ})$ ist. Leistungsstarke Schüler können bei der Suche nach einem Beweis auf den Satz über die Mittellinie im Dreieck stoßen.

Bei *Aufgabe 3)* müssen die Schüler fähig sein, Punkte mit gegebenen Koordinaten in ein Koordinatenssystem einzutragen. Die Konstruktionen zu *Aufgabe 3a)* sollten auch an der Wandtafel durchgeführt werden. Zunächst geht es darum, für die Bildpunkte von A,B,C bei der Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$ und für die Bildpunkte von A,B,C bei der Verschiebung $V(\overrightarrow{QQ'})$ günstige Bezeichnungen einzuführen. Dann wird man hervorheben, daß man aus der Menge der zu $\overrightarrow{PP'}$ parallelen und gleich langen Pfeile als günstigen Vertreter den Pfeil $\overrightarrow{AA_1'}$ auswählen wird, um die Verschiebung $V(\overrightarrow{PP'})$ konstruktiv durchzuführen. Dabei sollte nicht die Konstruktion mit Zirkel und Lineal im Vordergrund stehen, sondern die Erkenntnis, daß man den Bildpunkt A_1' erhält, indem man vom Originalpunkt A "zwei Einheiten nach unten" und dann "zwei Einheiten

nach rechts" geht (wobei man die Vorteile des quadratisch karierten Papiers für derartige Zwecke ausnutzt). Auch die Bildpunkte B_1' und C_1' werden so ermittelt (ohne die zugehörigen Pfeile einzuzeichnen).

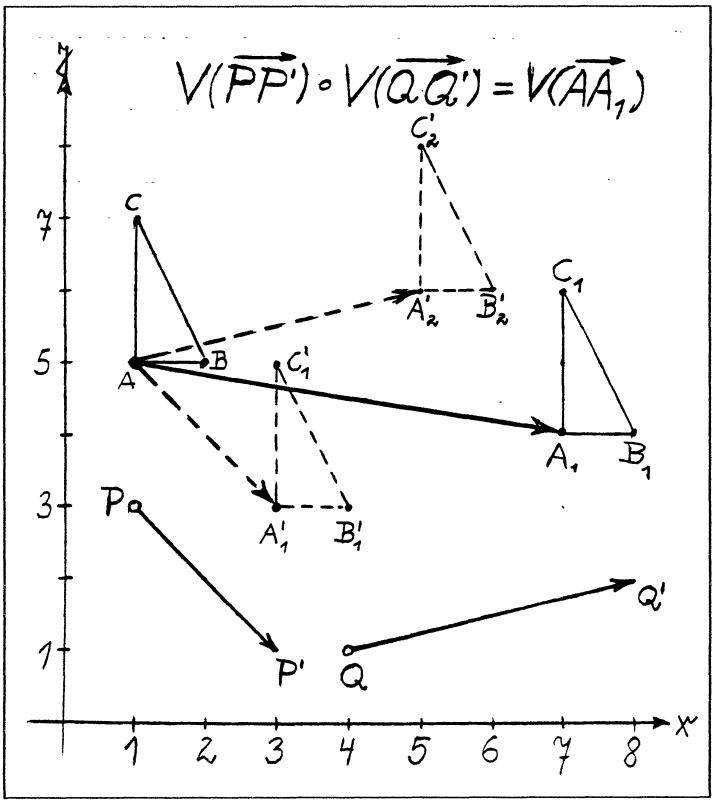
Nach analogem Ermitteln der Bilder A_1,B_1,C_1 von A_1',B_1',C_1' bei der Verschiebung $V(\overrightarrow{QQ'})$ wird zunächst die (bereits oben gestellte) Frage aufgeworfen, was man als Produkt dieser beiden Veschiebungen erhält. Das Resultat wird in der Form

$$V(\overrightarrow{PP'})\circ V(\overrightarrow{QQ'}) = V(\overrightarrow{AA_1})$$

festgehalten und der Pfeil $\overrightarrow{AA_1}$ eingezeichnet.

Analog wird A_2',B_2',C_2' und A_2,B_2,C_2 ermittelt und festgestellt, daß $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$ gilt.

Damit hat man erkannt, daß $V(\overrightarrow{PP'})\circ V(\overrightarrow{QQ'}) = V(\overrightarrow{QQ'})\circ V(\overrightarrow{PP'})$ gilt, d.h. daß man beim Nacheinanderausführen zweier Verschiebungen die "Faktoren" vertauschen darf, wie dies ja auch beim Multiplizieren zweier Zahlen statthaft ist, in beiden Fällen gilt das Kommutativgesetz.



Bevor die Schüler die *Aufgaben 3b) und 3c)* in selbständiger Arbeit zu lösen versuchen, wird hervorgehoben, daß dadurch die Frage untersucht wird, ob auch bei Nacheinanderausführen von Geradenspiegelungen (speziell an parallelen Geraden) und Punktspiegelungen das Kommutativgesetz gilt. Es wird festgestellt, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist.

Nun kann man sich wieder dem "Merkstoff" (S.34) zuwenden und zunächst einige Eigenschaften von Bewegungen besprechen.

Bei "(1) Eindeutige Verknüpfbarkeit" wird man herausfinden lassen, daß diese Eigenschaft zwar den Bewegungen insgesamt sowie der speziellen Bewegung "Verschiebung" zukommt, nicht aber den Spiegelungen oder den Drehungen.

Bei "(2) Umkehrbarkeit" wird man danach fragen, welches die entgegengesetzte Bewegung zu einer vorgebenen Verschiebung, Geradenspiegelung, Drehung oder speziell Punktspiegelung ist.

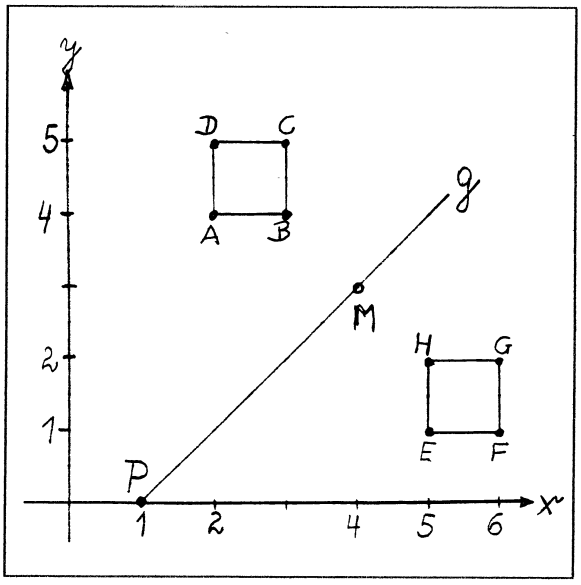
Die Eigenschaften (3) bis (10) werden den Schülern als "Selbstverständlichkeiten" erscheinen, weil sie noch keine weiteren Abbbildungen kennengelernt haben, die einige dieser Eigenschaften nicht besitzen. Man wird daher nur darauf hinweisen, daß diese Eigenschaften zur Begründung beim Beweisen herangezogen werden.

Die Eigenschaften (11) bis (15) fassen die Erkenntnisse zusammen, die beim Lösen der Aufgaben 1), (2) und 3) gewonnen wurden.

Bevor man sich mit dem Lösen der etwas schwierigeren *Aufgabe 4)* beschäftigt, sollte man die Schüler auffordern, diese Aufgabe mit den Aufgaben 1) und 2) zu vergleichen und nach Beziehungen zwischen diesen Aufgaben zu suchen.

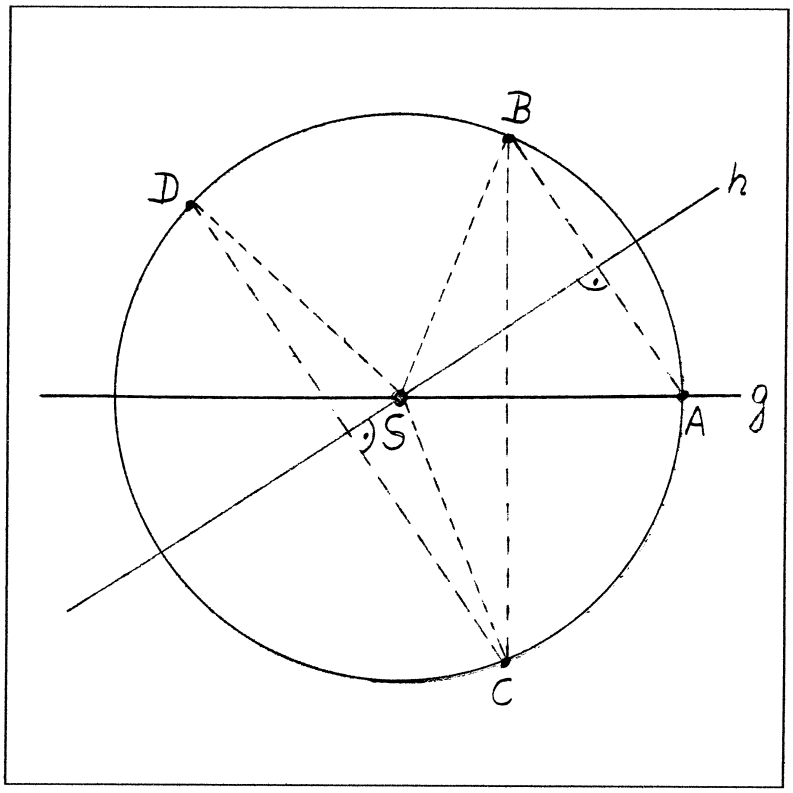
Man beachte auch die Analogie zum Rechnen mit Zahlen: Bei einer Multiplikationsaufgabe sind zwei Faktoren gegeben und das Produkt gesucht. Wenn ein Faktor und das Produkt

gegeben sind und der andere Faktor gesucht ist, dann liegt eine zur erstgenannten Aufgabe "inverse" Aufgabe vor, im konkreten Fall eine Divisionsaufgabe. Eine analoge Beziehung besteht zwischen den Aufgaben 1a) und 4a), den Aufgaben 1c) und 4b) sowie zwischen den Aufgaben 2) und 4c) .
Hier sollte man den Schüler hinreichend Zeit lassen, durch Knobeln selbst den Lösungsgedanken zu finden, der sich allgemein so formulieren läßt:
Wenn für drei Bewegungen $Bew_1 \circ Bew_2 = Bew$ gilt und wenn außer einem Original ABC noch Bew_1 und Bew gegeben sind, dann konstruiere man zunächst das Bild A'B'C' von ABC bei Anwendung von Bew_1 sowie das Bild A"B"C" von ABC bei Anwendung von Bew . Anschließend ermittle man diejenige Bewegung, die A'B'C' in A"B"C" überführt.
Die Aufgabe wird leichter, wenn man vorher folgende *Hilfsaufgaben* behandelt: Zu passend gewähltem Original und Bild ist die zugehörige Spiegelgerade bzw. der zugehörige Spiegelpunkt zu konstruieren. Es ist jedoch günstiger, wenn die Schüler diese Hilfsaufgaben selbst finden und lösen.



In *Aufgabe 5)* steht von vornherein nicht fest, ob es überhaupt eine Bewegung gibt, die die gegebenen Bedingungen erfüllt, bzw. ob es vielleicht sogar mehr als eine solche Bewegung gibt. Auch hier sollte man die Schüler selbständig arbeiten lassen und zunächst abwarten, wie viele von den drei Lösungen gefunden werden.
Mit M(4;3) und P(1;0) sowie g = PM wird A,B,C,D durch $V(\overrightarrow{AE})$ abgebildet auf E,F,G,H, durch Sp(g) abgebildet auf E,H,G,F, durch Dr(M;180°) = Sp(M) abgebildet auf G,H,E,F .

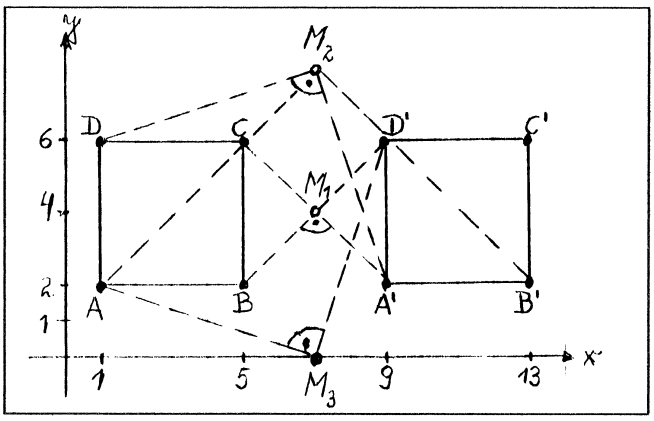
Aufgabe 6) ist die erste geometrische Beweisaufgabe. Durch die Hilfsmittelfrage beim RA stößt man auf die Definition des Kreises als Hilfsmittel und damit auf die hinreichenden Teilziele $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}$, wenn man erkannt hat, daß der Schnittpunkt S der Geraden g und h der Mittelpunkt dieses Kreises ist.
Durch VA gelangt man über eine Eigenschaft der Geradenspiegelung zu den ableitbaren Feststellungen, daß h die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, daß g die Mittelsenkrechte von $\overline{BC}$ und daß h die Mittelsenkrechte von $\overline{CD}$ ist, woraus dann, weil S sowohl auf g als auch auf h liegt, $\overline{SA} = \overline{SB}$ und $\overline{SB} = \overline{SC}$ und $\overline{SD} = \overline{SC}$ folgt, woraus sich unmittelbar die Behauptung ableiten läßt.
Ferner sollte man die Frage stellen,



was passiert, wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, daß g und h nicht aufeinander senkrecht stehen sollen.

Aufgabe 7) läßt sich analog lösen wie Aufgabe 4) und sollte in selbständiger Schülerarbeit bewältigt werden, wobei es wiederum nicht vorrangig auf das Durchführen und Beschreiben der Konstruktion ankommt, sondern es durchaus reicht, wenn ein Schüler die Lösung wie folgt formuliert: Ich konstruiere den Bildpunkt A_1 von A bei $V(\overline{PP'})$ und dann die Mittelsenkrechte g von $\overline{A_1A_2}$, was beides allein mit Zirkel und Lineal durchführbar ist.

Die *Aufgabe 8)* hat insofern einen etwas höheren Schwierigkeitgrad, weil einige Schüler wahrscheinlich nur die Drehung um den Mittelpunkt $M_1(7;4)$ finden, und dies auch nur dann, wenn ihnen bewußt ist, daß Punktspiegelungen spezielle Drehungen sind.
Hier sollte man die Schüler auf jeden Fall zunächst selbständig nach einer Lösung suchen lassen. Wenn ein Schüler die Lösungen gefunden hat, dann darf er sie nicht verraten, er darf lediglich Fragen stellen oder Impulse als Hilfestellung geben.



Als erste Hilfestellung wird zunächst nur mitgeteilt, daß es genau drei derartige Drehungen gibt. Als weitere Hilfe teile man mit, daß eine dieser Drehungen eine 180°-Drehung ist, die beiden anderen je eine 90°-Drehung sind. Als letzte Hilfe teile man mit, daß bei der 180°-Drehung A ind C' übergeht, bei der einen 90°-Drehung A ind B' übergeht und bei der anderen 90°-Drehung A in D' übergeht. (Daß die letztgenannte Drehung genaugenommen eine (-90°)-Drehung bzw. eine 270°-Drehung ist, spielt in diesem Zusammenhang keine Rolle.) Auf diese Weise können die Schüler auch zu den Drehpunkten $M_2(7;0)$ und $M_3(7;8)$ gelangen.

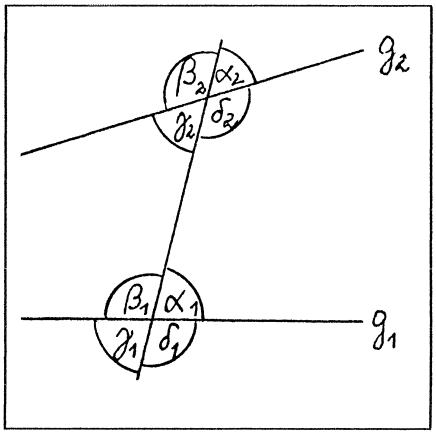
3.9.2. Geometrische Bestimmungsaufgaben

Ziele:
- Wiederholung und Vertiefung des Unterrichtsstoffs.
- Informativ gestaltete Figuren zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsplan.
- Teilzielfrage und Hilfsmittelfrage beim VA und RA .
- "Suche nach Gleichungen" als spezielle Hilfsmittelfrage.
- Lösungsgraphen zum Festhalten von Lösungsplänen.
- Lösungsschemata als Darstellungsform.
- Proben am Spezialfall.
- Parameterhaltige Aufgaben.
- Überbestimmte Aufgaben.

Als Hausaufgabe erhalten die Schüler den Auftrag, den Geometriestoff aus ihrem Lehrbuch bis zu den Sätzen über Dreiecke (aber noch ohne den Kongruenzbegriff) zu wiederholen, wobei der Schwerpunkt bei den behandelten Begriffen und Sätzen liegen soll. Es geht dabei wieder darum, bei Wahl von günstigen Bezeichnungen abkürzende Schreibweisen zu verwenden und die so entstandenen Zeichenreihen dann wieder in die "Wortsprache" zu übersetzen.

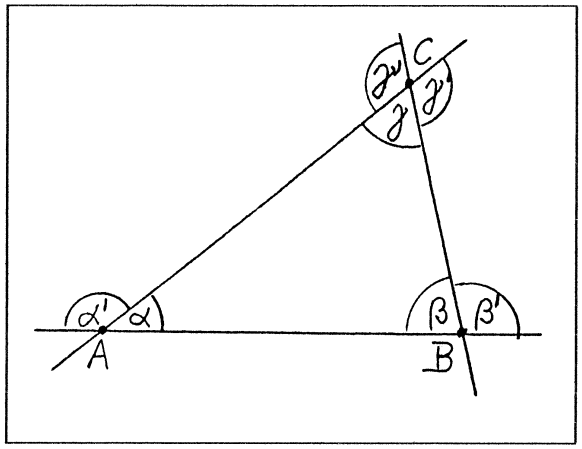
Beim Wiederholen der Begriffe "Scheitel- , Neben- , Stufen- , Wechselwinkel" sollte das Formulieren exakter Definitionen unterbleiben. Dagegen sollte hervorgehoben werden, daß es sich hierbei stets um Winkelpaare handelt, d.h. daß es um Beziehungen zwischen zwei Winkeln und nicht um Eigenschaften (wie z.B. "spitz" oder "stumpf") geht. Man kann zwar von "dem" Scheitelwinkel sprechen, der zu einem vorgegebenen Winkel gehört; da jedoch zu jedem Winkel zwei Nebenwinkel gehören, ist hier der bestimmte Artikel fehl am Platz. Wir werden Nebenwinkelpaare häufig mit $(\varphi;\varphi')$ bezeichnen. Man sollte Stufen- und Wechselwinkel nicht nur an geschnittenen Parallelen, sondern stets auch an beliebigen geschnittenen Geraden betrachten und zusätzlich den Begriff "entgegengesetzt liegende Winkel" einführen.

An der Wandtafel entsteht nebenstehende Figur, und die Schüler erhalten den Auftrag, alle Scheitelwinkelpaare, alle Nebenwinkelpaare, alle Stufenwinkelpaare und alle Wechselwinkelpaare aufzuzählen und die Behauptungen der zugehörigen Sätze sowie alle wahren Umkehrungen dieser Sätze zu nennen. Daneben wird vermerkt:



Entgegengesetzt liegende Winkel:
(α_1,δ_2); (β_1,γ_2); (γ_1,β_2); (δ_1,α_2) .
$\alpha_1 = \gamma_1$; Schws. ;
Wenn $g_1 \| g_2$, dann $\alpha_1 = \alpha_2$; Stws.
Wenn $g_1 \| g_2$, dann $\alpha_1 = \gamma_2$; Wws.
$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \gamma_1 = 180°$; Nbws.

Bei den Sätzen über Winkel am Dreieck wird man die Bedeutung der verwendeten Bezeichnungen einer Figur entnehmen und die Sätze in Kurzform festhalten.
Aus dem Außenwinkelsatz sollte der "kleine Außenwinkelsatz" (der im Unterricht meist nicht behandelt wird) abgeleitet werden.
Bei der mündlichen Formulierung der Sätze sollten stets auch deren Namen (z.B. "Basiswinkelsatz", "Umkehrung des Basiswinkelsatzes", "Dreiecksungleichung" usw.) genannt werden.



Neben der Figur wird festgehalten:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$; Iws.
$\gamma' = \alpha + \beta$; Aws.
$\gamma' > \alpha$; $\gamma' > \beta$; kl.Aws.
$a + b > c$; Dr.ugl.
$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$; Bws.
$\alpha = \beta \Rightarrow a = b$; U.Bws.
$a < b \Rightarrow \alpha < \beta$; Seiten-Winkel-Bez.
$\alpha < \beta \Rightarrow a < b$.

Um Planfiguren zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsplan (sowohl bei geometrischen Bestimmungsaufgaben als auch bei Beweisaufgaben) verwenden zu können, treffen wir folgende Vereinbarungen:
Zeichen für gegebene Größen werden grün, Zeichen für gesuchte Größen werden rot und Zeichen für Hilfsgrößen werden blau geschrieben. Gleichlange Strecken und gleichgroße Winkel werden gleichfarbig gezeichnet, kongruente Figuren werden schraffiert; Voraussetzungen "grün", Behauptungen "rot", abgeleitete oder hinreichende Feststellungen "blau". Man sollte die Schüler daran gewöhnen, die Gitterpunkte von quadratisch kariertem Papier zum raschen Anfertigen genauer Planfiguren zu nutzen. Man sollte immer wieder die Frage stellen, wie man eine derartige Planfigur möglichst geschickt anfertigt.

Die Aufgaben 1) bis 6) lassen sich durch VA bewältigen, wobei oft mehrere Lösungwege existieren. Man sollte von Schülern vorgeschlagene ungeschickte Lösungswege niemals von vornherein zurückweisen. Allerdings sollte man stets darauf dringen, daß beim "Rückblick" auch nach einem kurzen, geschickten Lösungsweg gesucht wird. Wenn der Außenwinkelsatz sofort zum Ziel führt, dann wird man nicht nacheinander den Innenwinkelsatz und den Nebenwinkelsatz anwenden lassen.

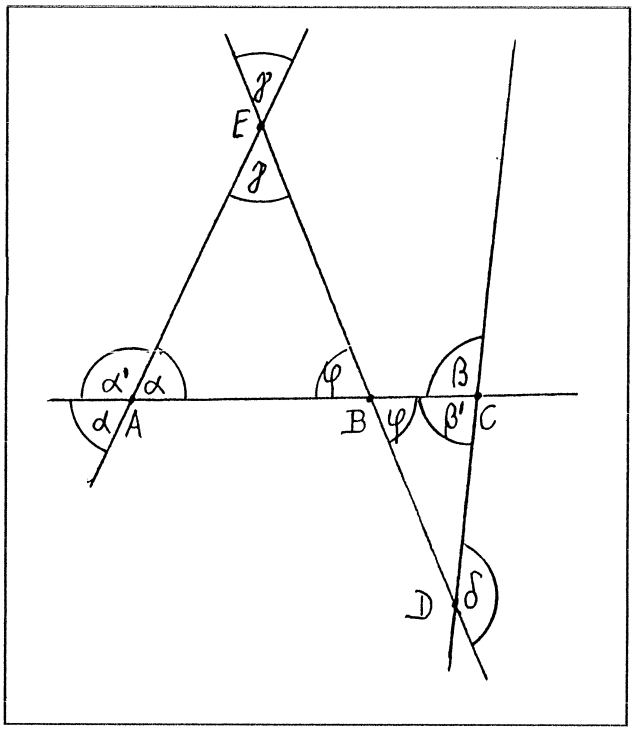
Bei *Aufgabe 1)* sollte man zunächst überprüfen, welche Schüler selbständig einen Lösungsweg finden. Erst nachträglich sollte demonstriert werden, welche Fragen oder Impulse hier helfen können:

- Gegebene Bedingung (in Form einer Gleichung) festhalten!
- Was läßt sich aus den Voraussetzungen bezüglich α, β, γ ,δ sofort ableiten? Begründung!
  - Welche Sätze können hier als Hilfmittel dienen?
- Welcher der gesuchten Winkel läßt sich nun als erster berechnen? Begründung!
- Welcher Winkel läßt sich nun berechnen? Begründung!
- u.s.w.
- Probe nicht vergessen!

Es gibt hier *zwei* naheliegende *Lösungswege* :
Man kann von $\alpha + \beta + \gamma = 234°$ ausgehend $\beta + \gamma = 180°$ einsetzen und so zu $\alpha = 54° = \gamma$ gelangen, woraus dann $\beta = \delta = 126°$ folgt.
Etwas weniger geschickt ist es, in die Ausgangsgleichung $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$ einzusetzen und über die Gleichung $2\gamma + 106° = 234°$ dann durch Umformen zunächst γ zu berechnen.

Aufgabe 2) läßt sich analog bewältigen, hier sind lediglich zwei Bedingungen explizit gegeben.

Bei *Aufgabe 3a)* sollen die Schüler die gegebenen Winkelgrößen in die Figur eintragen und durch VA dann so lange die Größen weiterer Winkel ermitteln, bis sie $\delta = 110°$ ermittelt haben und erkennen, daß wegen $\alpha' = \beta$ laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes die Geraden $g_1$und g_2 parallel sind.

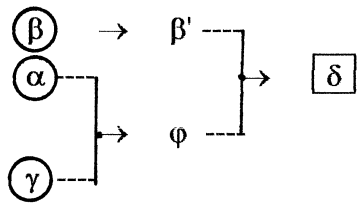


Die parameterhaltige *Aufgabe 3b)* sollte man nur mit leistungsstarken Schülern behandeln. Wir stellen uns das Ziel, mit möglichst wenig Schritten auszukommen. Aus diesem Grund beginnen wir mit RA:

- Woraus ließe sich δ unmittelbar berechnen?
  - Welche Sätze könnten als Hilfsmittel dienen?

Naheliegend ist die Berechnung aus δ' mit Hilfe des Nebenwinkelsatzes.
Günstiger ist jedoch die Berechnung aus dem Nebenwinkel β' von β sowie dem einzuführenden Hilfswinkel φ mit Hilfe des Außenwinkelsatzes für Dreieck DCB .

Durch zielgerichtetes VA kommt man nun auf die Idee, mit Hilfe des Scheitelwinkelsatzes zunächst die Innenwinkel des Dreiecks ABE durch α , γ und φ auszudrücken und dann die Hilfsgröße φ mit Hilfe des Innenwinkelsatzes für dieses Dreieck zu ermitteln.
Auf jeden Fall sollte man außer den auf diese Weise erhaltenden Gleichungen auch den Lösungsgraphen aufschreiben, der diesen Lösungsplan festhält:



Sei $\sphericalangle DBC = \varphi$; dann gilt laut Scheitelwinkelsatz
$\sphericalangle EBA = \varphi$; $\sphericalangle BAE = \alpha$; $\sphericalangle AEB = \gamma$ sowie

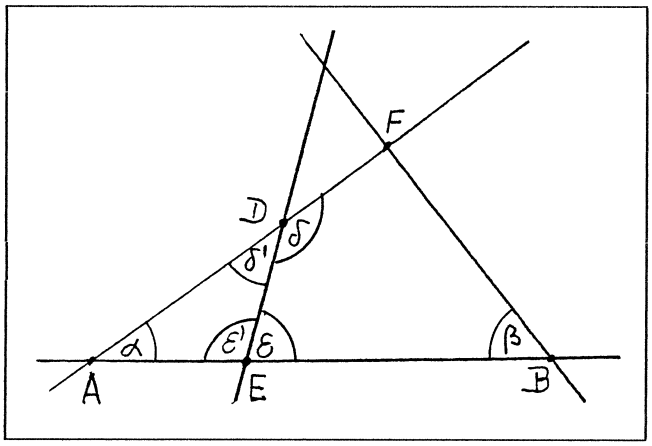
(1) $\delta = \beta' + \varphi$; [Aws für $\triangle DCB$] .
(2) $\beta' = 180° - \beta$; [Nbws] .
(3) $\varphi = 180° - \alpha - \gamma$; [Iws für $\triangle ABC$] .

Das Eliminieren der Hilfsgrößen β' und φ sowie das Auflösen nach der gesuchten Größe δ stellt an Schüler der Klasse 6 sehr hohe Anforderungen und ist ohne Hilfestellung nicht zu bewältigen. Wenn man (2) und (3) so wie angegeben schreiben läßt, dann kann man durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) zu (4) $\delta = 180° - \beta + 180° - \alpha - \gamma$ gelangen und damit zum Resultat (5) $\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma$.

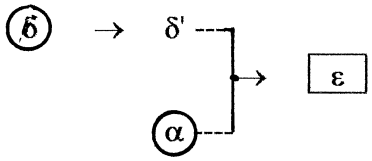
Wichtig ist, daß sich die Schüler überzeugen, daß man nun durch Einsetzen der gegebnen Werte zu dem im Aufgabe 3a) ermittelten Resultat kommen kann:

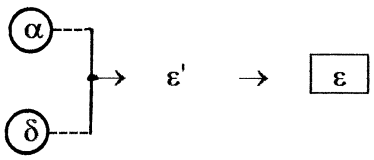
$$\delta = 360° - 50° - 130° - 70° = 110° .$$

Anderersetis kann das Resultat von Aufgabe 3a) dazu dienen, das Resultat von Aufgabe 3b) durch eine *"Probe am Spezialfall"* zu überprüfen.
Leistungsstarke Schüler sollten schon hier erkennen, daß jede parameterhaltige Aufgabe die Lösung von unendlich vielen konkreten Aufgaben ermöglicht, wobei jede dieser konkreten Aufgaben durch eine Interpretation der Parameter der parameterhaltigen Aufgabe entsteht.



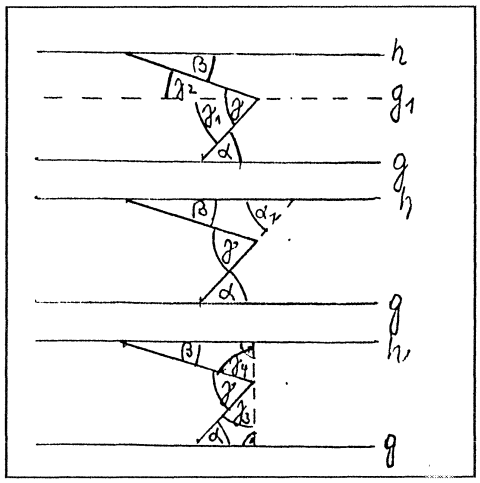
Aufgabe 4) wird analog gelöst wie Aufgabe 3a) . Das Resultat $\varepsilon = \alpha - \delta + 180°$ kann man auf zwei verschiedenen Wegen erreichen, die sich durch verschiedenartige Anwendung des Außenwinkelsatzes und die Verwendung verschiedener Hilfsgrößen unterscheiden:



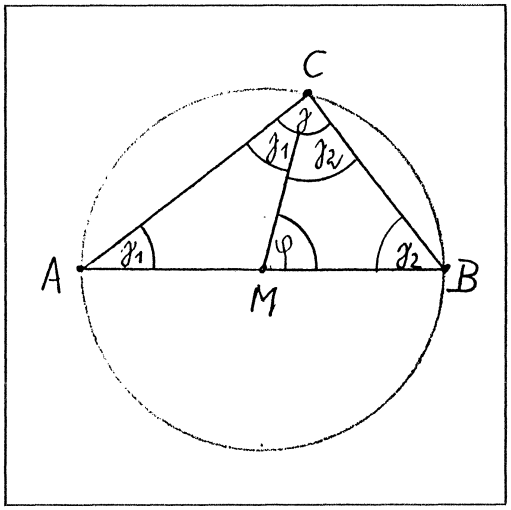


Man erkennt, daß das gegebene β zur Berechnung des gesuchten ε nicht benötigt wird, d.h. daß eine *überbestimmte Aufgabe* vorliegt. Man wird daher fragen, welche weiteren Winkelgrößen man berechnen könnte, wenn auch β gegeben wäre.

Bei *Aufgabe 5)* führen unterschiedliche Antworten auf die allgemeine Hilfsmittelfrage zu unterschiedlichen Lösungswegen. Will man den Wechselwinkelsatz einsetzen, dann führt dies zur Geraden g_1 mit $g_1 \| g \| h$ als Hilfslinie und damit zu den Hilfsgrößen γ_1 und γ_2.
Das Hilfsmittel "Außenwinkelsatz" führt dagegen zu einer anderen Hilflinie (vgl. Figur) und zur Hilfsgröße α_1.
Will man den Innenwinkelsatz als Hilfmittel verwenden, dann liegt es nahe, die auf g und auf h senkrecht stehende Strecke $\overline{AB}$ als Hilfslinie einzuführen und die Hilfsgrößen γ_3 und γ_4 zu verwenden.
Das Resultat lautet $\gamma = \alpha + \beta$.



Bei *Aufgabe 6)* sollen die Schüler zunächst erkennen, daß die Lösung von 6a) aus der Lösung von 6b) durch Spezialisierung gewonnen werden kann.
Die leistungsstärkeren Schüler sollen sofort Teil b) in Angriff nehmen.
Zunächst werden *zweckmäßige Bezeichnungen* eingeführt: $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle ACM = \gamma_1$; $\sphericalangle MCB = \gamma_2$.
Laut Basiswinkelsatz und Außenwinkelsatz gilt dann
$\varphi = 2\gamma_1$, also $\sphericalangle ACM = \frac{1}{2}\varphi$,
für $\varphi = 42°$ also $\sphericalangle ACM = 21°$.
Laut Basiswinkelsatz und Innenwinkelsatz gilt
$\varphi + 2\gamma_2 = 180°$, also $\gamma_2 = 90° - \frac{1}{2}\varphi$, woraus dann
$\sphericalangle ACB = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{2}\varphi + 90° - \frac{1}{2}\varphi = 90°$ folgt.

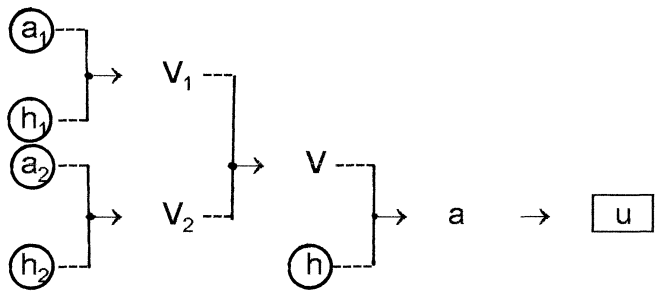


Beim "Rückblick" wird man hervorheben, daß wir auf diese Weise einen Satz entdeckt haben, der zum Unterrichtsstoff der Klasse 8 gehört: Ist $\overline{AB}$ ein Durchmesser des Kreises k und liegt C auf k , dann gilt stets $\sphericalangle ACB = 90°$.

Die Aufgaben 7) bis 9) dienen dem Training im RA . Hier hat das Finden und Fixieren des Lösungsplans stets den Vorrang vor der Berechnung des Resultats.

Bei *Aufgabe 7)* müssen die Schüler zunächst *geeignete Bezeichnungen* einführen (a_1, h_1, a_2, h_2, h, u) und diese u.U. in zugehörigen räumlichen Skizzen festhalten. Der Lösungsplan läßt sich dann wie folgt festhalten, wobei zusätzliche Bezeichnungen eingeführt werden:

Geg.: $a_1 = 48$ cm ;
$h_1 = 1$ cm ;
$a_2 = 32$ cm ;
$h_2 = 4$ cm ;
$h = 4$ cm ;
Ges.: u (in cm) .



Die eingeführten Variablen sind Größenvariable, speziell Variable für Längen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit wollen wir die Rechnungen jedoch nicht mit Größen, sondern mit Zahlenwerten durchführen. Dies ist möglich, wenn die vorkommenden Einheiten "verträglich" sind. Ist

dies nicht der Fall, dann muß man zunächst zweckmäßige Einheiten wählen und in diese umrechnen (vgl. Aufgabe 8) und 9)).

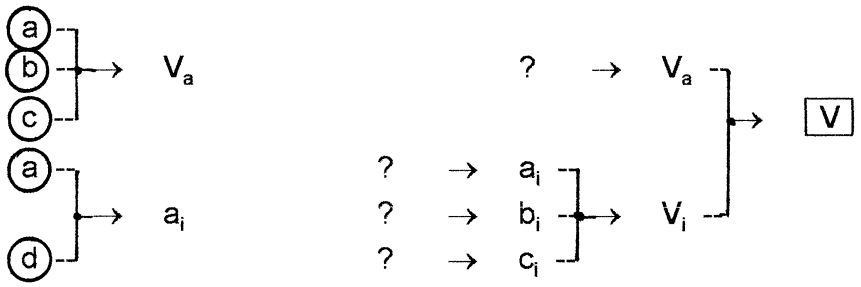
Bei der Suche nach einem Lösungsweg stößt man auf Hilfsgrößen, für die weitere Größenvariable (hier V_1, V_2, V , a) eingeführt werden (vgl. Lösungsgraph).
Da wir mit Zahlenwerten rechnen wollen, tauchen in der nachfolgenden Lösungsdarstellung diese Variablen in den Gleichungen als Zahlenvariable, in den Begründungen dagegen als Größenvariable auf. Um diesen Mangel zu beseitigen, könnte man für die vorkommenden Zahlenvariablen neue Zeichen einführen. Da Fragen der Darstellungstechnik hier nicht im Vordergrund stehen sollen, nehmen wir den Mangel der Doppeldeutigkeit der Variablenbezeichnungen bewußt in Kauf und stellen die Lösung unserer Aufgabe in einem *Lösungsschema* wie folgt dar:

Geg.	$\Rightarrow$	(1)	$V_1 = 48^2 \cdot 1 = 2304$;	[Volumenformel $V_1 = a_1^2 h_1$] .
Geg.	$\Rightarrow$	(2)	$V_2 = 32^2 \cdot 4 = 4096$;	[Volumenformel $V_2 = a_2^2 h_2$] .
(1),(2)	$\Rightarrow$	(3)	$V = 2304 + 4096 = 6400$;	[$V = V_1 + V_2$; Gesamtvolumen gleich Summe der Teilvolumina] .
Geg.,(3)	$\Rightarrow$	(4)	$6400 = 4a^2$;	[Volumenformel $V = a^2 h$] .
(4)	$\Rightarrow$	(5)	$1600 = a^2$;	[Umformung] .
(5)	$\Rightarrow$	(6)	$a = 40$;	[Umformung] .
(6)	$\Rightarrow$	(7)	$u = 4 \cdot 40 = 160$;	[Umformung] .

Der gesuchte Umfang beträgt 160 cm .

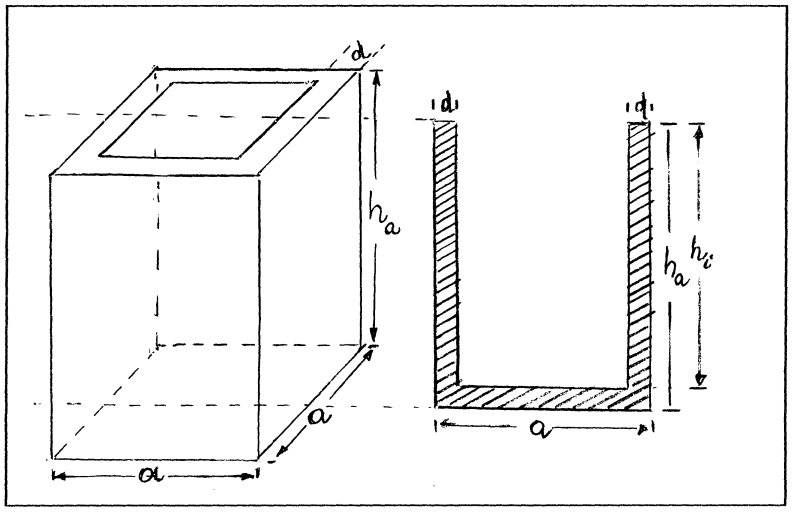
Hinweis: Beim Lösen der zugehörigen parameterhaltigen Aufgabe liefern die fünf in den Begründungen angegebenen Formeln ein gestaffeltes Gleichungssystem, in dem man durch schrittweises Einsetzen "von unten nach oben" die Hilfsgrößen a, V, V_1, V_2 beseitigen kann. Auf diese Weise gelangt man zu der "allgemeinen Lösungsformel" $u = 4(a_1^2 h_1 + a_2^2 h_2) : h$, die die unmittelbare Berechnung der gesuchten Größe aus den gegebenen Größen gestattet. Wenn die gegebenen Größen verträgliche Einheiten besitzen, dann kann man für die vorkommenden Variablen die zugehörigen Zahlenwerte einsetzen und erhält so den Zahlenwert der gesuchten Größe.

Bei der recht leichten *Aufgabe 8)* wird man den Begriff "(geschlossener) Hohlquader" (in Analogie zu "Hohlkugel") klären. Da die Einheiten der gegebenen und der gesuchten Größen nicht verträglich sind, muß man sich entscheiden, ob man die Daten gleich in m umrechnet, oder ob man das gesuchte Volumen von cm^3 in m^3 umrechnet.
Durch kombiniertes RA/VA gelangt man zu folgendem *Lösungsgraphen:*



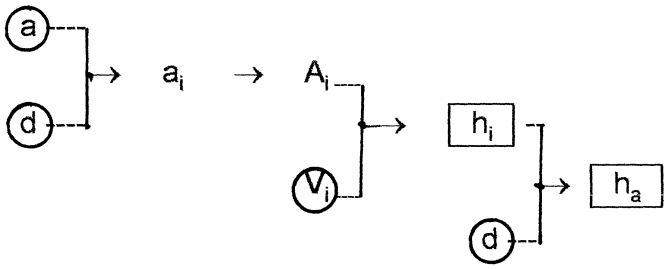
Das Resultat lautet $V = 0{,}112\ m^3$.

Bei *Aufgabe 9)* sollten sich leistungsschwächere Schüler den Sachverhalt anhand eine räumlichen Skizze und eines Querschnitts verdeutlichen und sich den Unterschied zwischen "lichter Höhe" und "Gesamthöhe" klarmachen.
Auch hier geht es wieder um die Wahl verträglicher Einheiten. Die Impulse für die Lösungsfindung durch RA/VA sollten von den Schülern kommen.
Folgendes kann an der Wandtafel festgehalten werden:



Geg.: $V_i = 75$ Liter $= 75000$ cm³ ;
$a = 51$ cm ;
$d = 5$ mm $= 0{,}5$ cm ;

Ges.: lichte Höhe h_i (in cm) ;
Gesamthöhe h_a (in cm) .



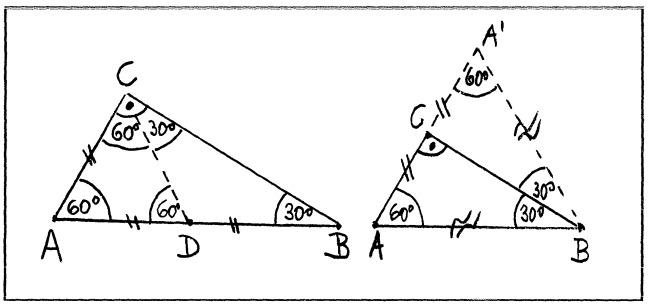
Die Resultate lauten $h_i = 30$ cm , $h_a = 30{,}5$ cm .

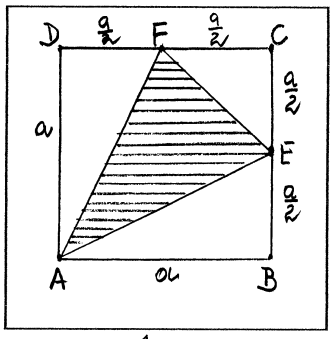
Bei *Aufgabe 10)* gelangt man wegen $A = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$ von den gegebenen Größen A, A_1 und A_2 durch VA sofort zu A_3 .
Beim RA stößt man auf a oder b oder c als jeweils hinreichende Hilfsgröße.
Eine günstige Lösungsidee besteht darin, in den drei Gleichungen eine Faktorzerlegung vorzunehmen und hiervor ausgehend sofort das Produkt abc und damit die gesuchte Größe zu ermitteln.

$A_1 = a \cdot b = 63 = 9 \cdot 7$; (geg.)
$A_2 = b \cdot c = 35 = 7 \cdot 5$; (geg.)
$A_3 = a \cdot c = 45 = 5 \cdot 9$; (berechnet)
$a^2b^2c^2 = 9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2$;
$V = abc = 9 \cdot 7 \cdot 5$.

Ein für Schüler näherliegender Weg, dieses Gleichungssystem zu lösen, besteht darin, ganzzahlige Lösungen zu erraten. Dies wird man natürlich zulassen, man wird aber auch die Mängel eines solchen Vorgehens aufmerksam machen: Es ist der Regel damit nicht nachgewiesen, daß dies die einzige Lösung ist.

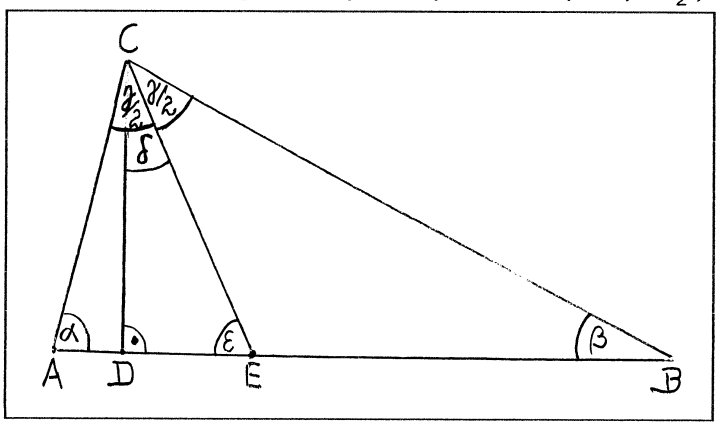
Für das Lösen der *Aufgabe 11)* kann die Aufgabe 6) Anregung geben. Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, geschickte Hilfslinien zu finden, wobei $\sphericalangle BAC = 60°$ zur Idee führen kann, ein gleichseitiges Dreieck als Hilfsfigur zu verwenden. Manche Schüler werden zunächst einer genau gezeichneten Figur die Vermutung entnehmen und diesedann beweisen.
Das gesuchte Resultat lautet $\overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 2$.





Bei *Aufgabe 12)* kommen Schüler aus höheren Klassenstufen manchmal auf die ungeschickte Lösungsidee, die Grundlinie $\overline{EF}$ sowie die Höhe des schraffierten Dreiecks zu ermitteln, um so mit Hilfe der Inhaltformel für Dreiecke zum Ziel zu gelangen.
Da Schüler der Klassenstufe 6 diese Inhaltsformel noch nicht kennen, bleibt ihnen als geeignetes Hilfsmittel nur "Flächenzerlegung" oder "Flächenergänzung".
Offensichtlich läßt sich aus den (kongruenten) Dreiecken ABE und ADF ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $\frac{1}{2}a$ zusammensetzen, und das Dreieck ECF ist halb so groß wie ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{2}a$.
Dies führt zum Resultat $J(EFA) = a^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2$.

Aufgabe 13) umfaßt (als parameterhaltige Aufgabe) die Aufgabe 12) als Spezialfall (für $p = \frac{1}{2}$).



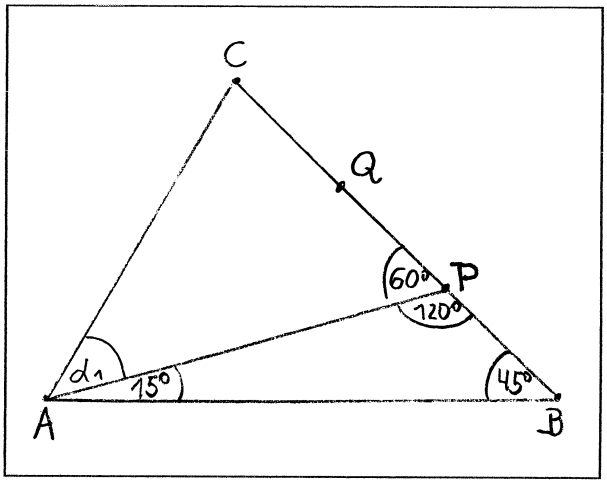
Dies sollte man allen Schülern bewußtmachen.
Sehr leistungsstarke Schüler sollten sofort Aufgabe 13) lösen, wozu einige Fähigkeiten im Umformen von Termen benötigt werden.

Man erhält das Resultat

$$J(EFA) = \frac{1}{2}a^2(1 - p^2).$$

Mit Hilfe von Aufgabe 12) kann man eine "Probe am Spezialfall" duchführen.

Bei *Aufgabe 14)* führt die allgemeine Hilfsmittelfrage zum Innenwinkelsatz als Hilfsmittel, der - angewendet auf die Dreiecke ADC und DBC - die Gleichungen $\alpha + \frac{1}{2}\gamma - \delta = 90°$ sowie $\beta + \frac{1}{2}\gamma + \delta = 90°$ liefert, aus denen man durch Gleichsetzen und Umformen das Resultat $\delta = (\alpha - \beta)$ erhält.
Es gibt noch weitere Lösungswege, z.B. durch Einführen der hinreichenden Hilfsgröße ε, bei denen auch der Außenwinkelsatz für das Dreieck EBC verwendet wird, doch sind diese Lösungswege umständlicher als der oben genannte.



Die Aufgabe 15) ist zweifellos die schwierigste der bisher behandelten Aufgaben. Nur überdurchschnittlich leistungsfähige Schüler dürften in der Lage sein, diese Aufgabe selbständig zu lösen.
Oft lohnt der Versuch, einer genau gezeichneten Planfigur Vermutungen zu entnehmen, die bei der Suche nach einem Lösungsweg nützlich sein können.
Wer zur Vermutung kommt, daß $\sphericalangle BAC = 60°$ gilt (woraus dann als Resultat $\sphericalangle ACB = 75°$ folgen würde), ist schon recht weit gekommen, weil er damit die Bestimmungsaufgabe in eine Beweisaufgabe umgewandelt hat, bei der das RA effektiv einsetzbar ist.

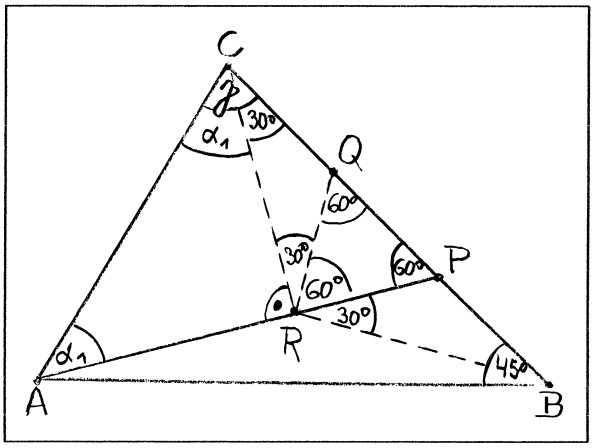
Durch VA lassen sich leicht zwei Winkel berechnen; durch RA stößt man leicht auf $\sphericalangle PAC = \alpha_1$ als hinreichende Hilfsgröße; auch der Hilfspunkt Q ist noch relativ leicht zu finden.
Nun liegt es nahe, die Dreiecke APQ und AQC oder Parallelogramme, die aus den nunmehr 6 vorkommenden Dreiecken durch Konstruktion des vierten Parallelogrammpunkts gewonnen werden, als Hilfsfiguren zu verwenden. Die Erkenntnis, daß dies nicht zum Ziel führt, kann viel Zeit kosten; dies sollte daher - falls derartige Vorschläge kommen - den Schüler sofort mitgeteilt werden. Keinesfalls sollte jedoch der AG-Leiter die "versteckten" Hilfslinien, die zum Ziel führen, einfach vorgeben.

Wir wollen anhand der Lösung dieser Aufgabe nochmals demonstrieren, wie man durch Einsatz allgemeiner Impulse , die im Bedarfsfall durch Nebenimpulse untersetzt werden, zu einem Lösungsweg gelangen kann. Daß dies nicht so glatt geht, wie hier beschrieben, sondern daß immer wieder Sackgassen auftauchen können (vor denen dann der AG-Leiter warnen sollte), versteht sich wohl von selbst.

- Was läßt sich aus den gegebenen Größen unmittelbar berechnen? Begründung!	$\sphericalangle APB = 120°$; (Nebenwinkelsatz) ; $\sphericalangle BAP = 15°$; (Innenwinkelsatz) ,
- Woraus ließe sich die gesuchte Größe unmittelbar berechnen? Begründung!	Mit Hilfe von $\sphericalangle PAC = \alpha_1$ könnte ich γ berechnen (m.H. des Innenwinkelsatzes). α_1 läßt sich aus den Daten nicht berechnen. Ich komme nicht weiter!
- Wenn du nicht weiterkommst, dann überlege, welche Voraussetzungen du noch nicht verwendet hast!	Wegen $3\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC}$ liegt es nahe, auf $\overrightarrow{BC}$ denjenigen Punkt Q einzuzeichnen, für den $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$ gilt
- Naheliegende Hilfspunkte, Hilfslinien oder Hilfsfiguren?	Die Betrachtung der Dreiecke APQ und AQC führt nicht weiter.
◦ Weitere günstige Hilfsfiguren?	Figuren über die man viel aussagen kann (z.B. Parallelogramme, gleichseitige, gleichschenklige, rechtwinklige Dreiecke u.ä.)
: besonders geeignete Hilfsfiguren?	Die Betrachtung von Parallelogrammen, bei denen A, B, P, Q oder C Eckpunkte sind, führt nicht weiter. Betrachtung des rechtwinligen Dreiecks AHC mit $H \in \overrightarrow{AB}$ führt nicht weiter!
: Voraussetzungen beachten!	Da ein 60°-Winkel gegeben ist, liegt es nahe, ein gleichseitiges Dreieck als Hilfsfigur einzuführen. Die Betrachtung des gleichseitigen Dreiecks PCS mit $S \in \overrightarrow{AP}$ bringt nicht viel. Ich betrachte das gleichseitige Dreieck PQR mit $R \in \overrightarrow{AP}$.

◦ Weitere günstige Hilfsfiguren?

Die (gleichschenkligen) Dreiecke RQC und RPB könnten nützlich sein!



- Was läßt sich nun berechnen? Begründe!

Mit Hilfe des Außenwinkelsatzes lassen sich die in der Figur eingetragenen 30°-Winkel berechnen. Hieraus läßt sich $\sphericalangle RBA = 45° - 30° = 15°$ berechnen.

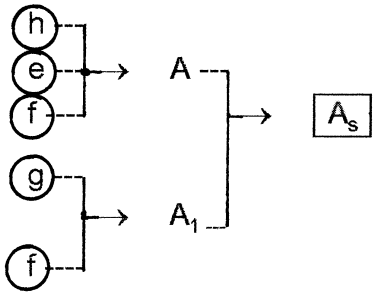
- Was läßt sich nun ableiten? Begründe!
  ◦ Betrachte vorkommende Strecken!

$\sphericalangle PRC = 90°$; (Winkeladdition),
also $\sphericalangle ARC = 90°$; (Nebenwinkelsatz).
$\overline{RC} = \overline{RB}$ und $\overline{RB} = \overline{RA}$; (Umkehrung Bws.),
also $\overline{RC} = \overline{RA}$.
Da ARC ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist, gilt $\alpha_1 = \sphericalangle PAC = \sphericalangle RAC = 45°$.
Damit habe ich mein hinreichendes Teilziel erreicht und komme ans Ziel.

Zu einem etwas anderen Lösungsweg gelangt man, wenn man bei der Suche nach einer geeigneten Hilfsfigur auf das rechtwinklige Dreieck PCR mit $R \in \overline{AP}$ stößt. Hieraus läßt sich dann $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP}$ ableiten, und man gelangt analog wie oben ans Ziel.
Man erhält jeweils $\gamma = 75°$.

Wir betrachten nun diejenigen geometrischen Bestimmungsaufgaben, die sich unter den "Vermischten Aufgaben" befinden. Bezüglich ihres didaktischen Einsatzes vgl. Abschnitt 2. . Es sei nur noch einmal daran erinnert, daß es hierbei vorwiegend um ein Wiederholen und Festigen heuristischer Vorgehensweisen und einiger logischer Grundlagen geht und daß das Wiederholen und Festigen von Sachkenntnissen und Fertigkeiten aus dem Unterrichtsstoff nur als günstiger Begleiteffekt angesehen wird.

Die *Aufgaben V3), V14) und V19)* gehören zum selben Typ. V3) und V14) sind sehr leicht durch VA zu bewältigen. Es wird nur die Inhaltsformel für Rechtecke benötigt. Bei V19) sollten die leistungsstärkeren Schüler mit der parameterhaltigen Aufgabe V19b) beginnen und dann das von den leistungsschwächeren Schülern ermittelte Resultat der parameterfreien Aufgabe V19a) für eine "Probe am Spezialfall" benützen.
Hier bietet sich auch eine gute Gelegenheit, den Einsatz eines Lösungsgraphen zum Abspeichern des durch RA/VA gefundenen Lösungsplans zu wiederholen.



Zum Lösen der *Aufgaben V8) und V10)* werden nur die Formeln für Volumen und Oberfläche eines Quaders benötigt. Es kann das Einführen günstiger Bezeichnungen sowie das Umrechnen von Größen geübt werden.

Bei Aufgabe V10) kann darauf hingewiesen werden, daß bei derartigen Aufgaben außer gegebenen Größen (hier V_1, a_1, b_1) auch Bedingungen gegeben sein können, die oft in Form von Gleichungen festgehalten werden können (hier $h_1 = h_2$, $a_2 = a_1 + 2$, $b_2 = b_1 - 1$).
Hier ist der Aufgabenstellung unmittelbar zu entnehmen, daß die Oberflächeninhalte O_1 und O_2 die benötigten hinreichenden Hilfsgrößen sind.

Bei *Aufgabe V25)* kann das systematische Ermitteln aller möglichen Fälle und das Festhalten von Bedingungen in Form von Ungleichungen geübt werden.
Meist werden die Schüler vermuten, daß die unter b) zu ermittelnde Anzahl von Möglichkeiten größer ist als die unter a) zu ermittelnde Anzahl. Oft wird auch übersehen, daß hier die Dreiecksungleichung eine einschränkende Bedingung liefert.

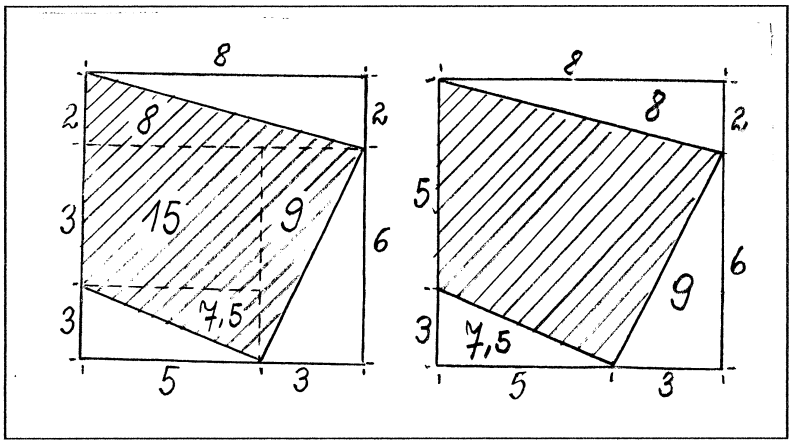
Leistungsstarke Schüler sollten bei Aufgaben 25b) aufgefordert werden, die zugehörige parameterhaltige Aufgabe zu lösen, in der $a + b + c = u$ gilt.
Da a, b, c Vielfache von 10 sein sollen, folgt aus der Bedingung $a > b > c$, daß $a > 30$ gelten muß.
Laut Dreiecksungleichung muß $a < b + c$ gelten, also $2a < a + b + c = u$, woraus dann $a < \frac{1}{2}u$ folgt, für $u = 160$ also $a < 80$.

In *Aufgabe V30)* sind neben Größen auch Bedingungen gegeben. Hier kann das geschickte Einführen von Variablen, das VA und der Umgang mit Gleichungen geübt werden. Dabei sind viele verschiedene Lösungswege möglich.
Besonders günstig ist das Einführen von $\overline{HG} = \overline{EF} = x$ (in cm), woraus wegen $\overline{AG} = \overline{GF} = 21$ sofort $\overline{AH} = 21 - x$ folgt. Leicht ableitbar ist auch $\overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{2}(21 - x)$.
Neben dem Arbeiten mit Gleichungen sollte man natürlich auch inhaltliches Schließen zulassen, z.B.:
Die längere Seite von ABLH ist um x cm kürzer als die längere Seite von HEFG. Wegen der geforderten Umfangsgleichheit dieser beiden Rechtecke muß dann die kürzere Seite von ABLH um x cm länger sein als die kürzere Seite von HEFG , d.h. es muß $\overline{AB} = 2x$ cm gelten. Hieraus folgt dann $\overline{BC} = \overline{KD} = \overline{LE} = 21 - 2x$ (in cm).
Wegen u(HEFG) = u(BCDK) gilt daher $2x + 42 = 42 - 4x + 21 - x$, woraus dann $7x = 21$, also $x = 3$ folgt.

Hieraus folgt dann J(HEFG) = 21·3 = 63 , J(ABLH) = 6·18 = 108 , J(BCDK) = J(KDEL) = 15·9 = 135 (jeweils in cm²).
Durch eine Probe ist nachzuweisen, daß die vier Rechtecke tatsächlich alle den gleich großen Umfang von 48 cm besitzen und daß die Summe der Inhalte mit 441 cm² tatsächlich gleich dem Inhalt des zerlegten Quadrats ist.

Bei *Aufgabe V33)* ist zu beachten, daß Schüler der Klasse 6 nur die Inhaltsformel für Rechtecke, nicht aber die für beliebige Dreiecke kennen. Hier wird auch nur die Tatsache benötigt, daß jedes Rechteck durch eine seiner Diagonalen in zwei inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt wird und daß beide Diagonalen das Rechteck in vier inhaltsgleiche Dreiecke zerlegen.

Wenn es den Schülern nicht gelingt, die recht anspruchsvolle Aufgabe 33b) selbständig zu lösen, dann wird man sie zunächst diese beschriebenen Tatsachen entdekken lassen.



Bei *Aufgabe 33a)* gibt es zwei Lösungswege, wobei bei dem einen "Flächenaddition", beim anderen "Flächensubtraktion" eingesetzt wird.
Dies führt zu
$J_s = 15 + 7{,}5 + 9 + 8 = 39{,}5$ bzw. $J_s = 64 - (7{,}5 + 9 + 8) = 64 - 24{,}5 = 39{,}5$.
Da der Anteil von J_s am Inhalt $J_Q = 64$ des Quadrats in Form eines gekürzten Bruchs anzugeben ist, beträgt dieser Anteil $\frac{79}{128}$.

Bei *Aufgabe 33b)* führt nur "Flächensubtraktion" zum Ziel. Es gilt:

$J_s = J_Q - J_I - J_{II} - J_{III} - J_{IV}$;

$J_I = \frac{3}{4}J(AELD) = \frac{3}{4}\cdot 3\cdot 8 = 18$;

$J_{II} = \frac{1}{4}J(FBIR) = \frac{1}{4}\cdot 4\cdot 4 = 4$;

$J_{III} = \frac{1}{4}J(GBCK) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 8 = 4$;

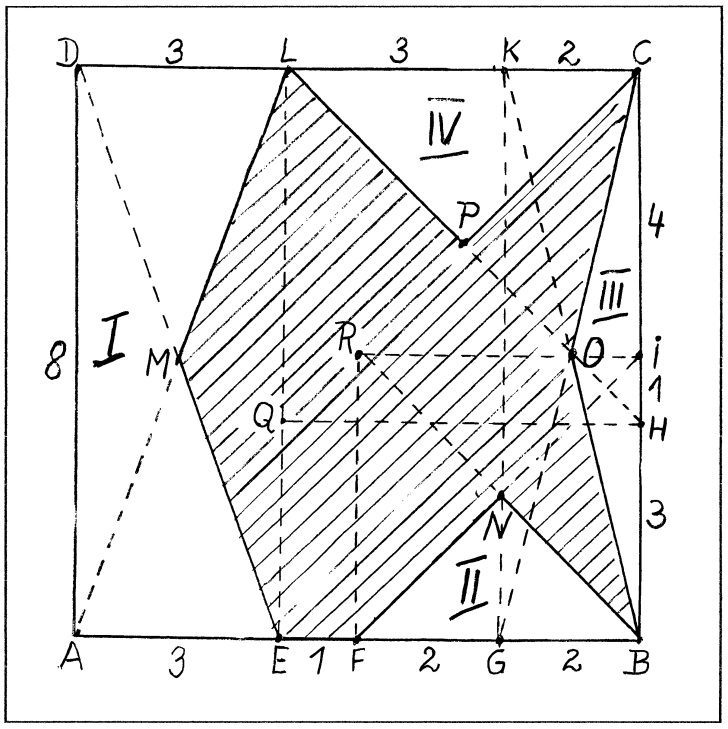
$J_{IV} = \frac{1}{4}J(QHCL) = \frac{1}{4}\cdot 5\cdot 5 = \frac{25}{4}$.

Hieraus folgt dann

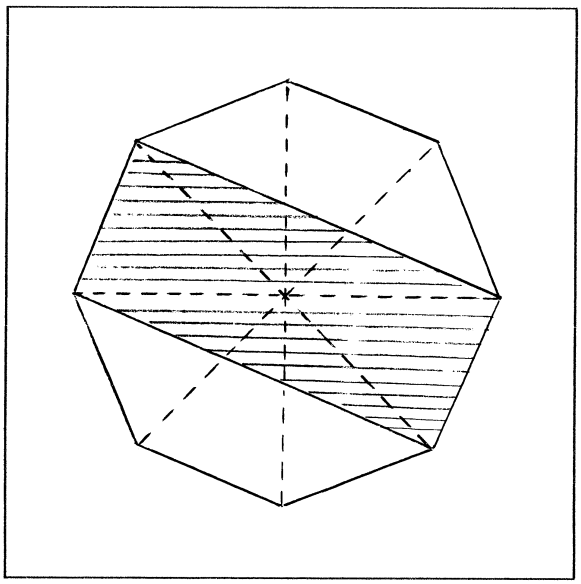
$J_s = 64 - 18 - 4 - 4 - \frac{25}{4} = \frac{127}{4}$,

wegen $J_Q = \frac{256}{4}$ also

$\frac{J_s}{J_Q} = \frac{127}{256}$.



Bei *Aufgabe V60)* besteht die entscheidende Lösungsidee im Zerlegen des regelmäßigen 2n-Ecks in kongruente und damit inhaltsgleiche gleichschenklige Dreiecke. Wenn man dann noch berücksichtigt, daß der Streifen ein Rechteck ist, das durch seine beiden Diagonalen in vier inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt wird, von denen zwei Dreiecke von der oben erwähnten Art sind, dann kommt man leicht ans Ziel, und auch das Finden der Verallgemeinerung ist nicht sehr problematisch.



Aus J(2n-Eck) = 2nJ(Dreieck)

und J(Streifen) = 4J(Dreieck)

folgt J(Streifen) : J(2n-Eck) = 2 : n .

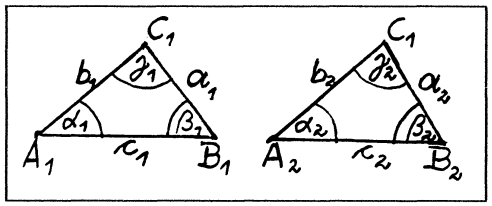
3.9.3. Geometrische Beweisaufgaben

Ziele:
- Informativ gestaltete Figuren zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsplan.
- Teilzielfrage und Hilfsmittelfrage beim VA und RA .
- Lösungsgraphen zum Festhalten von Lösungsplänen.
- Beweisschemata als Darstellungsform für Beweise.

Vor dem Behandeln der Aufgaben 4) und 8) sollte man den Kongruenzbegriff und die Kongruenzsätze wiederholen.
In der Mehrzahl der Fälle wird die Kongruenz zweier Dreiecke mit Hilfe eines der vier Kongruenzsätze nachgewiesen und hieraus auf die Kongruenz der restlichen (nicht verwendeten) Stücke geschlossen. Diese Schlußweise sollte bei der Wiederholung im Vordergrund stehen, wobei die Schüler daran gewöhnt werden sollen, stets zu prüfen, welcher der Kongruenzsätze zum Nachweis einer bestimmten Strecken- oder Winkelkongruenz nicht verwendet werden kann. Darüberhinaus müssen die Schüler wissen, daß man die Kongruenz zweier Figuren auch dadurch nachweisen kann, daß man eine Bewegung angibt, die diese Figuren ineinander überführt.

Folgendes kann an der Wandtafel festgehalten werden:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = b_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ c_1 = c_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{(sws)} \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \\ \gamma_1 = \gamma_2 \end{array}\right.$$



Nachdem alle Schüler der AG im Unterricht den (vom Lehrplan vorgeschriebenen) Beweis des Innenwinkelsatzes behandelt haben, erhalten die Schüler den Auftrag, den in ihrem Lehrbuch enthaltenen Beweis zu wiederholen, so daß sie ihn im Zirkel vortragen können. Sollten in unterschiedlichen Lehrbüchern verschiedene Beweise enthalten sein, dann lasse man alle diese Beweise vortragen. In der Regel wird hierbei stillschweigend vorausgesetzt, daß es stets genau eine Parallele durch C zu AB gibt, d.h. daß das betrachtete Dreieck in einer euklidischen Ebene liegt.
Man sollte die Schüler fragen, ob sie tatsächlich fest davon überzeugt sind, daß die Winkelsumme in jedem Dreieck - unabhängig von der Zeichengenauigkeit und unabhängig davon, ob es im Heft, an der Tafel oder auf einer anderen Fläche gezeichnet wurde - stets 180° beträgt. Es dürfte kaum einen Schüler geben, der davon nicht überzeugt ist.
Zunächst sollte man klären, daß die Sätze der Geometrie nicht für "reale" (gezeichnete) Punkte, Geraden oder Figuren gelten. Offensichtlich gilt die Aussage, daß zwei verschiedene Punkte (so dicht sie auch beieinanderliegen mögen) stets genau eine Gerade festlegen, nur für "ideelle" Gebilde. Schüler dieser Altersstufe sind meist sehr überrascht, wenn sie einsehen müssen, daß man die Gebilde, mit denen wir uns in der Geometrie beschäftigen, gar nicht "sehen", sondern nur "denken" oder "sich vorstellen" kann. Auch nach Klärung dieses Sachverhalts dürften die meisten Schüler von der Allgemeingültigkeit des Innenwinkelsatzes überzeugt sein.
Nun kann der AG-Leiter die Geschichte von dem Jäger erzählen, der einen Bären erlegte, dann 50 km nach Süden, anschließend 50 km nach Osten und schließlich 50 km nach Norden marschierte und auf diese Weise erstaunlicherweise wieder bei seinem Bären angelangt war. Es ist durchaus möglich, daß einige Schüler des Rätsels Lösung kennen: Es handelt sich um einen Eisbären, der genau am Nordpol erlegt wurde.
Auf diese Weise kann man zur Erkenntnis gelangen, daß für ein auf einer Kugelfläche gezeichnetes Dreieck die Winkelsumme nicht gleich, sondern größer als 180° ist. Dies liefert ein Motiv, zu untersuchen, worin sich die *Geometrie auf einer Kugelfläche* von der Geometrie in

einer Ebene unterscheidet. Für diese Untersuchungen wird ein Globus als Modell verwendet. Folgende Erkenntnisse sollten die Schüler finden:

- In der Ebene verläuft die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der zugehörigen Geraden (die Gerade ist "geodätische Linie" in der Ebene).
- Auf der Kugel verläuft die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf dem zugehörigen Großkreis (das ist der Schnittkreis der Kugelfläche mit einer Ebene, die durch die beiden Punkte und durch den Mittelpunkt der Kugelfläche geht). Wir wollen solche Großkreise *"K-Geraden"* nennen.
- Der Äquator und die Meridiane sind K-Geraden.
- Die (vom Äquator verschiedenen) Breitenkreise sind keine K-Geraden. Wer auf einem solchen Breitenkreis sich von einem Ort zu einem anderen Ort bewegt, macht einen Umweg.
- Auf der Kugel gibt es auch Punktpaare, die nicht eindeutig eine K-Gerade festlegen (z.B. Nordpol und Südpol).
- Jede K-Gerade, die durch einen Punkt außerhalb des Äquators geht, schneidet den Äquator in zwei Punkten.
- Auf der Kugel gibt es kein Paar von K-Geraden, die einander nicht schneiden, d.h. es gibt keine parallelen K-Geraden. Also kann es in der Geometrie auf einer Kugelfläche auch keinen Satz geben, der dem Stufen- oder Wechselwinkelsatz der ebenen Geometrie entspricht.

Nach Einführung des Begriffe "K-Dreieck" (sphärisches Dreieck) sollten die Schüler untersuchen, welche der ihnen bekannten Sätze über Dreiecke in der Ebene auch noch für K-Dreiecke gelten. Durch Angabe konkreter Gegenbeispiele lassen sich der Innenwinkelsatz und die Aussenwinkelsätze als falsche Aussagen über K-Dreiecke nachweisen, während etwa der Scheitelwinkelsatz und der Basiswinkelsatz nebst Umkehrung (vermutlich) wahre Aussagen über K-Dreiecke sind.

Nun bleibt noch eine wichtige Frage offen: Der Innenwinkelsatz wurde doch im Unterricht für "alle" Dreiecke bewiesen. Warum gilt er dann nicht auch für K-Dreiecke? An welcher Stelle des Beweises steckt eine Unkorrektheit? Beim Wiederholen des Beweises (oder der Beweise) aus den Lehrbüchern sollen die Schüler diese Stelle selbst finden.

Abschließend ist hervorzuheben: Wenn man bei einem geometrischen Beweis eine Hilfslinie einführt, dann muß man nachweisen, daß diese Hilfslinie auch tatsächlich existert. Die in vielen Beweisen verwendete Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus existiert stets eindeutig; daß es dagegen durch C zu AB stets genau eine Parallele (d.h. eine Gerade, die mit AB keinen Punkt gemeinsam hat) gibt, ist eine stillschweigende Annahme, die zwar für die (euklidische) Ebene zutrifft, nicht aber für eine Kugelfläche.

Man sollte recht oft die Möglichkeit nutzen, aus geometrischen Beweisaufgaben "offene Aufgaben" zu machen, indem man verlangt, die Behauptung einer genau gezeichneten Beweisfigur als Vermutung zu entnehmen. Die Figur kann man "nach Diktat" von allen Schülern gemeinsam anfertigen lassen, wobei man sofort auf Fehler und Ungeschicklichkeiten eingehen kann. Eine andere Möglichkeit besteht darin, informativ gestaltete Beweisfiguren als Hausaufgabe für den jeweiligen Zirkel anfertigen zu lassen, in der die betreffende Beweisaufgabe behandelt werden soll. Es dauert erfahrungsgemäß einige Zeit, bis alle Schüler diesbezüglich hinreichende Fertigkeiten erworben haben.

Wenn ein Lösungsplan gefunden wurde, dann ist das Anfertigen eines dreispaltigen Beweisschemas eine Sache erlernbarer Technik, die sich die leistungsstärkeren Schüler in der Regel sehr schnell aneignen. Wenn im Zirkel einige solcher Beweisschemata als Musterbeispiele festgehalten wurden, sollte man das Darstellen gefundener Beweise in die Hausaufgaben verlagern, die dann natürlich zu kontrollieren und notfalls zu korrigieren sind. Wenn ein Schüler nachgewiesen hat, daß er diese Darstellungstechnik beherrscht, wird er von derartigen Hausaufgaben befreit.

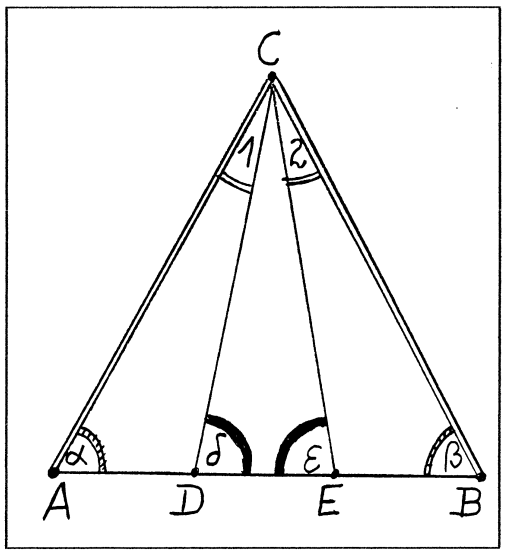
Bei *Aufgabe 1)* wird der AG-Leiter die informativ gestaltete Figur vorgeben und die getroffenen Vereinbarungen nochmals erläutern. Die Schüler haben dann Voraussetzungen und Behauptung unter Verwendung der gegebenen Bezeichnungen A, B, C, D, E herauszuschreiben und den zugehörigen Satz zu formulieren. Beim Suchen nach einem Lösungsweg werden die Bezeichnungen α, β, δ, ε, $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ eingeführt und in der Figur festgehalten.

Hier kann die Teilzielfrage beim VA zu einem Lösungsplan führen, den man in der Figur abspeichern kann ($\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ "grün", $\alpha = \beta$ "blau", $\delta = \varepsilon$ "rot").
Anschließend wird man die Beweisdarstellung gemeinsam erarbeiten.
In leistungsstarken AGn wird man in der Beweisdarstellung die abkürzenden Bezeichnungen nicht mehr verwenden, sondern anstelle von

"$\delta = \alpha + \sphericalangle 1$"

besser "$\sphericalangle CDE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD$"

schreiben.



Das Wandtafelbild kann dann wie folgt aussehen (Wobei hier "grün" durch ═══, "blau" durch ═══ und "rot" durch ▬▬ angedeutet wird):

V_1: $\overline{AC} = \overline{BC}$;

V_2: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$ mit $D,E \in \overline{AB}$; ($\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$) ;

Beh.: $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED$; ($\delta = \varepsilon$) .

Beweis:

V_1	$\Rightarrow$	(1)	$\alpha = \beta$;	[Basiswinkelsatz] .
V_2	$\Rightarrow$	(2)	$\delta = \alpha + \sphericalangle 1$;	[Außenwinkelsatz] .
			$\varepsilon = \beta + \sphericalangle 2$;	[Außenwinkelsatz] .
(1),V_2	$\Rightarrow$	(3)	$\alpha + \sphericalangle 1 = \beta + \sphericalangle 2$,	[Rechenregel] .
(2),(3)	$\Rightarrow$	Beh.	$\delta = \varepsilon$;	[Drittengleichheit] .

Damit ist gezeigt, daß gilt: $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow$ Beh. ; w.z.b.w.

Bei der Suche nach einem Beweis können folgende *Haupt- und Nebenimpulse* nützlich sein:

- Was läßt sich aus den Voraussetzungen unmittelbar folgern? Begründung!
  - Was läßt sich aus V_1 unmittelbar folgern?
    - : Welcher Satz (mit gleicher Voraussetzung) könnte als Beweismittel dienen?
- Was läßt sich nun unmittelbar folgern?
  - Welche Voraussetzung wurde noch nicht verwendet?
  - Welche Sätze könnten als Beweismittel dienen?

Es ist nicht zu erwarten, daß alle Schüler sofort diesen kurzen Beweis finden. Es liegt recht nahe, mit dem Innenwinkelsatz zunächst $\delta_1 = \sphericalangle ADC = \varepsilon_1 = \sphericalangle BEC$ und dann mit dem Nebenwinkelsatz $\delta = \varepsilon$ abzuleiten. Desgleichen könnte man die (hier nicht benötigten) Feststellungen $\overline{DC} = \overline{EC}$, $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle BEC$, $\overline{AD} = \overline{EB}$ ableiten. Sollten solche Vorschläge von Schülern kommen, dann wird man sie natürlich nicht als falsch ablehnen. Man wird lediglich nachträglich nach einem kürzeren Beweis suchen lassen.

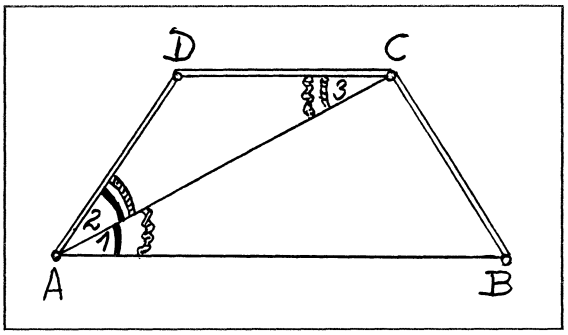
Aufgabe 2) ist eine "offene" Aufgabe. Ein Beweis der gefundenen Vermutung läßt sich durch VA finden. Hier ist es günstig, den Lösungsplan in einem Lösungsgraphen festzuhalten und die schriftliche Darstellung des Beweises als Hausaufgabe zu stellen.
Folgende *Impulse* können helfen:

- Zeichne ein Trapez ABCD mit AB||CD , in dem $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$ gilt!
  - Figur geschickt zeichnen! Womit beginnen?
- Zeichne die Diagonale $\overline{AC}$!
- Vergleiche die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle CAD$! Vermutung?
- Formuliere den zu beweisenden Satz!

Dann folgen die bei Aufgabe 1) angegebenen Impulse.
Nachdem ein Schüler den Beweis (mit den zugehörigen Begründungen) mündlich dargestellt hat (wobei er zur Erläuterung die Beweisfigur verwenden sollte), lasse man untersuchen, ob wirklich alle Voraussetzungen für den Beweis benötigt wurden oder ob unser Satz eine "überflüssige" Voraussetzung enthält.
Das Tafelbild kann wie folgt aussehen:

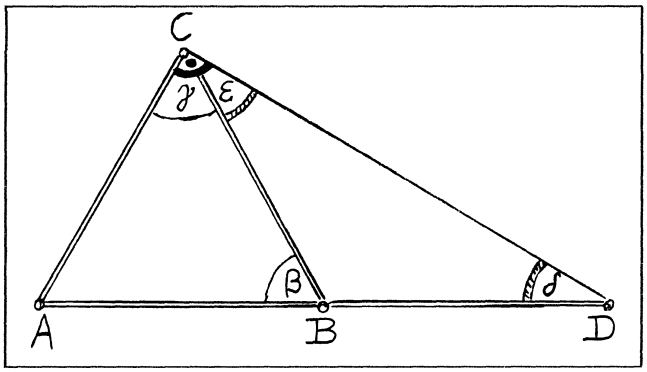
V_1: AB||CD ;
V_2: $\overline{AD} = \overline{DC}$ [= $\overline{CB}$ überflüssig] ;
Beh.: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$.

$V_1 \rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ ┐
$\rightarrow \boxed{\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2}$
$V_2 \rightarrow \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ ┘



Nun kann man *Aufgabe 3)* analog zur Aufgabe 2) behandeln: Zeichnen "nach Diktat" - Vermutung - Beweisfindung durch VA . Den Lösungsplan kann man (durch Eintragen der berechneten Winkelgrößen) in der Figur abspeichern. Eine andere Möglichkeit besteht darin, nur die Folge der abgeleiteten Feststellungen festzuhalten. Dies kann dann an der Wandtafel wie folgt aussehen:

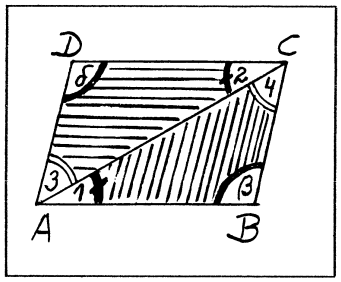
V_1: ABC ist ein gleichseitiges Dreieck ;
V_2: $\overline{BD} = \overline{BC}$ mit $B \in \overline{AD}$;
Beh.: $\sphericalangle ACD = 90°$.
Ableitbare Feststellungen:
(1) $\beta = 60°$; (2) $\delta = \varepsilon$; (3) $\beta = \delta + \varepsilon$;
(4) $60° = 2\varepsilon$; (5) $\varepsilon = 30°$; (6) $\gamma = 60°$;
Beh.: $\gamma + \varepsilon = 90°$.



Als abschließendes Training im VA kann man die Aufgabe stellen, möglichst viele Feststellungen aus der Voraussetzung abzuleiten, daß ABCD ein Parallelogramm (mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$) ist.
Man achte darauf, daß die so bewiesenen Sätze über das Parallelogramm auch in der "Wortsprache" korrekt formuliert werden. Man kann diese Beweise in Form eines Lösungsgraphen festhalten oder auch nur in einer informativ gestalteten Figur abspeichern.
An der Wandtafel läßt sich dies wie folgt festhalten:

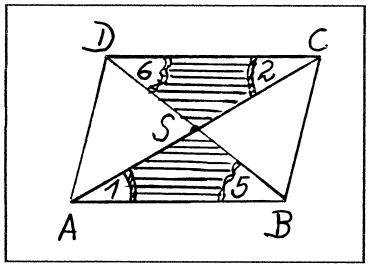
V_1: AB||CD $\rightarrow$ $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$
V_2: AD||BC $\rightarrow$ $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$
Stets gilt $\overline{AC} = \overline{CA}$

$\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle CDA \rightarrow \overline{BA} = \overline{CD}$; $\overline{BC} = \overline{DA}$; $\beta = \delta$



..... $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$
..... $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$
..... AB = CD

$\rightarrow \triangle ABS \cong \triangle CDS \rightarrow \overline{AS} = \overline{CS}$; $\overline{BS} = \overline{DS}$



Bei *Aufgabe 4)* lasse man die Vermutung aus einer (nach "Diktat" angefertigten) Figur entnehmen. Der Beweis sollte in selbständiger Schülertätigkeit gefunden werden, wobei der AG-Leiter beobachtet, welche Schüler (wahrscheinlich durch VA) selbständig ans Ziel gelangen.
Gelingt dies vielen Schülern nicht, dann fordere man sie auf, die Frage zu stellen, die das Suchen nach Teilzielen beim VA charakterisiert. Hilft dies noch nicht, dann wird der AG-Leiter die *Hilfsmittelfrage beim RA* stellen:

- Welche Sätze haben eine Behauptung, die unserer Behauptung gleicht? (Sie können als Beweismittel dienen!)

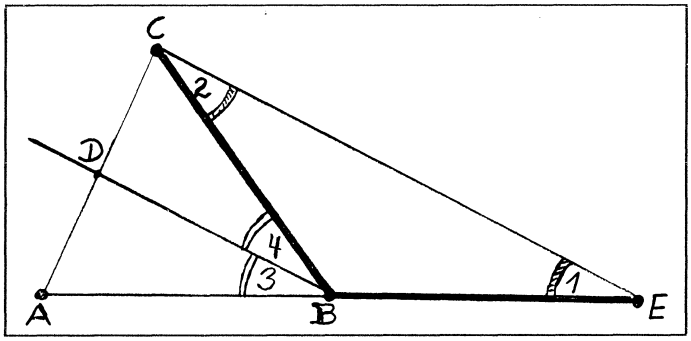
Sollte der Vorschlag kommen, $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ANM$ abzuleiten, um dann mit der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ans Ziel zu gelangen, dann wird man den Schülern mitteilen, daß dies zu einem recht komplizierten Beweis führt, und man wird sie auffordern, nach einem anderen Beweismittel zu suchen.

Dies kann zu folgendem Resultat führen:

V_1: ABCD ist ein Quadrat ; $V_1 \rightarrow \overline{AB} = \overline{AD}$ (= a)
V_2: M ist der Mittelpunkt von $\overline{BC}$; $V_1 \rightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle D$ (= 90°)
N ist der Mittelpunkt von $\overline{CD}$; V_1, V_2 $\rightarrow \overline{BM} = \overline{DN}$ (= $\frac{1}{2}$a)
Beh.: $\overline{AM} = \overline{AN}$.

$\rightarrow \triangle ABM \cong \triangle ADN \rightarrow \boxed{\overline{AM} = \overline{AN}}$

Aufgabe 5) ist etwas schwieriger als Aufgabe 4). Hier dürfte es bereits für viele Schüler eine Hilfe sein, wenn der 1. Schritt im RA zurückgelegt und das so gewonnene Teilziel dann durch VA angesteuert wird. Durch die Hilfmittelfrage beim beim VA gelangt man dabei zum Stufen- und zum Wechselwinkelsatz als naheliegende Hilfsmittel.



Das Tafelbild kann wie folgt aussehen:

V_1: $\overline{BD}$ ist Winkelhalbierende im $\triangle ABC$;

V_2: $CE \| BD$ und $E \in \overrightarrow{AB}$;

Beh.: $\overline{BE} = \overline{BC}$.

$V_1 \rightarrow \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ ------

$\rightarrow \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ ------

$V_2 \rightarrow \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ ------

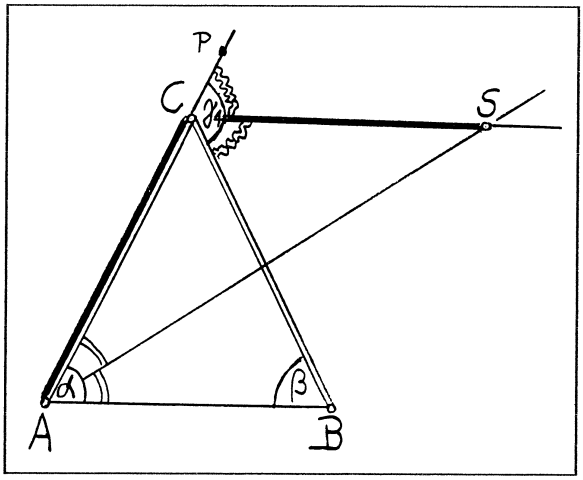
$\rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \rightarrow \boxed{\overline{BE} = \overline{BC}}$

$V_3 \rightarrow \sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ ----------

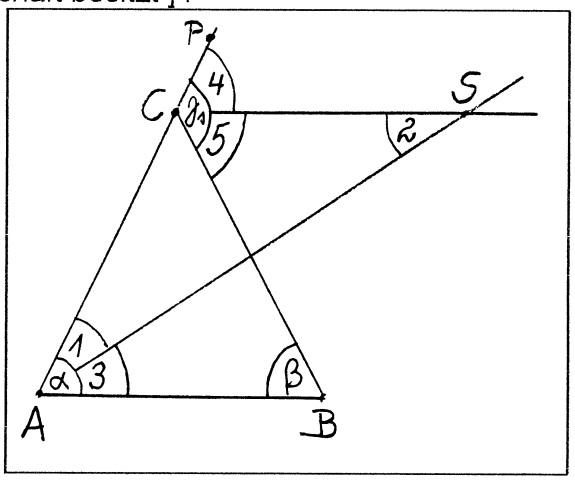
Man wird hervorheben, daß wir mehrere Möglichkeiten kennengelernt haben, wie man die Gleichheit (Kongruenz) zweier Strecken nachweisen kann: z.B. als entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken; als Seiten eines Dreiecks, in dem zwei Winkel gleich sind; als gegenüberliegende Seiten im Parallelogramm.
Man muß jeweils durch Betrachten der Voraussetzungen, der Behauptung und der Beweisfigur entscheiden, welches dieser Beweismittel im konkreten Fall die größten Chancen zu besitzen scheint.

Aufgabe 6) dürfte die schwierigste der bislang behandelten Beweisaufgaben sein. Die Analyse dieser Aufgabe in Hinblick auf Potenzen, die sie für die Aneignung heuristischer Vorgehensweisen bietet, führt zu folgendem Ergebnis:
Es gibt *2 Lösungswege*, die mit Hilfsmitteln aus Klasse 6 zu bewältigen sind. (Ein umständlicher Lösungsweg, für den man Ähnlichkeit bzw. die Umkehrung eines Strahlensatzes benötigt, kommt hier nicht in Frage.)
Es ist günstig, zumindest das Teilziel "AB||CS" bereits beim Zeichnen einer genauen Planfigur als Vermutung zu entdecken.
Der Versuch, nach nur einmaligem RA sofort durch VA zum Ziel zu gelangen, dürfte vielen Schülern nicht gelingen. Günstiger ist viermaliges RA mit anschließendem VA, wobei auch die Hilfsmittelfrage beim RA bedeutsam wird.
Es sollte bewußt abgehoben werden, daß "Drittengleichheit" ein oft einsetzbares Beweismittel für die Ableitung der Gleichheit von Winkeln (oder auch Strecken) ist, und daß zum Nachweis der Parallelität (neben der Parallelogrammeigenschaft) vor allem die Umkehrung von Stufen- oder Wechselwinkelsatz verwendbar ist.

Diese Erkenntnisse können wie folgt in *Impulse* zum Steuern (bzw. zum Selbststeuern) von geistigen Schülerhandlungen beim Lösen dieser problemhaften Aufgabe eingesetzt werden:

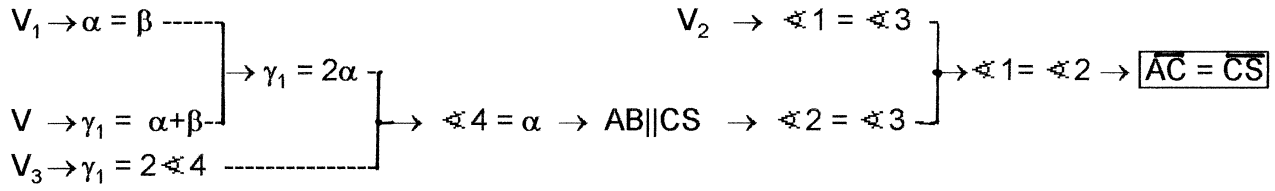


- Aufgabentext lesen! Unklare Begriffe?
- Planfigur zeichnen; vorgegebene Bezeichnungen eintragen! [A, B, C, S] .
  - Weitere günstige Bezeichnungen? [P ; u.U. auch α, β, γ_1] .
  - Lassen sich der genau gezeichneten Figur einige Vermutungen entnehmen? [AB||CS ; u.U. auch Vermutungen über Gleichheit von oder Beziehungen zwischen Winkeln] .
- Vor. und Beh. festhalten!
  - auch in der Planfigur festhalten!
- Suche nach einem Lösungsweg!
  - Mit welcher Frage willst du beginnen?
- Woraus ließe sich die Behauptung unmittelbar ableiten? Begründung!
  - Weitere günstige Bezeichnungen? [$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$; Umkehrung Basiswinkelsatz] .
- Woraus ließe sich $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ableiten? Begründung!
  - Brauchbares Hilfsmittel? [Um die Gleichheit zweier Winkel abzuleiten, hilft oft der Satz "Sind zwei Winkel einem dritten gleich, dann sind sie auch untereinander gleich" ! Ich suche nach einem $\sphericalangle 3$, der diese Eigenschaft besitzt] .



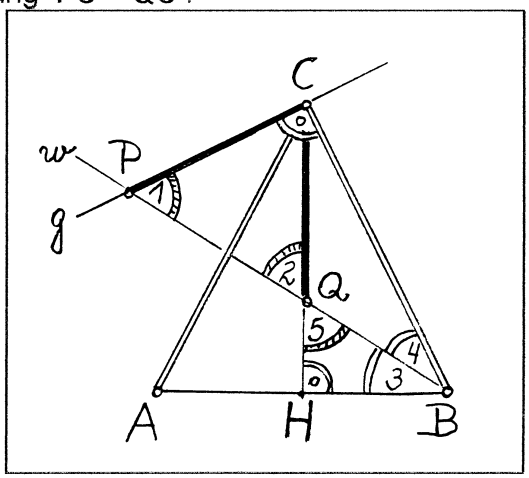
- Woraus ließe sich also $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ableiten? [$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ laut V_2 ; $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$] .
- Woraus ließe sich $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ ableiten? Begründung! [AB||CS ; Umkehrung Wechselwinkelsatz] .
  - Brauchbare Beweismittel? Sätze mit gleichartiger Behauptung? [Umkehrung von Stufen- oder Wechselwinkelsatz; Parallelogrammeigenschaft hier kaum hilfreich] .
- Woraus ließe sich AB||CS ableiten? Begründung!
  1. Lösungsweg: Aus $\sphericalangle 4 = \alpha$ m.H. Umkehrung Stufenwinkelsatz .
  2. Lösungsweg: Aus $\sphericalangle 5 = \beta$ m.H. Umkehrung Wechselwinkelsatz .
- Was läßt sich aus den Voraussetzungen unmittelbar ableiten? Begründung!
  - Beachte die zu erreichenden Teilziele! [$\alpha = \beta$; Basiswinkelsatz / $\gamma_1 = \alpha + \beta$; Außenwinkelsatz / $\gamma_1 = 2 \cdot \sphericalangle 4 = 2 \cdot \alpha$; Winkelhalbierende] .
- Was läßt sich hieraus ableiten? Begründung! [$\sphericalangle 4 = \alpha$ bzw. $\sphericalangle 5 = \beta$ durch Umformen]

Damit ist folgender Lösungsplan gefunden:

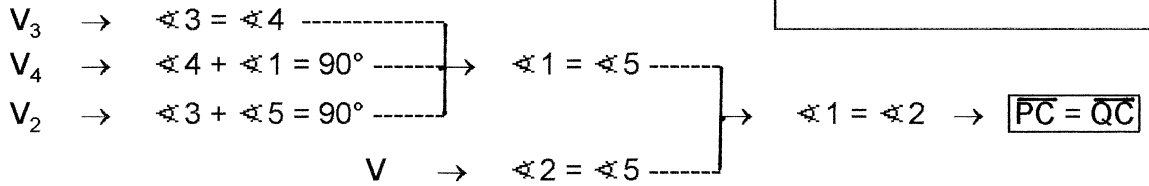


Dabei wurde die mit "V" bezeichnete Voraussetzung, daß $\sphericalangle PBC = \gamma_1$ Außenwinkel des Dreiecks ABC ist, nicht explizit festgehalten, sondern nur der Figur entnommen.

Aufgabe 7):
Von der Zeichnung ausgehend gelangt man zur Vermutung $\overline{PC} = \overline{QC}$.
Beim Formulieren der Voraussetzungen wurden die Lagebeziehungen von P und Q der Figur entnommen.
Bei der Suche nach einem Lösungsweg ist es günstig, den 1.Schritt durch RA , den Rest durch VA zurückzulegen.



V_1: $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB < 90°$;
V_2: $\sphericalangle BHC = 90°$ $(= \sphericalangle BHQ)$;
V_3: $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC$ $(= \sphericalangle HBQ)$;
V_4: $\sphericalangle PCB = 90°$;
Beh.: $\overline{PC} = \overline{QC}$.

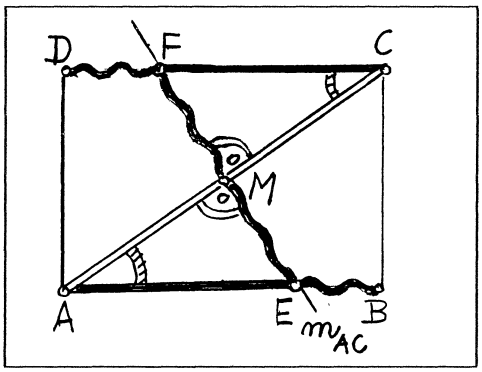


Es ist auch möglich, im 2.Schritt die Hilfsmittelfrage beim RA zu stellen, um über das Hilfsmittel "Drittengleichheit" zu $\sphericalangle 5$ zu gelangen.

Beim *Rückblick* wird man untersuchen lassen, ob tatsächlich alle Voraussetzungen für den Beweis benötigt werden.
Die Schüler sollen erkennen, daß V_1 eine "überflüssige" Voraussetzung ist und anhand weiterer Planfiguren nachprüfen, daß der Beweis auch für den Fall gilt, daß ABC nicht gleichschenklig oder nicht spitzwinklig ist.
Man kann den Schülern mitteilen, daß man den durch Weglassen von V_1 erhaltenen Satz eine *Verallgemeinerung* des Ausgangssatzes nennt.

Nach Behandlung dieser sieben Aufgaben kann man die systematische Einführung des VA und RA bei geometrischen Beweisaufgaben beenden und sollte beim Behandeln weiterer Aufgaben starken Wert auf die Erhöhung der Selbsttätigkeit der Schüler beim Suchen nach einem Beweisweg und auf die Beachtung der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Schüler durch innere Differenzierung legen.

Aufgabe 8):

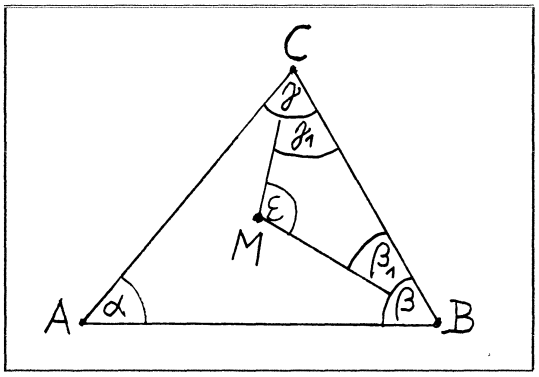


Leistungsstarke Schüler werden die Vermutungen

$\overline{EM} = \overline{FM}$, $\overline{AE} = \overline{CF}$, $\overline{BE} = \overline{DF}$

durch VA ableiten, leistungsschwachen Schülern können die Hilfsmittelfrage und die Teilzielfrage beim RA weiterhelfen.

Leistungsstarke Schüler sollten erkennen, daß die Voraussetzung $EF \perp AC$ überflüssig ist, und daß man nur zu verlangen braucht, daß EF eine durch den Mittelpunkt M von $\overline{AC}$ gehende Gerade ist.



Bei *Aufgabe 9)* kann man den Auftrag geben, durch systematisches VA bzw. RA möglichst viele Beweise zu finden und beim "Rückblick" auch zu untersuchen, ob man diesen Satz umkehren oder durch Abschwächen der Voraussetzung verallgemeinern kann. Dabei werde dann vorausgesetzt, daß M auf derselben Seite von BC liegt wie A .

Vor.: M liegt im Inneren von $\triangle ABC$;

Beh.: $\sphericalangle BMC > \sphericalangle BAC$ bzw. $\varepsilon > \alpha$.

1.Lösungsweg:

Die VA-Hilfsmittelfrage führt über den Innenwinkelsatz als Hilfsmittel zu den Hilfsgrößen β , γ, β_1, γ_1 .

$\triangle ABC$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ ------

$\triangle MBC$: $\varepsilon + \beta_1 + \gamma_1 = 180°$ ----

$\rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \varepsilon + \beta_1 + \gamma_1$ ----

Es gilt $\beta > \beta_1$ ----

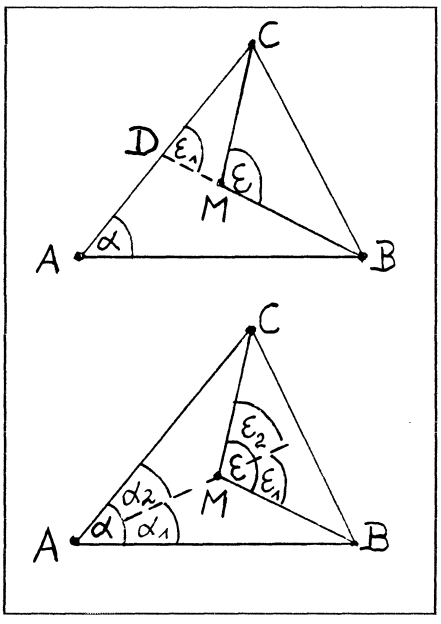
Es gilt $\gamma > \gamma_1$ ----

$\rightarrow \beta + \gamma > \beta_1 + \gamma_1$ ----

$\rightarrow \boxed{\alpha < \varepsilon}$

2.Lösungsweg:

Die RA-Hilfsmittelfrage führt zum kleinen Außenwinkelsatz. Damit ε als Außenwinkel erscheint, kann man etwa $\overline{BM}$ über M hinaus verlängern und so zum Hilfsdreieck DMC mit dem Innenwinkel ε_1 gelangen, woraus dann $\varepsilon > \varepsilon_1$ folgt. Da ε_1 Außenwinkel von Dreieck ABD ist, gilt $\varepsilon_1 > \alpha$. Damit ist man am Ziel.

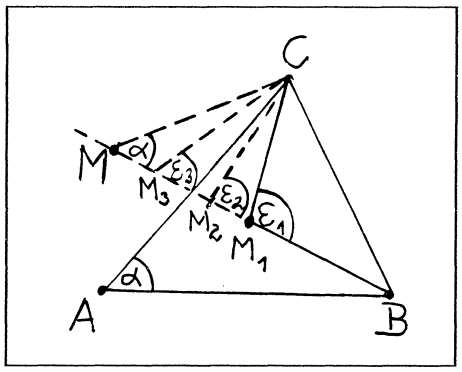


3.Lösungsweg:

Um den kleinen Außenwinkelsatz als Hilfsmittel einsetzen zu können, kann man auch $\overline{AM}$ über M hinaus verlängern und die Winkel ε_1, ε_2, α_1, α_2 betrachten. Wegen $\varepsilon_1 > \alpha_1$, $\varepsilon_2 > \alpha_2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$ und $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ kommt man auch so ans Ziel.

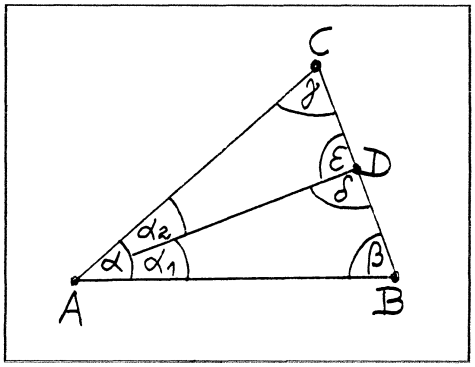
Bei einer Einschätzung der drei Lösungswege wird man wohl dem zweiten den Vorzug geben. Er ist nicht nur besonders

kurz, sondern der dort gezeichneten Figur ist außerdem zu entnehmen, daß auch dann noch $\varepsilon > \alpha$ gilt, wenn M auf der Seite $\overline{AC}$ (oder $\overline{AB}$) des Dreiecks ABC, also nicht unbedingt in seinem Inneren liegt.
Läßt man M auf einem von B ausgehenden Strahl wandern (vgl. Figur), dann wird der zugehörige Winkel ε immer kleiner.
Also muß es für M (und zwar außerhalb des Dreiecks) eine Lage geben, für die $\sphericalangle BMC = \varepsilon = \alpha$ wird.
In Klasse 8 wird diese Aufgabe wieder gestellt werden, wobei die Schüler dann außerdem noch den geometrischen Ort aller M zu ermitteln haben, für die $\sphericalangle BMC = \alpha$, $\sphericalangle BMC < \alpha$ bzw. $\sphericalangle BMC > \alpha$ gilt.
In Klasse 6 wird lediglich festgehalten, daß die Umkehrung unseres Satzes eine falsche Aussage ist, weil man Punkte außerhalb des Dreiecks ABC angeben kann, für die $\varepsilon > \alpha$ gilt.



Bei *Aufgabe 10)* kann folgende allgemeine Hilfsmittelfrage helfen:

- Welche Hilfsmittel (Sätze, Definitionen, Formeln o.ä.) könnten nützlich sein?
  - Beachte Voraussetzung und Behauptung; betrachte die Planfigur



Hier kann diese Hilfsmittelfrage zum Innenwinkelsatz als Hilfsmittel und damit ans Ziel führen.

Vor.: $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$;

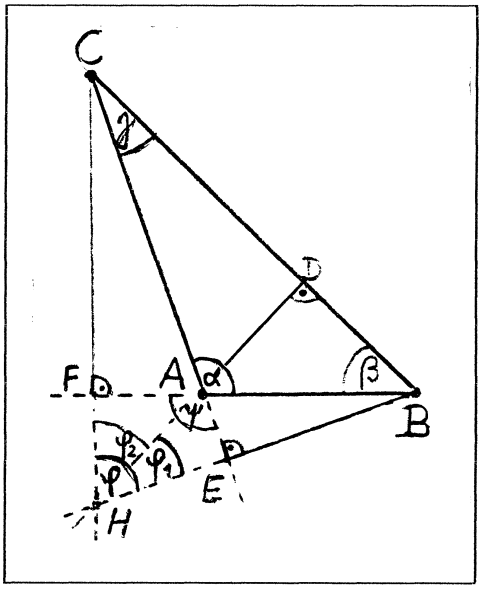
Beh.: $\delta - \varepsilon = \gamma - \beta$.

Vor. $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \delta = 180°$

Vor. $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\alpha + \gamma + \varepsilon = 180°$

$\rightarrow \beta + \delta = \gamma + \varepsilon \rightarrow$ Beh.

Aufgabe 11) :
Nach dem Einführen günstiger Bezeichnungen (etwa β, γ, φ, φ_1, φ_2) kann man beim Betrachten der Behauptung $\varphi = \beta + \gamma$ durch RA zu den hinreichenden Teilzielen $\varphi_2 = \beta$ und $\varphi_1 = \gamma$ gelangen, die man dann durch VA erreichen kann (man vergleiche die Winkel der Dreiecke HBD und EBC bzw. der Dreiecke HBD und EBC).
Man könnte von den genannten Teilzielen ausgehend auch durch die RA-Hilfsmittelfrage zu dem (im Unterricht meist nicht behandelten) Satz gelangen, daß Winkel mit paarweise orthogonalen Schenkeln gleich sind, was dann sofort zum Ziel führt.



Ein *2.Lösungsweg* kann durch Betrachten des Vierecks HEAF mit den Winkeln φ, ψ und den beiden rechten Winkeln bei E und F gefunden werden. Wegen $\psi = \alpha$

gilt dann $\varphi + \alpha = 180°$, woraus man dann wegen $(\beta + \gamma) + \alpha = 180°$ die Behauptung ableiten kann.

Aufgabe 12) ist analog zu Aufgabe 5), man wird sie daher auf jeden Fall selbständig lösen lassen. Leistungsstarke Schüler sollten nach wahren Umkehrungen dieses Satzes und nach zugehörigen Beweisen suchen. Hier liegt einer der Fälle vor, daß ein Satz zwei wahre Umkehrungen besitzt.

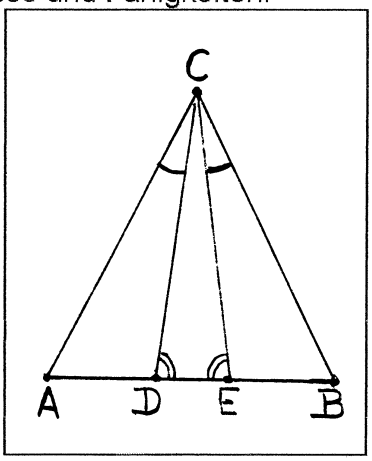
Sei ABC ein Dreieck und E ein Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AC}$ über C hinaus. Dann gilt:

(S) *Wenn* $\overline{CD}$ Winkelhalbierende von $\triangle ABC$ *und* $BE \| CD$, *dann* $\overline{BC} = \overline{EC}$.

(U_1) *Wenn* $\overline{BC} = \overline{EC}$ *und* $BE \| CD$, *dann* ist $\overline{CD}$ Winkelhalbierende von $\triangle ABC$.

(U_2) *Wenn* $\overline{CD}$ Winkelhalbierende von $\triangle ABC$ *und* $\overline{BC} = \overline{EC}$, *dann* $BE \| CD$.

Recht anspruchsvoll ist *Aufgabe 13)* , deren vollständige Lösung wohl nur sehr leistungsstarken Schülern selbständig gelingen wird. Bei gemeinsamer Behandlung ermöglicht diese Aufgabe jedoch die Wiederholung und Übung vieler vermittelter Kentnisse und Fähigkeiten.
Eine sehr starke Hilfestellung besteht darin, eine zweckmäßige Formulierung der Sätze in Form einer Zeichenreihe vorzugeben und anzugeben, welche gemeinsamen Voraussetzungen dem Satz und seinen Umkehrungen vorangestellt werden sollen. Das Formulieren dieser Umkehrungen und das Ermitteln ihrer Wahrheitswerte ist dann relativ leicht, und auch das Finden von Beweisen für die wahren Umkehrungen stellt keine Überforderung dar. Die Problematik des Zusammenfassens zu "Genau-dann-wenn-Sätzen" wird man nur in leistungsstarken AGn besprechen.



Der Satz aus *Aufgabe 1)* besitzt zwei Voraussetzungen und zwei wahre Umkehrungen. Als gemeinsame Voraussetzung für Satz und Umkehrung wird $D \in \overline{AE}$ und $E \in \overline{DB}$ gewählt, was die gegenseitige Lage der Punkte A, D, E und B festlegt. Dann lassen sich Satz und Umkehrung wie folgt formulieren:

(S) $\overline{AC} = \overline{BC} \quad \wedge \quad \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CED$ (W)

(U_1) $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED \quad \wedge \quad \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \overline{BC}$ (W)

(U_2) $\overline{AC} = \overline{BC} \quad \wedge \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CED \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$ (W)

Aus diesen drei wahren Aussagen lassen sich folgende drei wahren "Genau-dann-wenn-Aussagen" als Zusammenfassungen bilden:

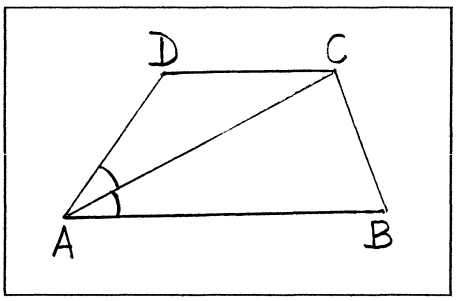
(Z_1) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE \quad \Rightarrow \quad [\, \overline{AC} = \overline{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CED\,]$ (W)

(Z_2) $\overline{AC} = \overline{BC} \quad \Rightarrow \quad [\, \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle CDE = \sphericalangle CED\,]$ (W)

(Z_3) $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CED \quad \Rightarrow \quad [\, \overline{AC} = \overline{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE\,]$ (W)

Die Beweise für (U_1) und (U_2) sind leicht durch VA zu finden. Als Hilfsmittel werden der Basiswinkelsatz, seine Umkehrung und der Außenwinkelsatz benötigt. Auf "Kongruenz" als Beweismittel kann man verzichten, aber auch derartige umständliche Beweise müssen als korrekt angesehen werden.

Die Verallgemeinerung des Satzes aus *Aufgabe 2)* besitzt ebenfalls zwei wahre Umkehrungen. Wenn man voraussetzt, daß C im Inneren des Winkelraums von $\sphericalangle BAD$ liegt, dann kann man die Aussagen wie folgt festhalten:

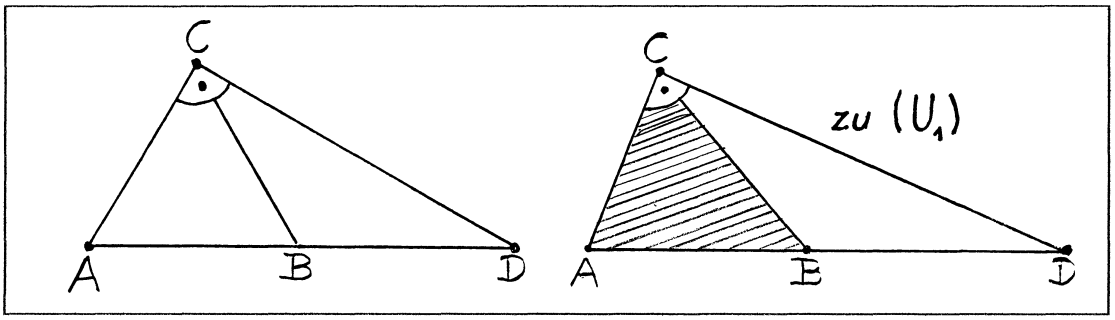


(S) $AB \| CD \wedge \overline{AD} = \overline{DC} \Rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ (W)
(U_1) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD \wedge \overline{AD} = \overline{DC} \Rightarrow AB \| CD$ (W)
(U_2) $AB \| CD \wedge \sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD \Rightarrow \overline{AD} = \overline{DC}$ (W)

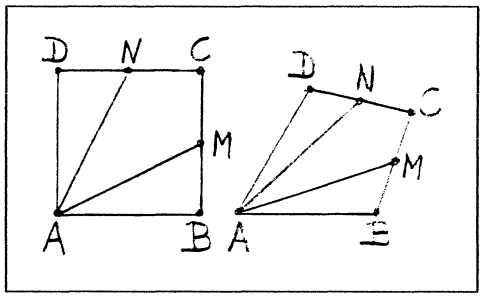
Die Beweise von (U_1) und (U_2) sind nicht schwer zu finden. Als Hilfsmittel werden der Basiswinkelsatz, der Wechselwinkelsatz und dessen Umkehrung verwendet. Die Zusammenfassung zu Genau-dann-wenn-Sätzen erfolgt wie oben angegeben.

Der Satz aus *Aufgabe 3)* besitzt nur eine wahre Umkehrung. Daß (U_1) eine falsche Aussage ist, zeigt ein Dreieck ABC mit $\sphericalangle BAC \neq 60°$ als Gegenbeispiel. Daß (U_2) eine wahre Aussage ist, läßt sich mit Hilfe von Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks, Winkeladdition, dem Außenwinkelsatz und der Umkehrung des Basiswinkelsatzes zeigen.
Wählt man $B \in \overrightarrow{AD}$ als gemeinsame Voraussetzung, dann gilt:

(S) $\triangle ABC$ ist gleichseitig $\wedge \overline{BD} = \overline{BC} \Rightarrow \sphericalangle ACD = 90°$ (W)
(U_1) $\sphericalangle ACD = 90° \wedge \overline{BD} = \overline{BC} \Rightarrow \triangle ABC$ ist gleichseitig (F)
(U_2) $\triangle ABC$ ist gleichseitig $\wedge \sphericalangle ACD = 90° \Rightarrow \overline{BD} = \overline{BC}$ (W)
(Z_2) $\triangle ABC$ ist gleichseitig $\Rightarrow [\, \overline{BD} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sphericalangle ACD = 90° \,]$ (W)



Der in *Aufgabe 4)* bewiesene Satz besitzt drei Voraussetzungen, von denen zwei Voraussetzungen "analog" sind.
Die Falschheit von (U_1) läßt sich durch ein Drachenviereck als Gegenbeispiel nachweisen.
Die voneinander nicht wesentlich verschiedenen Aussagen (U_2) und (U_3) sind wahr, wie sich unschwer nachweisen läßt.



Wählt man $M \in \overline{BC}$ und $N \in \overline{CD}$ als gemeinsame Voraussetzung, dann gilt:

(S): ABCD ist ein Quadrat $\wedge \overline{BM} = \overline{MC} \wedge \overline{CN} = \overline{ND} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{AN}$ (W)
(U_1): $\overline{AM} = \overline{AN} \wedge \overline{BM} = \overline{MC} \wedge \overline{CN} = \overline{ND} \Rightarrow$ ABCD ist ein Quadrat (F)
(U_2): ABCD ist ein Quadrat $\wedge \overline{AM} = \overline{AN} \wedge \overline{CN} = \overline{ND} \Rightarrow \overline{BM} = \overline{MC}$ (W)

(U_3): ABCD ist ein Quadrat $\wedge$ $\overline{BM} = \overline{MC}$ $\wedge$ $\overline{AM} = \overline{AN}$ $\Rightarrow$ $\overline{CN} = \overline{ND}$ (W)

(Z_3): ABCD ist ein Quadrat $\wedge$ $\overline{BM} = \overline{MC}$ $\Rightarrow$ [$\overline{CN} = \overline{ND} \Leftrightarrow$ $\overline{AM} = \overline{AN}$] (W)

Der in *Aufgabe 5)* bewiesene Satz besitzt zwei wahre Umkehrungen, die sich mit Hilfe des Basiswinkelsatzes, des Außenwinkelsatzes, des Wechselwinkelsatzes und der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes beweisen lassen.
Wählt man $D \in AC$ und $B \in AE$ als gemeinsame Voraussetzungen, dann gilt:

(S): $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBA$ $\wedge$ DB||CE $\Rightarrow$ $\overline{BC} = \overline{BE}$ (W)

(U_1): $\overline{BC} = \overline{BE}$ $\wedge$ DB||CE $\Rightarrow$ $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBA$ (W)

(U_2): $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DBA$ $\wedge$ $\overline{BC} = \overline{BE}$ $\Rightarrow$ DB||CE (W)

Hieraus lassen sich wie beschrieben die drei wahren Aussagen (Z_1), (Z_2), (Z_3) bilden.

Der in *Aufgabe 6)* bewiesene Satz hat drei Voraussetzungen und besitzt drei wahre Umkehrungen, zu deren Beweis man den Basiswinkelsatz, die Umkehrung des Basiswinkelsatzes, den Wechselwinkelsatz nebst Umkehrung, den Stufenwinkelsatz und den Außenwinkelsatz benötigt.
Setzt man voraus, daß S im Inneren des Winkelraums von $\sphericalangle BAC$ liegt und daß $C \in \overrightarrow{AX}$ gilt, dann kann man den Satz und seine Umkehrungen wie folgt formulieren:

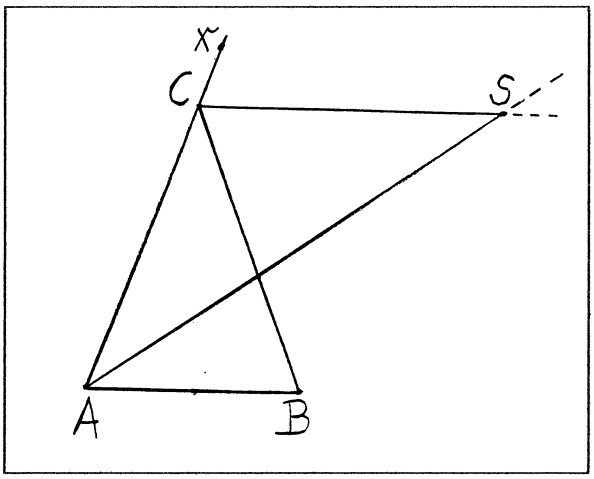
(S): $\overline{AC} = \overline{BC}$ $\wedge$ $\sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC$ $\wedge$ $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SCX$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} = \overline{CS}$ (W)

(U_1): $\overline{AC} = \overline{CS}$ $\wedge$ $\sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC$ $\wedge$ $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SCX$ $\Rightarrow$ $\overline{AC} = \overline{BC}$ (W)

(U_2): $\overline{AC} = \overline{BC}$ $\wedge$ $\overline{AC} = \overline{CS}$ $\wedge$ $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SCX$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC$ (W)

(U_3): $\overline{AC} = \overline{BC}$ $\wedge$ $\sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC$ $\wedge$ $\overline{AC} = \overline{CS}$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle BCS = \sphericalangle SCX$ (W)

Das Bilden von Genau-dann-wenn-Sätzen als Zusammenfassung von Satz und wahrer Umkehrung wird hier etwas komplizierter.
Besitzt ein Satz (S) die Gestalt $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B$ und sind seine Umkehrungen (U_1), (U_2), (U_3) sämtlich wahre Aussgen, dann lassen sich insgesamt 6 derartige untereinander verschiedene Zusammenfassungen bilden.
Spaltet man jeden dieser Genau-dann-wenn-Sätze in zwei Wenn-dann-Sätze auf, dann entstehen insgesamt 12 derartige Wenn-dann-Aussagen, unter denen es jedoch nur 4 voneinander verschiedene Aussagen gibt, nämlich die Aussagen (S), (U_1), (U_2) und (U_3).



Die 6 voneinander verschiedenen Genau-dann-wenn-Aussagen haben folgende logische Struktur:

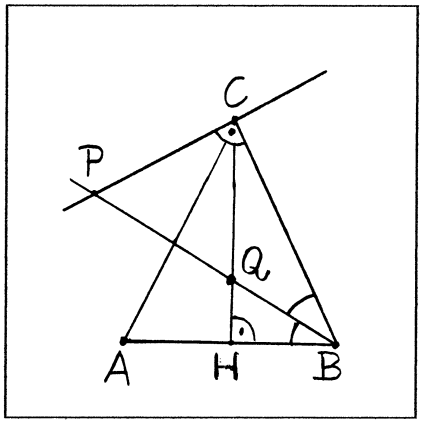
(Z_1): $V_2 \wedge V_3 \Rightarrow [V_1 \Leftrightarrow B]$; (Z_4): $B \wedge V_3 \Rightarrow [V_1 \Leftrightarrow V_2]$;

(Z_2): $V_1 \wedge V_3 \Rightarrow [V_2 \Leftrightarrow B]$; (Z_5): $B \wedge V_2 \Rightarrow [V_1 \Leftrightarrow V_3]$;

(Z_3): $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow [V_3 \Leftrightarrow B]$; (Z_6): $B \wedge V_1 \Rightarrow [V_2 \Leftrightarrow V_3]$.

Von dem in *Aufgabe 7)* bewiesenen Satz betrachten wir die gefundene Verallgemeinerung. Wenn sich herausstellt, daß die Voraussetzungen $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\sphericalangle ACB = 90°$ überflüssig sind, dann existiert sicher keine wahre Umkehrung des Satzes, die eine dieser Voraussetzun-

gen als Behauptung besitzt. Die mit (S) bezeichnete Verallgemeinerung besitzt drei Voraussetzungen, und alle drei Umkehrungen (U_1), (U_2) und (U_3) erweisen sich als wahre Aussagen.



Wie eben gezeigt, gibt es also auch hier sechs verschiedene Genau-dann-wenn-Sätze als Zusammenfassung von Satz und wahrer Umkehrung.

Als gemeinsame Voraussetzung für alle diese Sätze gelte $H \in \overline{AB}$, P liege im Inneren des Winkelraums von $\sphericalangle ABC$ und $HC \cap PB = \{Q\}$.

Aus diesen Voraussetzungen läßt sich $\sphericalangle PCQ < 90°$ ableiten, was bei der (erfolglosen) Suche nach Gegenbeispielen zum Nachweis der Falschheit einer Umkehrung zu berücksichtigen ist.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

(S): $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA \wedge \sphericalangle PCB = 90° \wedge \sphericalangle BHQ = 90° \Rightarrow \overline{PC} = \overline{QC}$ (W)

(U_1) $\overline{PC} = \overline{QC} \wedge \sphericalangle PCB = 90° \wedge \sphericalangle BHQ = 90° \Rightarrow \sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA$ (W)

(U_2): $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA \wedge \overline{PC} = \overline{QC} \wedge \sphericalangle BHQ = 90° \Rightarrow \sphericalangle PCB = 90°$ (W)

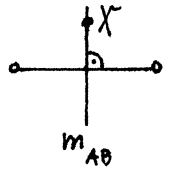
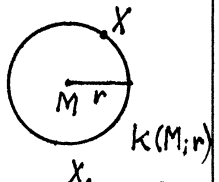
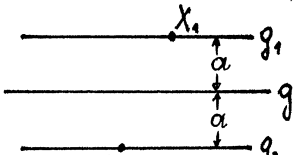
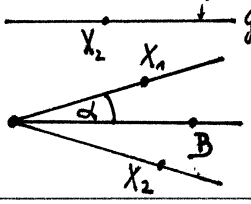
(U_3): $\sphericalangle CBP = \sphericalangle PBA \wedge \sphericalangle PCB = 90° \wedge \overline{PC} = \overline{QC} \Rightarrow \sphericalangle BHQ = 90°$ (W)

3.9.4. Geometrische Konstruktionsaufgaben

Ziele:
- Informativ gestaltete Figuren zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsweg.
- Methode der geometrischen Örter (als Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen).
- Methode der Hilfselemente (als VA und RA).
- Darstellen von Konstruktionsbeschreibungen in Kurzform (Verwenden mengentheoretischer Bezeichnungen).
- Einzigkeits- und Existenznachweis bei Orts- und bei Konstruktionsaufgaben (Formulieren der entsprechenden Sätze).
- Anzahl verschiedener Lösungen bei Dreieckskonstruktionen aus Seiten oder Winkel.
- Parameterhaltige Aufgaben.
- Überbestimmte und unterbestimmte Aufgaben.
- Geometrische Örter als Erfüllungsmengen.

Will man dem Lehrplan nicht vorgreifen, dann muß man die Konstruktionsaufgaben als letzte Aufgabengruppe behandeln. Um hierbei einen gewissen Abschluß erreichen zu können, sollte man hierbei auf das Behandeln vermischter Aufgaben in diesen Zirkeln verzichten und die letzten drei Zirkel des Schuljahrs voll diesem Thema widmen. Da das Behandeln von geometrischen Konstruktionsaufgaben unter der beschriebenen Zielstellung erfahrungsgemäß große didaktische Schwierigkeiten bereitet, wollen wir am Ende dieses Abschnitts ausnahmsweise einen konkreten Vorschlag unterbreiten, wie der Inhalt dieser drei Zirkel geplant werden kann und was besonders zu berücksichtigen ist. Dabei werden wir davon ausgehen, daß es sich um keine AG mit überdurchschnittlicher Leistungsfähigkeit handelt.

Man wird mit einer Wiederholung von "Aussageform - Erfüllungsmenge" aus Abschnitt 3.5. sowie von "Einzigkeitsnachweis - Existenznachweis" aus den Abschnitten 3.3. und 3.4. beginnen, wobei die Seiten 8, 32 und 36 der Aufgabensammlung genutzt werden sollten. Es geht dabei vor allem um die Einführung des Begriffs "geometrischer Ort" als Erfüllungsmenge einer Bedingung für Punkte, um das Festhalten einiger geometrischer Örter sowie um das Formulieren der entsprechenden Sätze, durch die ein geometrischer Ort (z.B. "Mittelsenkrechte") charakterisiert wird. Das Ergebnis kann wie folgt festgehalten werden:

Aussageform	Erfüllungsmenge
$x \mid 15$; $x \in \mathbb{N}$	$\{1, 3, 5, 15\}$
$x = x + 1$; $x \in \mathbb{Q}_+$	$\emptyset$
Bedingung für $X \in$ { Punkt der Ebene }	geometrischer Ort
$\overline{AX} = \overline{BX}$	m_{AB} 
$\overline{MX} = r$	$k(M;r)$ 
X hat von g den Abstand a ($a = d(X;g)$)	Parallelenpaar $(g_1;g_2)$ 
$\sphericalangle BAX = \alpha$	freier Schenkel von α 

Von der häufig im Unterricht verwendeten Formulierung "Es soll ein Dreieck ABC konstruiert werden, von dem die Seite c , die Höhe h_c und der Winkel α gegeben sind" sollte man abweichen. Um die Zugehörigkeit von Konstruktionsaufgaben zu dem auf Seite 32 der Aufgabensammlung charakterisierten Typ von Bestimmungsaufgaben hervorzuheben, wollen wir stets folgendermaßen formulieren:
"Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC , die folgende Bedingungen erfüllen: $\overline{AB} = c$; ..... " .

Den Schülern sollten die Gemeinsamkeiten zwischen zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben, Gleichungen oder Ungleichungen, geometrischen Orts- und Konstruktionsaufgaben sowie gewissen logisch-kombinatorischen Aufgaben bewußtgemacht werden.
Da es bei diesen Aufgaben stets um das Ermitteln der Erfüllungsmenge von einer oder mehreren Aussageformen mit einer oder mehreren Variablen geht, sind stets ein *Einzigkeitsnachweis* und ein *Existenznachweis* erforderlich.
Konstruktionsaufgaben weisen diesbezüglich eine einzige Besonderheit auf: An die Stelle der Angabe der gesuchten Erfüllungsmenge tritt hier die Angabe einer Konstruktionsbeschreibung, d.h. eines Algorithmus, der alle gesuchten Lösungen und auch nur diese Lösungen liefert.
In der AG Klasse 6 sollte der Schwerpunkt auf dem Finden und Formulieren der Konstruktionsbeschreibung liegen. Die dann noch zu beweisenden Sätze wird man zwar stets mit nennen lassen, auf ihren Beweis wird man dagegen in der Regel verzichten.

Im Zusammenhang mit *Aufgabe 1)* und *Aufgabe 2)* wird man erläutern, daß man (nicht aus zwingenden logischen, sondern aus rein historischen Gründen) in der klassischen Geometrie als Konstruktionsgeräte nur Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) zuläßt, daß es auch noch andere Konstruktionsgeräte (etwa den Ellipsenzirkel) gibt und daß alle im Unterricht üblichen Konstruktionen unter Verwendung eines Dreiecks auch allein mit Zirkel und Lineal ausführbar sind.

Bei *Aufgabe 1)* wird das Lineal nur dazu verwendet, die Schenkel der Winkel zu zeichnen. Mit Hilfe eines Zirkels ist es dann möglich, Winkel zu halbieren, zu verdoppeln und abzutragen. Ferner lassen sich 90°-Winkel, 45°-Winkel und 60°-Winkel besonders einfach konstruieren. Man wird die Schüler auffordern, möglichst viele verschiedene Lösungswege zu suchen. Die *VA-Teilzielfrage* lautet hier: "Welche Winkel lassen sich aus dem gegebenen Winkel unmittelbar konstruieren?"
Da man von einem 36°-Winkel ausgehend durch Halbieren einen 18°-Winkel und dann einen 9°-Winkel sowie durch Verdoppeln einen 72°-Winkel konstruieren kann, hat man wegen
$99° = 9° + 90° = 11 \cdot 9° = 36° + 45° + 18° = 9° + 18° + 72°$ bereits vier verschiedene Lösungswege gefunden.

Auch bei *Aufgabe 2)* sollte man die *VA-Teilzielfrage* stellen.
Von zwei Strecken mit der Länge s bzw. d ausgehend kann man (falls $s > d$) durch Strekkenabtragung zu einer Strecke der Länge $s + d = (a + b) - (a - b) = 2a$ sowie zu einer Strecke mit der Länge $s - d = (a + b) - (a - b) = 2b$ gelangen, woraus man dann durch Halbieren der so gewonnenen Strecken zu Strecken mit den gesuchten Längen gelangt.
Die didaktische Schwierigkeit besteht darin, durch die geometrische Interpretation ein Rechnen mit Klammern, vor denen ein Minus steht, zu umgehen.

Bei *Aufgabe 3)* sollten die Schüler zunächst jeder für sich versuchen, die Lösung zu finden. Dabei ist es günstig, wenn einige Schüler nur eine der beiden Lösungen finden, da dies ein gutes Motiv liefert, die Methode der geometrischen Örter einzuführen, bei deren gewissenhafter Befolgung derartige Fehler nicht eintreten können.

Bei dieser Aufgabe sollte der AG-Leiter die Haupt- und Nebenimpulse selbst formulieren, die Schüler geben zunächst nur die Antworten. Dabei werden die Schüler aufgefordert, sich diese Impulse recht rasch einzuprägen, so daß schon bei der nächsten Konstruktionsaufgabe die leistungsstärksten Schüler aufgefordert werden, die entsprechendn Fragen selbst zu stellen. Die Schüler arbeiten nur im Heft, das Anfertigen und Ergänzen einer informativ gestalteten Figur führt der AG-Lehrer an der Wandtafel vor.

Die *Methode der geometrischen Örter* wird durch folgende Impulse charakterisert:

- Was ist gesucht?
- Gegebene Bedingungen?

- Günstige Veranschaulichung?
  - ◦ Planfigur, in der das Gegebene "grün" festgehalten wird!

- Mit welchem Bestimmungsstück will ich beginnen?
  - ◦ Eine Strecke ist hierfür stets günstiger als ein Winkel!
- Welche Punkte sind dann gegeben?
- Welche Punkte sind dann gesucht?

- Kenne ich 2 g.Ö. für den gesuchten Punkt?
  - ◦ Kenne ich 2 Bedingungen für C ?

    Welche g.Ö. gehören zu diesen Bedingungen?
- Ich bilde den Durchschnitt der beiden g.Ö. und erhalte so die gesuchten Punkte.
  - ◦ Liefern alle so gefundenen Punkte untereinander nicht kongruente Lösungen?
- Ich formuliere die Konstruktionsbeschreibung und fertige eine Konstruktionszeichnung an.

Ges.: Dreiecke ABC ;

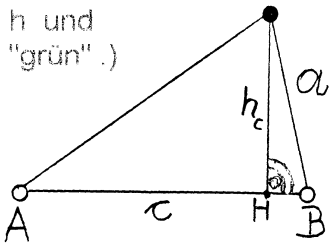
Geg.: (a) $\overline{AB} = c = 6$ cm ;

(b) $\overline{BC} = a = 4$ cm ;

(c) $\overline{CH} = h = 3$ cm ;

(d) $\overline{CH}$ ist Höhe in $\triangle ABC$.

(Ich schreibe a, c, h und $\sphericalangle$ in der Planfigur "grün" .)



Wenn ich mit $\overline{AB} = c$ beginne, dann sind die Punkte A und B gegeben (ich zeichne ○ "grün"), und es ist Punkt C gesucht, (ich zeichne ● "rot").

Bedingung (für C)	geometrischer Ort
I) $\overline{BC} = a$	k(B;a)
II) $\overline{CH} = h$	Parallelenpaar $(g;g_1)$ zu AB im Abstand h

$k(B;a) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$

Da offensichtlich $\triangle ABC_1 \cong \triangle ABC_4$ und $\triangle ABC_2 \cong \triangle ABC_3$, gibt es (für die gegebenen Größen) nur zwei verschiedene Lösungen

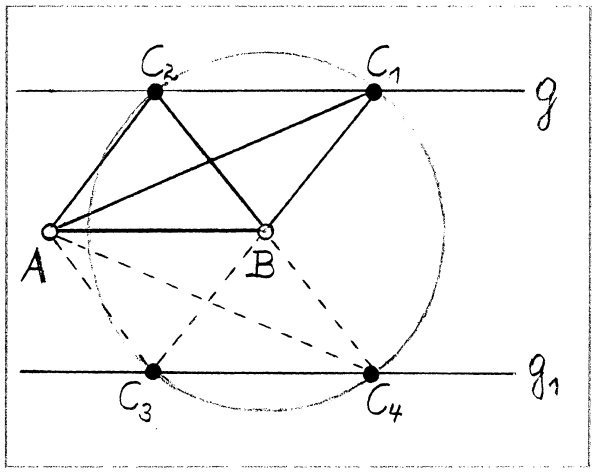
K o n s t r u k t i o n s b e s c h r e i b u n g (Kurzform):

(1) $\overline{AB} = c = 6$ cm ;

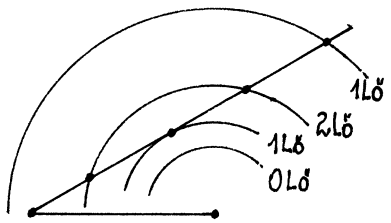
(2) Parallelenpaar $(g;g_1)$ zu AB im Abstand h = 3 cm ;

(3) $k(B; a=4cm) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$.

$\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ sind die Lösungen unserer Aufgabe.



Es ist sehr wichtig, daß die Schüler die schriftlich in Kurzform festgehaltene Konstruktionsbeschreibung mündlich ausführlich in der Wortsprache formulieren! Dabei ist auch festzustellen (und gegebenenfalls zu begründen), ob die einzelnen Konstruktionsschritte eindeutig ausführbar sind.
Schritt (1) und Schritt (2) sind bei unserer Aufgabe stets eindeutig ausführbar, in Schritt (3) entstehen bei den gegebenen Daten 4 Schnittpunkte. Bei anders gewählten Daten könnten auch 2 Berührungspunkte oder kein Schnittpunkt auftreten.
Solche Überlegungen liefern ein Motiv, die einfachsten Konstruktionsaufgaben (bei denen nur Seiten oder Winkel gegeben sind) daraufhin zu untersuchen, wieviel verschiedene Lösungen entstehen können und wovon dies abhängt.
Das Resultat dieser Überlegungen wird in einer Tabelle festgehalten:

Typ	Anzahl der Lösungen	Bedingungen (es gelte stets $s > 0$ und $0° < w < 180°$)
sws	1	keine
sss	1 0	Dreiecksungleichungen sind erfüllt; Dreiecksungleichungen sind nicht erfüllt.
www	beliebig viele 0	$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ $\alpha + \beta + \gamma \neq 180°$
wsw	1 0	$w_1 + w_2 < 180°$; $w_1 + w_2 \geq 180°$.
ssw	2 1 0 (vgl. Figur)	

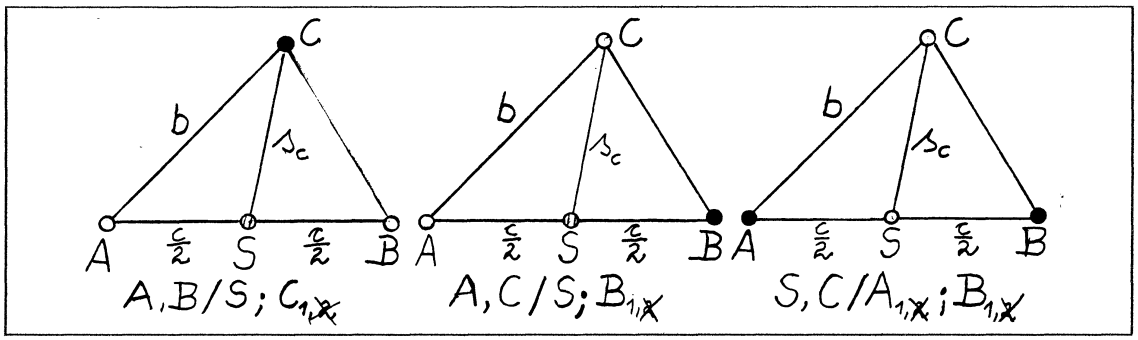
Bei *Aufgabe 4)* beginnt man günstigerweise mit $\overline{BC} = a$ und gelangt mit Hilfe der Methode der geometrischen Örter zu zwei verschiedenen Lösungen.

Bei *Aufgabe 5)* sollte man systematisch nach verschiedenen Lösungswegen suchen lassen. Beginnt man mit $\overline{AB} = c$, dann kann man den gesuchten Punkt C nicht sofort konstruieren. Dies trifft jedoch für den "naheliegenden" (weil durch die Aufgabenstellung bereits eingeführten) Hilfspunkt S zu, für den die beiden Bedingungen $\overline{AS} = \frac{1}{2}c$ und $S \in \overline{AB}$ die benötigten beiden geometrischen Örter liefern.
Zur Konjunktion der Bedingungen " $\overline{CS} = s_c \wedge \overline{CA} = b$ " gehört der Durchschnitt der zugehörigen g.Ö. " $k(S;s_c) \cap k(A;b) = \{ C; C_1 \}$ " .
Offensichtlich gilt hier $\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$, also gibt es nur eine Lösung.
Unser Lösungsplan läßt sich in der Kurzform " A,B / S, C_1 " festhalten, wobei durch "$\not$" angedeutet wird, daß von den beiden entstehenden Schnittpunkten nur einer zu berücksichtigen ist.

Man sollte an dieser Stelle hervorheben:
Wenn bei einer Dreieckskonstruktion zwei Kreise zum Schnitt gebracht werden, dann braucht man bei der weiteren Konstruktion nur einen der beiden Schnittpunkte zu berücksichtigen, weil der andere stets nur eine zur ersten Lösungsfigur kongruente Figur liefern würde. (Für die Konstruktion von n-Ecken gilt diese Aussage jedoch nur dann, wenn man sich auf konvexe n-

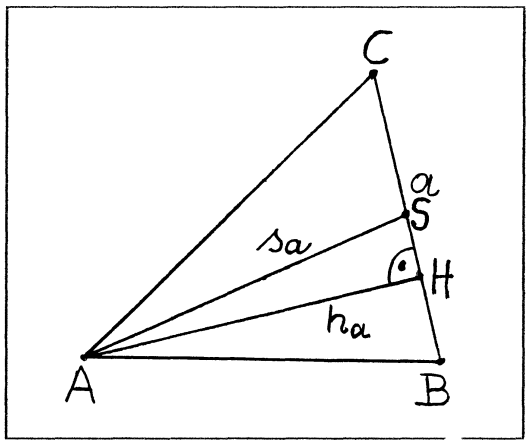
Ecke beschränkt.) Als Begründung kann man anführen, daß hier eine Konstruktion nach (s,s,s) vorliegt, die höchstens eine Lösung liefert.
Wird dagegen ein Kreis mit einer Geraden, einem Strahl oder einer Strecke zum Schnitt gebracht, dann muß man zunächst stets beide Schnittpunkte berücksichtigen, weil sie zu verschiedenen Lösungen führen können.
Beispiele hierfür liefern die Aufgaben 3) und 4).

Ein *2. bzw. 3. Lösungsweg* läßt sich finden, wenn man mit $\overline{AC} = b$ bzw. $\overline{CS} = s_c$ beginnt. Die drei Lösungspläne lassen sich durch die weiter unten abgebildeten informativ gestalteten Figuren festgehalten, wobei durch ○ , ◍ bzw. ● angedeutet wird, daß die jeweiligen Punkte "grün", "blau" bzw. "rot" gezeichnet werden.
Bei den gegebenen Daten wird speziell $\sphericalangle BAC = 90°$, was zur Kontrolle der Zeichengenauigkeit der Schüler benutzt werden kann. Das Anfertigen von Konstruktionszeichnungen sollte jedoch in der Regel als Hausaufgabe gestellt werden, unserer Zielstellung folgend sollte die Zeit im Zirkel für das Suchen nach Lösungsplänen genutzt werden.



Die *Aufgabe 6)* , bei der man günstigerweise mit $\overline{AC} = b$ beginnt, besitzt mit den gegebenen Daten keine Lösung. Man wird die Schüler auffordern, die Daten so zu ändern, daß eine bzw. zwei Lösungen entstehen. Am einfachsten ist dies möglich, indem man $\overline{BC} = a$ vergrößert und etwa $\overline{BC} \geq 5$ cm oder $\overline{BC} = 4{,}5$ cm wählt. Man kann aber auch $\sphericalangle BAC = \alpha$ oder $\overline{AC} = b$ entsprechend verkleinern.

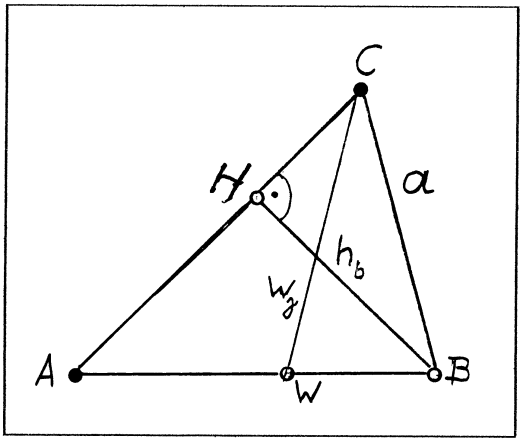
Bei *Aufgabe 7)* gibt es wieder verschiedene Lösungswege.
Beginnt man mit $\overline{BC} = a$, dann ist S sofort konstruierbar. Der 1.g.O. für A ist dann das Parallelenpaar (g, g_1) zu BC im Abstand h_a , wobei man nur g zu berücksichtigen braucht.
Der 2.g.O. für A ist ist $k(S;s_a)$, von dessen beiden Schnittpunkten mit g nur einer berücksichtigt werden muß.
Bei diesem Lösungsweg muß H nicht konstruiert werden, der Lösungsplan lautet B,C / S , $A_{1,2}$, (H) . . Bei den gegebenen Daten entsteht als Lösung ein stumpfwinkliges Dreieck.



Beginnt man dagegen mit $\overline{AH} = h_a$, dann ist der 1.g.O. für S die Senkrechte g zu AH durch H , der 2.g.O. ist $k(A;s_a)$; von den beiden Schnittpunkten dieses Kreises mit g ist nur einer von Bedeutung. Für die gesuchten Punkte B und C sind dann jeweils g und $k(S;\frac{1}{2}a)$ die benötigten geometrischen Örter.
Der Plan lautet also A,H / $S_{1,\not2}$, B , C .

Ein 3.Lösungsweg ist in der Klasse 6 nicht gangbar. Beginnt man mit $\overline{AS} = s_a$, dann benötigt man als 2.g.O. für H den Thaleskreis über $\overline{AS}$.

Im Vergleich mit den bisher gelösten Aufgaben hat *Aufgabe 8)* einen höheren Schwierigkeitsgrad und sollte daher gemeinsam im Zirkel behandelt werden.
Beginnt man mit $\overline{BC} = a$, dann benötigt man als 2.g.O. für H den Thaleskreis über $\overline{BC}$.



Beginnt man mit $\overline{CW} = w_\gamma$, dann kann man für B nur einen g.O., für A keinen g.O. finden.
Die Schüler sollen erkennen, daß beide Versuche scheitern, und daß sie daher als letzte Möglichkeit versuchen müssen, mit $\overline{BH} = h_b$ zu beginnen.

Außer den bei der Besprechung von Aufgabe 3) angegebenen Impulsen können hier folgende *Impulse* nützlich sein, die das *VA beim Lösen von Konstruktionsaufgaben* charakterisieren:

Welche Punkte lassen sich von den gegebenen Punkten ausgehend unmittelbar konstruieren?

Ich beginne mit der Bedingung $\overline{BH} = h_b$, also sind B und H gegebene Punkte, und es sind A und C die gesuchten Punkte.
Für W kann ich keinen g.O. finden.

◦ Für welche Punkte kann ich zwei geometrische Örter angeben?

A liegt auf der Senkrechten g zu HB durch H (weil $\overline{HB}$ eine Höhe im Dreieck ABC ist).
Einen 2.g.O. für A kann ich nicht finden.

: Welche gegebenen Bedingungen habe ich noch nicht berücksichtigt? Sie könnten die gesuchten g.Ö. liefern!

C liegt ebenfalls auf g.
Wegen der Bedingung $\overline{BC} = a$ liegt C außerdem auf k(B;a).

- Welche Punkte lassen sich nun unmittelbar konstruieren?

Der Schnitt dieser beiden g.Ö. liefert zwei Punkte C_1 und C_2.

- Welche Punkte lassen sich nun unmittelbar konstruieren?

Ein 1.g.O. für W ist nun die Winkelhalbierende von $\sphericalangle HCB$ (weil $\overline{CW}$ Winkelhalbierende im Dreieck ABC ist).
Ein 2.g.O. ist k(C;w) (weil $\overline{CW} = w$ gilt).
Also kann ich zu C_1 den Punkt W_1 und zu C_2 den Punkt W_2 konstruieren.

- Welche Punkte lassen sich nun unmittelbar konstruieren?

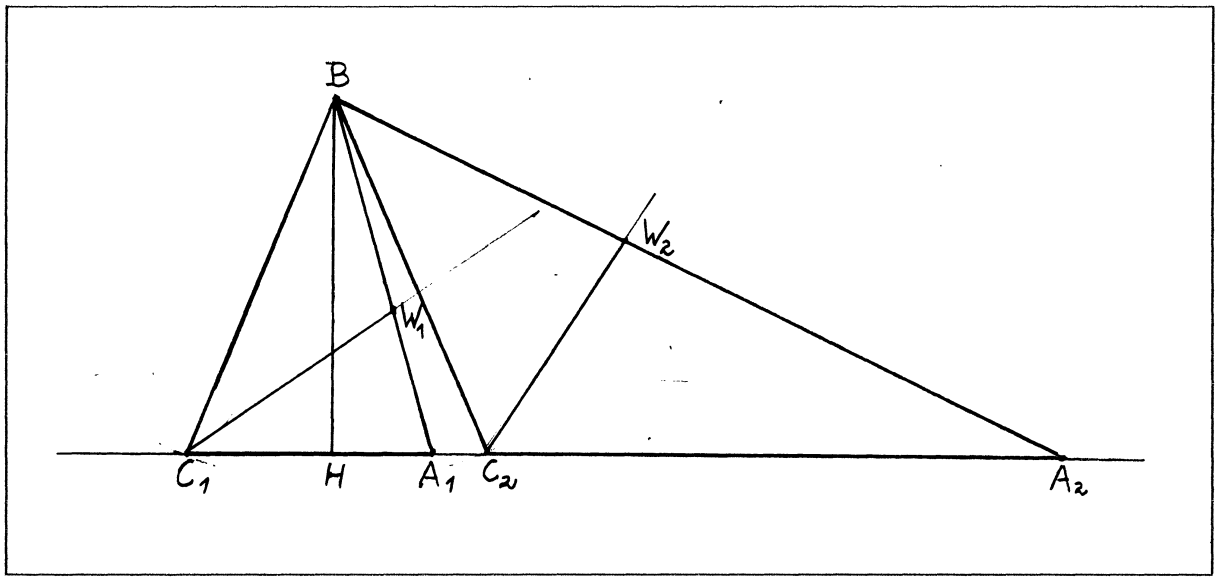
Ein 1.g.O. für A ist g (siehe oben);
ein 2.g.O. ist nun der Strahl $\overrightarrow{BW}$.
Also kann ich zu W_1 den Punkt A_1, zu W_2 den Punkt A_2 konstruieren.

- Ich halte den Lösungsplan fest.

B,H / $C_{1,2}$, W_1, A_1, W_2, A_2.

- Sind die erhaltenen Lösungen untereinander verschieden (nicht kongruent)?

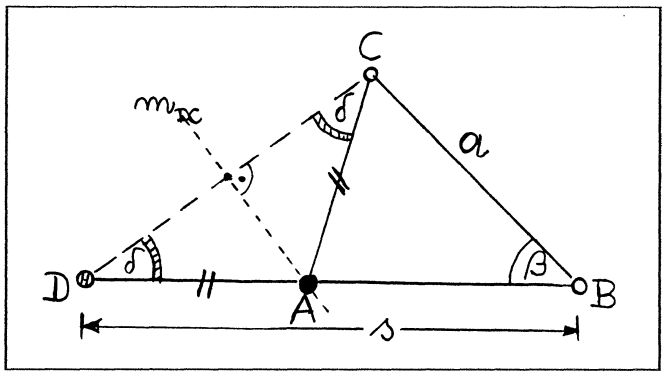
Die Konstruktionszeichnung zeigt, daß daß die Dreiecke A_1BC_1 und A_2BC_2 (als ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck) nicht kongruent sind.
Also hat meine Aufgabe zwei verschiedene Lösungen.



Bei *Aufgabe 9)* sollten die Schüler sofort erkennen, daß wegen $a < h_b$ für die gegebenen Daten keine Lösung existieren kann, und sie sollten durch Änderung der Daten Aufgaben mit einer oder mit zwei Lösungen bilden.
Durch Vergleich mit Aufgabe 3) sollten sie feststellen, daß es sich hierbei (abgesehen von den unterschiedlichen Daten) um dieselbe Aufgabe handelt, weil (b, a, h_b) durch Vertauschen der Bezeichnungen aus $(c, a\ h_a)$ hervorgeht.

Bei *Aufgabe 10)* muß aus der Bedingung $m_{AC} \perp m_{BC}$ zunächst $\sphericalangle BAC = 90°$ abgeleitet werden, wodurch eine sehr einfache Aufgabe vom Typ (a, b, γ) entsteht.
Die Schüler sollen vermuten und beweisen, daß der Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ ist, und sie sollen so einen Zusammenhang zu den geometrischen Bestimmungsaufgaben 6) und 11) herstellen.

Aufgabe 11) dient der Einführung der *Methode der Hilfselemente* , die eine Variante des *Vorwärtsarbeitens* und des *Rückwärtsarbeitens* beim Lösen von Konstruktionsaufgaben darstellt. Als Teilziele treten dabei *Hilfspunkte* auf.
Hier liegt es nahe, mit BC = a zu beginnen. Als 1.g.O. für den gesuchten Punkt A findet man leicht den freien Schenkel BX des Winkels $\sphericalangle CBX = \beta$.
Ein 2.g.O. für A läßt sich nicht unmittelbar finden.



Folgende *Impulse* können weiterhelfen:

- Welche Bedingung habe ich noch nicht verwendet?
  Auf welches Hilfsmittel deutet sie hin?

Die noch nicht verwendete Bedingung $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = s$ deutet auf das Hilfsmittel "Streckenabtragung" hin.

- Welche Hilfspunkte lassen sich m.H. dieser Bedingung konstruieren?

Ich muß einen Hilfspunkt D so einführen, daß eine Strecke mit der Länge s entsteht. Dies ist auf 4 verschiedene Weisen möglich:
1) $\overrightarrow{AC}$ auf der Verlängerung von $\overrightarrow{BA}$ über A hinaus abtragen;
2) $\overrightarrow{AC}$ auf $\overrightarrow{AB}$ über B hinaus abtragen
3) $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{AC}$ über C hinaus abtragen
4) $\overrightarrow{AB}$ auf $\overrightarrow{CA}$ über A hinaus abtragen.
Die 1.Möglichkeit ist die günstigste, weil nur hier das gegebene β in der Hilfsfigur vorkommt.

- Welcher dieser konstruierbaren Hilfspunkte dürfte der nützlichste sein?
  : In welchem der so entstehenden Hilfsdreiecke kommen die meisten gegebenen Größen vor?

- Ich führe den gewählten Hilfspunkt durch eine "Zusatzvoraussetzung" ein.

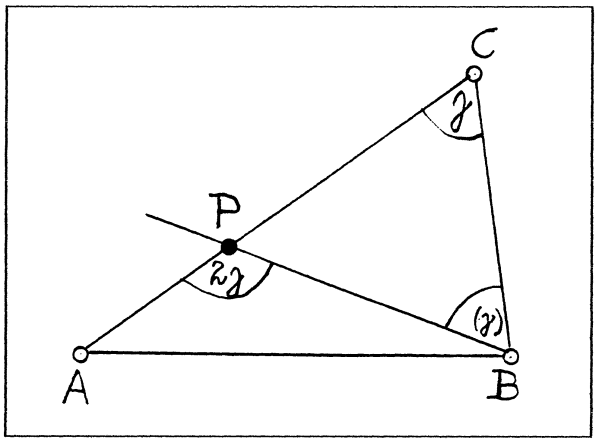
Sei D derjenige Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{BX}$, für den $\overline{DA} = \overline{AC}$, also $\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB} = s$ gilt.

- Welche Punkte lassen sich jetzt unmittelbar konstruieren?
  - Beachte die Zusatzvoraussetzung!

Wegen $\overline{DA} = \overline{AC}$ ist die Mittelsenkrechte von $\overline{DC}$ ein 2.g.O. für A.
Wegen $\overline{DA} = \overline{AC}$ gilt auch
$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle DCA = \delta$, also ist der freie Schenkel $\overrightarrow{CY}$ von $\sphericalangle DCY = \delta$ ein 3.g.O. für A.
Damit habe ich 2 Möglichkeiten gefunden, den gesuchten Punkt A zu konstruieren.

- Lösungsplan?

Bei *Aufgabe 12)* dürfte die allgemeine Hilfsmittelfrage leicht zum Ziel führen.
Wegen der gegebenen Bedingung $\sphericalangle PCB = \gamma$ (wobei $\gamma < \sphericalangle CBA$) und $\sphericalangle APB = 2\gamma$ dürfte es beim Betrachten der Planfigur nicht schwerfallen, den Außenwinkelsatz als günstiges Hilfsmittel zu entdecken.
Dies führt zur Hilfsgröße $\sphericalangle CPB = \gamma$ und damit zum freien Schenkel dieses Winkels als 2.g.O. für den gesuchten Punkt P.
Damit ist man am Ziel, weil laut Aufgabenstellung $\overline{AC}$ ein 1.g.O. für P ist.



Abschließend bringen wir den eingangs angekündigten Vorschlag zu Planung der drei Zirkel über Konstruktionsaufgaben:

1. Zirkel:
Wiederholen von "Aussageformen und Erfüllungsmengen"; geometrische Örter als Erfüllungsmengen; Erarbeiten und Festhalten der Übersicht.
Selbständige Lösungsversuche zu Aufgabe 3); Einführen der Methode der geometrischen Örter anhand dieser Aufgabe; zugehörige Impulse; informativ gestaltete Planfigur.
Konstruktionszeichnung; schriftliches Fixieren der Konstruktionsbeschreibung.
Erarbeiten und Festhalten der Determinationstabelle für die Grundkonstruktionen.
Aufgabe 5) mit mindestens 2 Lösungswegen; eine der Konstruktionsbeschreibungen schriftlich festhalten; Aufgabe 4) in der verbleibenden Zeit oder als Hausaufgabe.

2. Zirkel:
Wiederholung "Geometrische Örter" und der Impulse zur Methode der geometrischen Örter anhand Aufgabe 4).
Aufgabe 6); selbständig erkennen, daß keine Lösung existiert; Wiederholung der Determination zu den Grundaufgaben; Abänderung der Daten, so daß Lösungen entstehen; Impulse zur Meth.d.g.Ö.; Fixieren der Konstruktionsbeschreibung.
Aufgabe 8) gemeinsam lösen; VA bei der Suche nach konstruierbaren Hilfspunkten; informative Figur und Lösungsplan in Kurzform; Konstruktionsbeschreibung; Formulieren der Sätze für den Einzigkeits- und den Existenznachweis.
Aufgabe 9) selbständig; Änderung der Daten; Konstruktionsbeschreibung; Formulieren der Sätze für den Einzigkeits- und Existenznachweis.

3. Zirkel:
Wiederholung "Geometrische Örter" und Determination zu den Grundaufgaben.
Aufgabe 11) gemeinsam; Einführen der Impulse, die zur Methode der Hilfselemente gehören; Diskussion über die Nützlichkeit verschiedener Hilfspunkte; informative Figur und Lösungsplan; Konstruktionsbeschreibung.
Aufgabe 7) zunächst selbständig; 2 Lösungswege finden lassen; eine Konstruktionsbeschreibung fixieren; Formulieren der Sätze für den Einzigkeits- und Existenznachweis.
In der verbleibenden Zeit Aufgaben 10) und 11) .
Zusammenfassende Wiederholung zu "Mathematische Bestimmungsaufgaben"; Durcharbeiten des Merkstoffs auf S.32 der Aufgabensammlung.

Nun noch einige Bemerkungen zum didaktischen Vorgehen:
Bei der Behandlung von Konstruktionsaufgaben sollte in der Regel nur der AG-Leiter an der Wandtafel arbeiten, wobei auf eine übersichtliche Darstellung großer Wert zu legen ist. Der Schüler muß stets wissen, was er in den Hefter zu übernehmen hat.
Das Anfertigen informativer Figuren wird kommentarlos vorgemacht. Die Hauptimpulse, die die Methode der geometrischen Örter und die Methode der Hilfselemente kennzeichnen, werden anfangs bei *jeder* Aufgabe vom AG-Leiter formuliert, und zwar so lange, bis der erste Schüler dazu in der Lage ist. Natürlich werden die entsprechenden Fragen keinesfalls aufgeschrieben und wörtlich auswendig gelernt, sondern nur so oft in "genormter" Form wiederholt, bis sie sich bei den Schülern eingeprägt haben.
Wenn der kurze Lösungsplan (als Folge der zu konstruierenden Punkte) notiert wurde, wird die Konstruktionsbeschreibung von einem Schüler in sprachlich einwandfreier Form formuliert, vom AG-Leiter in Kurzform an der Wandtafel festgehalten und anschließend von den Schülern in den Hefter übernommen. Die Schüler müssen in der Lage sein, diese "Kurzform" wieder in die "Wortsprache" zu übersetzen.

Nach Behandlung der Problematik "Einzigkeits- und Existenznachweis" sind bei *jeder* Aufgabe nach der Konstruktionsbeschreibung die zu beweisenden Sätze in der Wenn-dann-Form zu formulieren. Nur bei leistungsstarken AGn wird man beginnen, diese Sätze zu beweisen. Im Rahmen der inneren Differenzierung kann man auch einzelnen Schülern diesen Auftrag erteilen. Das Darstellen einer vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe gehört zum Inhalt der AG Klasse 7, in deren Aufgabensammlung auch eine derartige "Musterlösung" enthalten ist.

Recht bedeutsam ist die richtige Bemessung der Zeit für selbständige Schülertätigkeit. Zunächst muß jeder Schüler hinreichend Zeit zum selbständigen Überlegen bekommen. Wie bereits mehrfach betont wurde, darf ein leistungsstarker Schüler, der einen Lösungsweg gefunden hat, diesen nicht gleich verraten, er darf lediglich Fragen stellen oder Impulse geben, um auch den anderen Schülern eine Chance zu lassen ,selbst einen Lösungsweg zu finden. Bei längerwährender selbständiger Tätigkeit muß der AG-Leiter jedoch darauf achten, daß wirklich alle Schüler geistig tätig sind und nicht etwa einige Schüler "abgeschaltet" haben. Daher sollte der AG-Leiter in Phasen der selbständigen Schülertätigkeit stets kontrollieren, individuelle Hilfen für leistungsschwächere Schüler geben und die erbrachten Leistungen werten. Jede Phase selbständiger Schülertätigkeit sollte mit einer gemeinsamen Auswertung abgeschlossen werden.

3.10. Sonstige Aufgaben

In diesem Abschnitt werden diejenigen "Vermischten Aufgaben" besprochen, die sich nicht zwanglos in die bisher behandelten Aufgabentypen einordnen lassen.

Aufgabe V4) ist eine durch *Vorwärtsarbeiten* leicht zu bewältigende Berechnung des Werts eines Terms. Es gilt

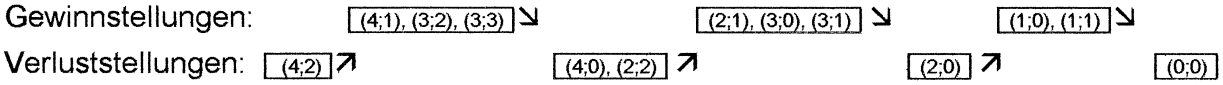
$$(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1-\tfrac{1}{100}) = \tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\tfrac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\tfrac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\tfrac{\cancel{4}}{5}\cdot\ldots\cdot\tfrac{98}{\cancel{99}}\cdot\tfrac{\cancel{99}}{100} = 1\cdot\tfrac{1}{100} = \tfrac{1}{100}\ .$$

In *Aufgabe V23)* ist für ein mathematisches Spiel eine Gewinnstrategie zu entdecken. Dazu lohnt es, eine *zweckmäßige Symbolik* einzuführern:
Spielstellung (a;b) : In der 1.Schale liegen a Nüsse, in der 2.Schale liegen b Nüsse.
Gewonnen hat, wer die Stellung (0;0) erreicht.

Regeln: $(a;b) \xrightarrow{R1} (a-1;b)$;
$(a;b) \xrightarrow{R2} (a;b-1)$;
$(a;b) \xrightarrow{R3} (a-1;b-1)$;
$(a;b) \xrightarrow{R4} (a-1;b+1)$;
$(a;b) \xrightarrow{R5} (a+1;b-1)$.

Aus "Symmetriegründen" kann man eine *Vereinfachung* einführen, indem man nur Spielstellungen mit $a \geq b$ betrachtet
Beim *Rückwärtsarbeiten* stellt man sich die Frage: Von welchen Stellungen ausgehend kann ich die Stellung (0;0) erreichen und mit welcher Regel kann dies geschehen.
Man erkennt, daß man von (1;0) mit Hilfe von R1 und von (1;1) mit Hilfe von R3 das Ziel erreicht, wobei wir nach Vereinbarung die Stellung (0;1), von der man mit R2 zu (0;0) gelangen würde, nicht mit betrachten.
Wir wollen die beiden Stellungen (1;0) und (1;1) *"Gewinnstellungen"* nennen weil man von ihnen ausgehend den Sieg erreichen kann.
Nun wird man fragen, von welchen Stellungen ausgehend *muß* mein Gegner eine der beiden Gewinnstellungen erzeugen?
Von (2;0) ausgehend kann mein Gegner nur entweder R1 anwenden und so zu (1;0) gelangen, oder R4 anwenden und so zu (1;1) gelangen; ein Anwenden von R2, R3 oder R5 ist hier offensichtlich nicht möglich. Wir wollen daher (2;0) eine *Verluststellung* nennen.
Etwas anders liegt der Fall bei der Spielstellung (2;2) . Hier ist mein Gegner nicht gezwungen, m.H. von R3 sofort die Gewinnstellung (1;1) zu erzeugen; er kann mir m.H. von R1 auch die Stellung (2;1) oder m.H. von R5 die Stellung (3;1) vorlegen. Da ich jedoch aus (2;1) m.H. von R2 die Verluststellung (2;0) erzeugen kann und da ich auch aus (3;1) m.H. von R3 die Verluststellung (2;0) erzeugen kann, sind die Stellungen (2;1) und (3;1) ebenfalls Gewinnstellungen, die Stellung (2;2) dagegen eine Verluststellung.
(3;0) ist eine Gewinnstellung, weil sie sich m.H. von R1 in die Verluststellung (2;0) umwandeln läßt.
(3;2) ist eine Gewinnstellung, weil sie sich m.H. von R1 in die Verluststellung (2;2) umwandeln läßt.
(3;3) ist eine Gewinnstellung, weil sie sich m.H. von R3 in die Verluststellung (2;2) umwandeln läßt.
(4;0) ist eine Verluststellung, weil man hier nur entweder R1 oder R4 anwenden kann, was zu den Gewinnstellungen (3;0) bzw. (3;1) führt.

Durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* gelangt man zu folgendem Resultat:



Nun ist leicht zu vermuten:
Eine Stellung ist Verluststellung genau dann, wenn die Anzahl der Nüsse in beiden Schalen gerade ist.
In diesem Fall ist der am Zug befindliche Spieler gezwungen, eine Stellung herbeizuführen, in der in mindestens einer der beiden Schalen eine ungerade Anzahl von Nüssen liegt.
In diesem Fall hat der Gegner stets die Möglichkeit, mit seinem Zug wieder eine sichere Verluststellung zu erzeugen usw..
Hieraus folgt: Wenn der Anziehende in beiden Schalen eine gerade Anzahl von Nüssen vorfindet und sein Gegner optimal spielt (d.h. mit seinem Zug stets wieder eine derartige Stellung erzeugt), dann muß der Anziehende verlieren. Findet er dagegen in mindestens einer der beiden Schalen eine ungerade Anzahl von Nüssen vor, dann kann er gewinnen.

Bei *Aufgabe V40a)* wäre es zwar möglich, aber ungeschickt, für Zähler und Nenner des gesuchten Bruchs Variable einzuführen und dann die Gleichung nach diesem Bruch aufzulösen. Wesentlich günstiger ist es, durch Betrachten der gegebenen Brüche zur *Vermutung* zu gelangen, daß die Faktoren die Gestalt $\frac{n^2 - 1}{n^2}$ oder $\frac{(n - 1)(n + 1)}{n^2}$ besitzen, und daß der gesuchte Bruch $\frac{24}{25}$ lautet, was durch eine *Probe* bestätigt wird.

Bei *Aufgabe V40b)* müßten dann die gesuchten Faktoren $\frac{24}{25}$ und $\frac{35}{36}$ lauten, und man erkennt durch Ausrechnen, daß dann auf der rechten Seite der Gleichung $\frac{1}{12}$ stehen müßte.

Bei *Aufgabe V40c)* vergleicht man zunächst die rechten Seiten $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$ der drei Gleichungen und kann vermuten, daß der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite der Gleichung von der Anzahl der Faktoren des Produkts auf der linken Seite der Gleichung abhängt. Bezeichnet k die Anzahl dieser Faktoren, dann lautet der Nenner auf der rechten Seite vermutlich 2(k+1), zum Bruch $\frac{1}{16}$ gehören dann 7 Faktoren, also müßten die gesuchten Brüche auf der linken Seite $\frac{24}{25}$ und $\frac{48}{49}$ lauten. Eine Probe bestätigt die Richtigkeit der Vermutung.

Bei *Aufgabe V40d)* besitzt das Produkt auf der linken Seite der Gleichung 9 Faktoren, also müßte auf der rechten Seite der Bruch $\frac{1}{2(9+1)}$, also $\frac{1}{20}$ stehen.

Bei *Aufgabe 40e)* steht auf der rechten Seite der Bruch $\frac{1}{100}$, also müßte das Produkt wegen $2(x+1) = 100$ genau 49 Faktoren besitzen. Der letzte Faktor müßte daher $\frac{2499}{2500}$ lauten.
Abschließend kann man als allgemeine Form dieser Gleichung mit einem Produkt aus k Faktoren auf der linken Seite festhalten:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2(k+1)} .$$

Man wird sich überzeugen, daß tatsächlich alle Ergebnisse der Aufgabe V40) aus dieser Formel gewonnen werden können.

Wie bei Aufgabe V40) ist auch *Aufgabe V59)* in viele Teilaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad aufgespalten. Dies hat den Vorteil, daß bei vorgegebener Bearbeitungszeit und selbständiger Schülerarbeit die leistungsschwachen Schüler nicht überfordert und die leistungsstarken Schüler nicht unterfordert sind.

Aufgabe V59a) soll garantieren, daß der Löser die vier gegebenen Regeln voll erfaßt, vor allem die mögliche "Mehrdeutigkeit" der Regel R3:

$$MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIII \xrightarrow{R1} MIIIIU \xrightarrow{R3} \begin{cases} MUIU \\ MIUU \end{cases}$$

Bei *Aufgabe 59b)* sollen die Schüler erkennen, daß sich aus M I niemals M I M I ableiten läßt, weil es keine der gegebenen Regeln gestattet, ein zweites "M" zu schreiben.

Aufgabe 59c) ist relativ einfach durch *Vorwärtsarbeiten* zu bewältigen. Man erkennt, daß man allein mit Hilfe der Regeln R1 und R2 die gewünschte Ableitung durchführen kann:

$$MI \xrightarrow{R1} MIU \xrightarrow{R2} MIUIU \xrightarrow{R2} MIUIUIU .$$

Bei *Aufgabe 59d)* und erst recht bei *Aufgabe 59e)* lohnt es, bei der Suche nach einer Lösung auch das *Rückwärtsarbeiten* oder das *"Folgern vom Ziel aus"* einzusetzen. Beim letztgenannten Vorgehen formuliert man zu jeder Regel eine *"inverse Regel"* , die es gestattet, sich vom Ziel aus in Richtung Start zu bewegen. So kann man durch systematisches Erfassen aller Möglichkeiten, vom Start einen Schritt in Zielrichtung oder vom Ziel einen Schritt in Startrichtung zurückzulegen, schließlich die gesuchten Ableitungen finden. Es gilt

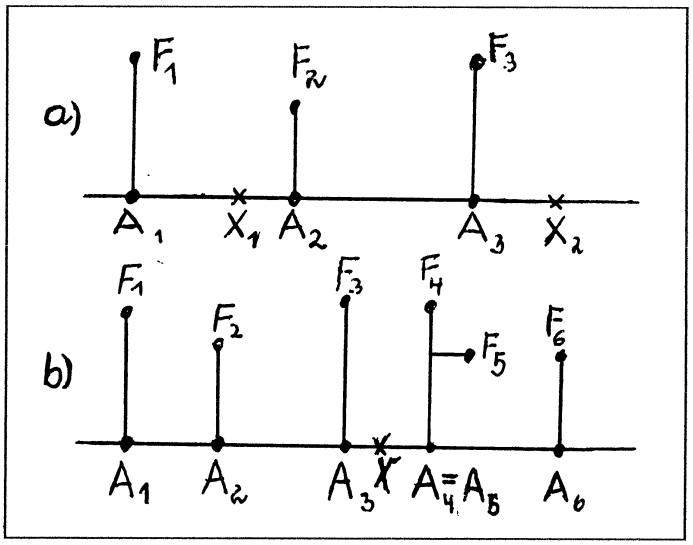
59d) $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R3} MUI \xrightarrow{R2} MUIUI$.

59e) $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R2} MIIIIIIII \xrightarrow{R1} MIIIIIIIIU$

$\xrightarrow{R3} MUIIIIIU \xrightarrow{R3} MUIIUU \xrightarrow{R4} MUII$.

Bei Anwendung von R3 wurde durch Unterstreichen angegeben, welche Buchstabenfolge I I I durch ein U ersetzt wurde.

Aufgabe V61) fällt Schülern der Klasse 6 erfahrungsgemäß sehr schwer. Um ihnen die benötigte Abstraktion zu erleichtern, sollte man zunächst untersuchen lassen, worauf es bei dieser Aufgabe *nicht* ankommt.



Da es hier nur um Weglängen geht, spielt die Krümmung der Straßen oder die Tatsache, von welcher Straßenseite aus die Nebenstraßen abbiegen, keine Rolle. Daher können wir die zu Aufgabe 61a) bzw. Aufgabe 61b) gegebenen Bilder durch nebenstehende Abbildungen ersetzen.

Nun wird man untersuchen, aus welchen Teilstrecken sich der (zu minimierende) Gesamtweg mit der Länge s zusammensetzt, wenn X ein beliebiger Punkt auf der "Hauptstraße" ist. (In der Figur wurden zwei verschiedene Punkt X_1 und X_2 betrachtet, um die Unabhängigkeit des Terms für s von der Lage des Punktes X zu zeigen).

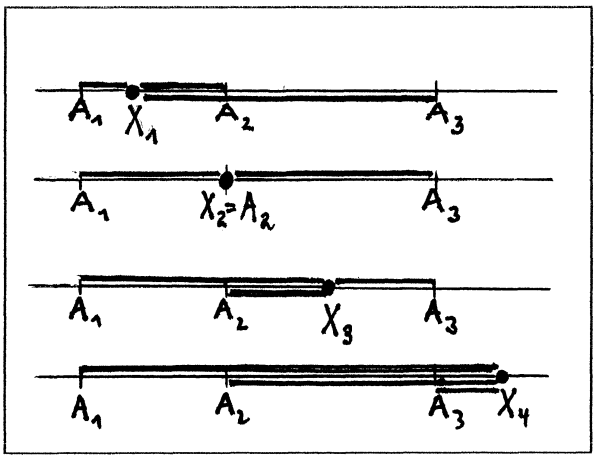
So erhält man für den Fall a) : $s = (\overline{A_1X} + \overline{A_1F_1}) + (\overline{A_2X} + \overline{A_2F_2}) + (\overline{A_3X} + \overline{A_3F_3})$.

Die entscheidende Lösungsidee besteht darin, zu erkennen, daß drei der sechs Teilstrecken von der Lage des Punktes X auf der (die "Hauptstraße" darstellenden) Geraden unabhängig sind. Formt man obige Gleichung etwas um, dann wird dies besonders deutlich:

$s = (\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_3X}) + (\overline{A_1F_1} + \overline{A_2F_2} + \overline{A_3F_3}) \ .= (\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_3X}) + c$.

Folglich wird die Länge s des Gesamtweges genau dann minimal, wenn dies für die Summe der Teillängen des Terms in der Klammer zutrifft.

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn
$B = X_{min} = A_2$ gilt.
In diesem Fall wird
$\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_3X} = \overrightarrow{A_1A_3}$,
während für jede andere Lage von X
$\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_3X} = \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_2X} > \overrightarrow{A_1A_3}$
gelten würde.
Dies läßt sich wie nebenstehend angegeben durch eine zeichnerische Darstellung der möglichen Fälle für die Lage von X gut veranschauilichen.



Im Fall b) erhält man analog

$$s = (\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_3X} + \overrightarrow{A_4X} + \overrightarrow{A_5X} + \overrightarrow{A_6X}) + c\,.$$

Die Aufgabe wäre leichter, wenn die beiden Punkte A_4 und A_5 nicht zusammenfallen würden. Denn dann wäre $\overrightarrow{A_3A_4}$ als "zentrale" Strecke im Vergleich zu den 4 restlichen Teilstrecken in gewisser Weise hervorgehoben und die Vermutung, daß *jeder* Punkt dieser Strecke die Eigenschaft hat, daß s minimal wird, wäre plausibler.
Diese Vermutung kann wie folgt bewiesen werden:
Liegt X auf der Strecke $\overrightarrow{A_3A_4}$, dann gilt $\overrightarrow{A_3X} + \overrightarrow{A_4X} = \overrightarrow{A_3A_4}$ sowie $\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + \overrightarrow{A_5X} + \overrightarrow{A_6X} = \overrightarrow{A_1A_6} + \overrightarrow{A_2A_5}$.
Folglich gilt in diesem Fall $\overrightarrow{A_1X} + \overrightarrow{A_2X} + (\overrightarrow{A_3X} + \overrightarrow{A_4X}) + \overrightarrow{A_5X} + \overrightarrow{A_6X} = \overrightarrow{A_1A_6} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_2A_5}$.
Analog wie oben kann man zeigen, daß in jedem anderen Fall die Länge s des Gesamtweges größer wird.

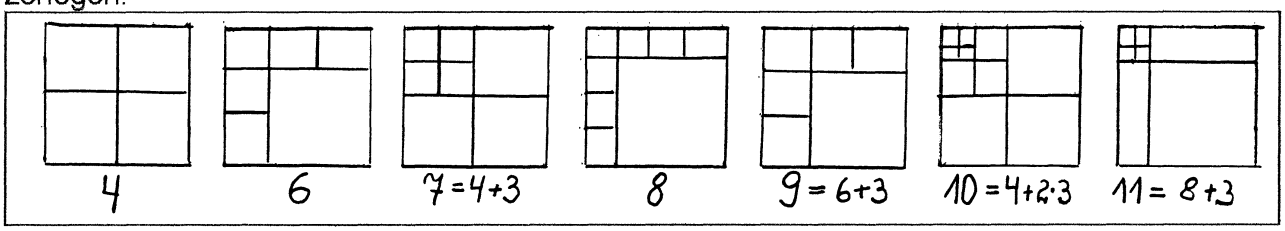
Bei *Aufgabe V62a)* gilt:
Es ist offenbar nicht möglich, ein Quadrat in 2 oder 3 kleinere Quadrate zu zerlegen.
Jedes Quadrat läßt sich jedoch durch zwei Schnitte längs der Mittellinien in 4 Quadrate zerlegen; dadurch erhöht sich die Gesamtanzahl der Teilquadrate um 3 . Die beiden in der Aufgabe gegebenen Zerlegungen liefern also den Start für die Zerschneidung in

4, 7, 10, ..., 4+3k, ...

bzw. in 6, 9, 12, ..., 6+3k, ... Quadrate.
Dazwischen liegen noch die Zahlen

5 , 8 , 11 , ... , 5+3k , ...

Da es uns nicht gelingt, eine Anfangszerlegung in 5 Quadrate herzustellen, versuchen wir, eine Anfangszerlegung in 8 Quadrate zu finden. Dies gelingt, indem wir das Ausgangsquadrat zunächst in 16 kleine Quadrate zerlegen, von denen wir dann 9 Quadrate zu einem größeren zusammenfassen: 16 - 9 + 1 = 16 - 8 = 8 .
Wir bemerken, daß die in der Aufgabe gegebene Anfangszerlegung in 6 Quadrate analog gefunden wurde: Dort wurde das Ausgangsquadrat in 9 kleine Quadrate zerlegt, von denen dann vier zu einem größeren zusammengefaßt wurden.
Damit ist gezeigt:
Ein Quadrat läßt sich in 1, 4, 6, 7 und alle folgenden natürlichen Zahlen von Teilquadraten zerlegen.

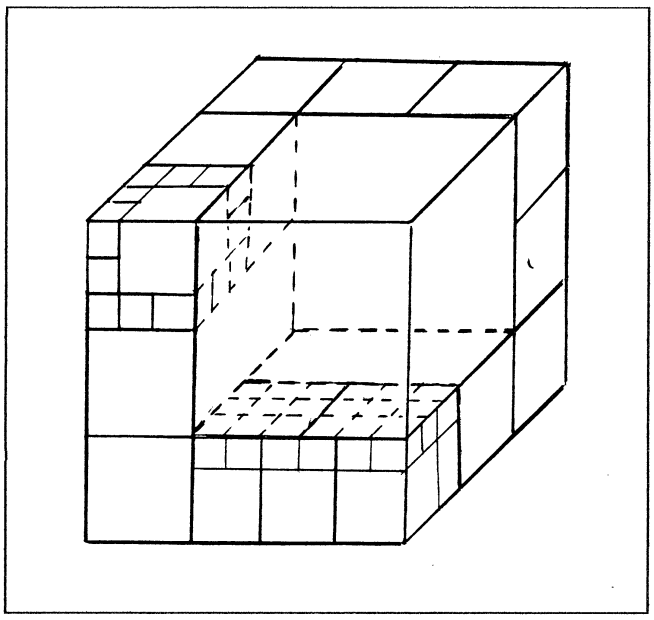


Bei *Aufgabe 62b,c)* werden wir versuchen, die bei der Zerlegung eines Quadrats erfolgreiche Lösungsidee durch Ausnutzen der *Analogie* auf die entsprechende Zerlegung eines Würfels zu übertragen.
Jeder Würfel läßt sich durch drei Schnitte längs der Mittelebenen in (2^3 =) 8 Würfel zerlegen.; dadurch erhöht sich die Gesamtanzahl der Teilwürfel um 7 .
Bei der Quadratzerlegung waren wir von drei Anfangszerlegungen (in 4, 6 bzw. 7 Quadrate) ausgegangen. Da diese drei Zahlen bei Division durch 3 drei paarweise verschiedenen Reste (nämlich 1, 0, bzw. 2) lassen, hatten wir auf diese Weise alle möglichen Zerlegungen erhalten.
Wir werden also bei der Würfelzerlegung nach 7 Anfangszerlegungen suchen, deren Reste bei Division durch 7 paarweise verschieden sind.

Die einfachste Folge von Zerlegungen lautet

1, 8, 15, 22, 29, 36, 34, 50, 57, 64, 71, ..., (1+7k), ... ,

hier tritt stets der Rest 1 bei Division durch 7 auf.



Nun zerlegen wir den Würfel in 27 Teilwürfel und fassen 8 dieser Würfel zu einem größeren Würfel zusammen.
Bezeichnet man mit V_n das Volumen eines Würfels mit der Seitenlänge n und geht von einem Würfel mit der Seitenlänge 9 aus, dann gilt:

$$V_9 = 27V_3 = 8V_3 + (27 - 8)V_3 = V_6 + 19\,V_3 .$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß man leicht eine Probe machen kann. In diesem Fall muß

$$9^3 = 27 \cdot 3^3 = 8 \cdot 3^3 + 19 \cdot 3^3 = 6^3 + 19 \cdot 3^3$$

gelten.
So erhalten wir eine Anfangszerlegung in 20 Würfel, wobei der Rest 6 bei Division durch 7 auftritt, und damit folgende (von der oben angegebenen Folge verschiedene) Zerlegungsfolge:

20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, 69, 76, ..., (20+7k), ..., (6+7m), ...

Nun zerlegen wir den Würfel in 64 Teilwürfel und fassen 27 dieser Würfel zu einem größeren Würfel zusammen. Gehen wir von einem Würfel mit der Kantenlänge 16 aus, dann gilt

$$V_{16} = 64V_4 = 27V_4 + (64 - 27)V_4 = V_8 + 37\,V_4 .$$

So erhalten wir eine Anfangszerlegung in 38 Würfel, wobei der Rest 3 bei Division durch 7 auftritt, und damit folgende (von den oben angegebenen Folgen verschiedene) Zerlegungsfolge

38, 45, 52, 59, 66, 73, ..., (38+7k). ...., (3+7m), ...

Damit haben wir die Analogie zu dem bei der Quadratzerlegung erfolgreichen Vorgehen ausgeschöpft. Es sei noch erwähnt, daß auch $V_3 = V_2 + 19V_1$ und $V_4 = V_3 + 37V_1$ gilt und man daher auch auf diese Weise zu einer Anfangszerlegung in 20 Würfel bzw. in 38 Würfel gelangen kann.
Um die benötigten restlichen vier Zerlegungsfolgen (mit den Resten 0, 2, 4 und 5) zu erhalten, müssen wir uns etwas Neues einfallen lassen.
Am naheliegensten ist folgende "Wiederholung" des Vorgehens:

Von obiger Zerlegung in 20 Würfel ausgehend zerlegen wir einen (zwei, drei, vier, ...) der 19 kleinen Würfel wiederum in 27 noch kleinere Würfel, von denen wir wieder 8 zu einem Würfel zusammenfassen.
Da dann $V_3 = V_2 + 19V_1$ gilt, erhalten wir auf diese Weise

$V_9 = V_6 + 18V_3 + (V_2 + 19V_1)$	39 Würfel	Rest 4	
$V_9 = V_6 + 17V_3 + 2(V_2 + 19V_1)$	58 Würfel	Rest 2	
$V_9 = V_6 + 16V_3 + 3(V_2 + 19V_1)$	77 Würfel	Rest 0	
$V_9 = V_6 + 15V_3 + 4(V_2 + 19V_1)$	96 Würfel	Rest 5	

Nun verfügen wir über 7 verschiedene Anfangszerlegungen, die uns 7 verschiedene Zerlegungsfolgen liefern.
Damit ist unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst. Bei *Aufgabe 62b)* haben wir gezeigt, wie man eine Zerlegung in 15, 20 bzw. 24 Würfel erreichen kann, und bei *Aufgabe 62c)* haben wir gezeigt, daß es unendlich viele natürliche Zahlen $n \geq 96$ gibt, für die es möglich ist, einen Würfel in n Würfel zu zerlegen. Lediglich der Aufforderung, möglichst viele derartige Zahlen n anzugeben, haben wir noch nicht voll entsprochen.

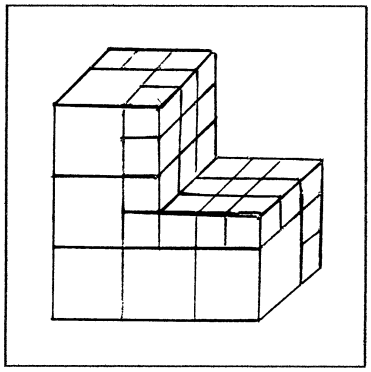
Während wir bei der Quadratzerlegung davon überzeugt sind, daß es für die nicht mit angegebenen Zahlen $n = 2, 3, 5$ auch keine Zerlegung gibt, ist es unwahrscheinlich, daß wir bei der Würfelzerlegung wirklich schon alle möglichen Zerlegungen gefunden haben. So liegt es z.B. recht nahe, ausgehend von einer Zerlegung in 38 Teilwürfel einen dieser Teilwürfel in 64 Würfel zu zerlegen und 27 dieser Würfel zu einem größeren Würfel zusammenzufassen.
Wegen $V_4 = V_3 + 37\,V_1$ erhalten wir auf diese Weise

$V_{16} = V_{12} + 36V_4 + (V_3 + 37V_1)$	75 Würfel	Rest 5	
$V_{16} = V_{12} + 35V_4 + 2(V_3 + 37V_1)$	112 Würfel	Rest 0	

Wir erkennen, daß die hier zu Rest 5 gehörende Zerlegungfolge die drei Zerlegungen in 75, 82 und 89 Würfel mehr aufweist, als die oben zu Rest 5 gehörige Zerlegungsfolge, und daß diese Folge daher die "bessere" Folge ist.
Es gibt noch weitere Möglichkeiten, zu einem der Reste eine Anfangszerlegung zu finden, die eine kleinere Anzahl von Würfeln aufweist als die bisher ermittelte Anfangszerlegung.
Betrachten wir die zum Rest 2 gehörende Zerlegung in 58 Würfel, wo wir $2V_3$ durch $2(V_2 + 19V_1)$, also 2 Würfel durch 40 Würfel ersetzt haben, indem wir die beiden Würfel zunächst in (2·27 =) 54 Würfel zerlegten und dann zweimal je 8 dieser Würfel zu zwei größeren Würfeln zusammengefaßt haben. Wenn die beiden Ausgangswürfel nebeneinanderliegen (vgl. obige Abbildung), dann kann man sogar dreimal je 8 Würfel zu drei größeren Würfeln zusammenfassen. Dann gilt

$$2V_3 = 54V_1 = 8V_1 + 8V_1 + 8V_1 + 30V_1 = 3V_2 + 30V_1\,,$$

wobei aus den beiden Würfeln nur 33 neue Würfel (also um 7 Würfel weniger als oben angegeben) entstanden sind.
Also gibt es zum Rest 2 eine Anfangszerlegung mit 51 Würfeln.
Auch die zum Rest 0 gehörende Anfangszerlegung mit 77 Würfeln läßt sich noch verbessern, wenn wir drei benachbarte Würfel mit dem Volumen V_3 wie in der nebenstehenden Abbildung angegeben wie folgt zerlegen:



$$3V_3 = 81V_1 = 8V_1 + 8V_1 + 8V_1 + 8V_1 + 8V_1 + 41V_1\,,$$

$$3V_3 = 5V_2 + 41V_1\,,$$

wobei aus den drei Würfeln nur 46 Würfel entstanden sind, während bei der oben verwendete Zerlegung $3V_3 = 3(V_2 + 19V_1)$ insgesamt 60 Würfel, also 14 Würfel mehr entstanden waren.

Auf diese Weise haben wir zum Rest 0 eine bessere Anfangszerlegung in nur 63 Würfel gefunden.

Wir fassen die bislang gefundenen möglichen Zerlegungszahlen n zusammen:

1, 8, 15, 20, 22, 27, 29, 34, 36, 38, 39, 41, 43, 45, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 60,62, 63, 64, 65, 66, 67, 69 und alle weiteren natürlichen Zahlen.

Damit ist natürlich noch nicht nachgewiesen, daß dies *alle* möglichen Zerlegungszahlen sind. So ist es z.B. möglich, auch noch eine Zerlegung in 61 Teilwürfel anzugeben.

4. LÖSUNGEN DER BESTIMMUNGSAUFGABEN
aus der "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6"

Wir suchen Zuordnungen, Anordnungen und Auswahlmöglichkeiten

1) Baumann ist Elektriker; Eichler ist Ingenieur; Hahn ist Monteur.

2) Eindeutige Lösung: Geschichtslehrer Klaus Müller aus Demmin;
Sportlehrer Otto Plam aus Neustrelitz;
Mathematiklehrer Kurt Schultz aus Anklam.

3) a) Eindeutige Lösung: Gert Cornelius unterrichtet Englisch;
Ingo Axtmann unterrichtet Französisch;
Heiko Blechschmidt unterrichtet Deutsch.

b) Keine Lösung möglich, da (5) der abgeleiteten Feststellung widerspricht, daß Axtmann und der Französischlehrer ein und dieselbe Person sind.

4) Annemarie hat die Schere; Birgit hat den Tischtennisball; Claudia hat den Bleistift.

5) Wasja, Tolja, Kolja, Petja .

6) Regina, Jochen, Gert, Elke ; (Reihenfolge eindeutig ermittelbar) .

7) (3·4·2 =) 24 Ausführungen

8) 4 Punkte - 6 Geraden ; 5 Punkte - 10 Geraden ; 6 Punkte - 15 Geraden ;
33 Punkte - 528 Geraden .

9) 20 verschiedene Möglichkeiten .

10) 10 Schließversuche .

11) 77 Kugeln .

Wir berechnen Gewinnchancen bei Spielen

1) a) $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$; b) $P(E) = \frac{1}{216}$;

c) $P(\text{"7"}) = \frac{1}{6}$, $P(\text{"9"}) = \frac{1}{9}$; d) 13 Würfel .

2) a) $P(s \text{ ist gerade}) = \frac{1}{2}$; 1:1 ; b) $P(s<7) = \frac{5}{12}$; 5:7 ;

c) $P(3|s) = \frac{1}{3}$; 1:2 ; d) $P(3|s \text{ oder } 7|s) = \frac{1}{2}$; 1:1 ;

e) $P(p \text{ ist gerade}) = \frac{3}{4}$; 3:1 ; f) $P(p<10) = \frac{17}{36}$; 17:19 ;

g) $P(3|p) = \frac{5}{9}$; 5:4 .

Chancengleichheit z.B. auch für E = "3|s oder s > 9" .

3) a) $P = \frac{1}{15}$; b) $P = \frac{1}{5}$; c) $P = \frac{3}{5}$; d) $P = \frac{1}{5}$; e) $P = \frac{1}{15}$.

4) a) 1. Vorschlag: 48 Groschen für A , 36 Groschen für B ;
2. Vorschlag: 56 Groschen für A , 28 Groschen für B .

b) Gerechte Verteilung: A:B = 3:1 , also 63 Groschen für A , 21 Groschen für B .

Zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben

1) 14 Schüler erhielten die Note 3 .

2) $z = 59$. 3) $L = \{36\}$. 4) $L = \{119; 182\}$.

5) $L = \{0; 60; 120; 180; 240\}$. 6) $x = 135$, $y = 42$. 7) $L = \{24\}$.

8) b) 36 Zahlen c) kleinste Zahl: 154869 ; größte Zahl: 968451 .

9)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
ggT(a;b)	$10 = 2 \cdot 5$	$4 = 2^2$	$1 = 1$	$28 = 2^2 \cdot 7$	$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$	$13 = 13$
kgV(a;b)	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$	$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	$2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$

11) a) ggT(4891; 1407) = 67 ; b) ggT(5083; 1955) = 391 ;
c) ggT(4301; 13464) = 187 ; d) ggT(2744; 675) = 1 .

12) a) ggT(4539; 2193) = 51 , kgV(4539; 2193) = 195177 ;
b) ggT(819; 935) = 1 , kgV(819; 935) = 765765 ;
c) ggT(3689; 12121) = 527 ; kgV(3689; 12121) = 84847 ;
d) ggT(41275; 4572) = 127 ; kgV(41275; 4572) = 1485900 .

Gleichungen und Sachaufgaben

1) a) $x = 5$; b) $x = \frac{2}{3}$; c) $x = 12$; d) $x = 6$;
e) $x = 11$; f) $x = 20$; g) $x = 300$; h) $x = 375$;
i) $x = 210$; k) $x = 360$; l) $x = 5$; m) $x = 12$.

2) a) $x < \frac{3}{4}$; b) $x < \frac{33}{5}$; c) $x < \frac{3}{8}$; d) $x > \frac{26}{5}$;
e) $x > \frac{24}{7}$; f) $x < \frac{20}{67}$.

3) $(5x + 15):5 - x = 3$ ist eine allgemeingültige Gleichung .

4) Ist x die gedachte und y die genannte Zahl, dann gilt $x = (y - 8):3$.

5) 1. Teilstrecke: $\frac{40}{9}$ m ; 2.Teilstrecke: $\frac{20}{9}$ m ; 3.Teilstrecke: $\frac{40}{3}$ m .

6) a) Gesamtstrecke: 375 km ; b) 1.Tag: 150 km , 2.Tag: 1257 km .

7) 1.Teil: $\frac{5}{3}$ m = $1\frac{2}{3}$ m ; 2.Teil: $\frac{25}{3}$ m = $8\frac{1}{3}$ m .

8) 1.Tag: 80 km ; 2.Tag: 120 km .

9) Juni: 155 Tische ; Dezember: 215 Tische .

10) 210 € . 11) 2,40 € . 12) 70 m .

13) a) Der Zuhörer im Saal hört den Redner nach Fehler! Sekunden ;
b) Der Rundfunkhörer hört den Redner nach Fehler! Sekunden, also früher .

14) a) 7,765.. km $\approx$ 7,8 km ; b) 27954,.. km $\approx$ 28000 km .

15) 0,3844 ha $\approx$ 0,38 ha .

16) Die Terrasse ist 9,6 m breit . 17) 1000 DM .

18) a) $a_1 = 15$, $a_2 = 6$, $a_3 = 21$, $a_4 = 41$;
b) $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \{ (11; 4; 15; 29), (7; 2; 9; 17) \}$.

19) Auto von Arnd: $13\frac{1}{3}$ Sekunden ; Auto von Bert: 8 Sekunden .

Aussagen , Aussageformen und Terme

2) (1) falsche Einzelaussage ;
(2) Definition
(3) Term ;
(4) wahrscheinlich wahre Allaussage ;
(5) erfüllbare Aussageform ;
(6) wahre Allaussage ;
(7) allgemeingültige Aussageform ;
(8) wahre Existenzaussage ;
(9) Term ;
(10) wahre Allaussage ;
(11) Term ;
(12) Definition ;
(13) wahre Allaussage ;
(14) erfüllbare Aussageform
(15) wahre Allaussage ;
(16) erfüllbare Aussageform ;
(17) nicht erfüllbare Aussageform ;
(18) wahre negierte Existenzaussage
(19) erfüllbare Aussageform ;
(20) wahre Allaussage ;
(21) Definition ;
(22) wahre Allaussage ;
(23) wahre Allaussage ;
(24) wahre Allaussage ;
(25) erfüllbare Aussageform ;
(26) Term ;
(27) erfüllbare Aussageform ;
(28) wahre Einzelaussage ;
(29) Term ;
(30) erfüllbare Aussageform .

3) a) $x = 2$; z.B. $x = 5$; b) $x = \frac{1}{2}$; z.B. $x = 1$;
c) alle $x \in Q_+$; kein $x \in Q_+$ d) kein $x \in Q_+$; alle $x \in Q_+$

4) a) {1,2,3,6} ; b) {0,6,12,...,6k,...} ;
c) {0,1,2,3} ; d) {6} ;
e) {0,1,2,3,6,12,...,6k,...} ; f) {1,2,3} ;
g) {0,1,2,3,6} ; h) {2,6,10,...,2+4k,...} ;
i) $\emptyset$; j) {2,6} ;
k) {1,2,3,6} ; l) $\{\frac{3}{2}\}$;
m) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$; n) Q_+ ;
o) $\emptyset$; p) $\emptyset$;
q) Q_+ .

Mengenlehre

2) Jede Menge mit n Elementen besitzt genau 2^n Teilmengen.

3) a) $B \subset C \subset A$; b) $F \subset E \subset D$; c) $Q \subset R \subset P \subset T \subset V$.

4) $M \cup N = \{ 0, 1, 3, 4, 7, 8, 11, 12 \}$; $M \cap N = \{ 3, 8 \}$.

5) a) $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 \}$; b) $A \cup C = \{ 1, 3, 4, 5, 7, 8 \}$;
c) $B \cup C = B$; d) $A \cap B = \{ 7, 8 \}$; e) $A \cap C = \emptyset$; f) $B \cap C = \{ 4 \}$;
g) $A \cup B \cup C = A \cup B$; h) $A \cap B \cap C = \emptyset$; i) $(A \cup B) \cap C = C$;
j) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{ 4, 7, 8 \}$; k) $[(A \cap B) \cup C] \cup (A \cup C) = A \cup C$.

6) $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$.

7) (1) Wahr ; (2) Falsch ; (3) Falsch ; (4) Wahr .

9) a) 1 Sportler kann alle drei Übungen .
b) Kein Sportler kann nur den Salto .
c) 7 Sportler können nur Kopfstand .

10) a) 24 Teilnehmer beherrschen nur eine der drei Sprachen. [4+9+11 = 24 .]
b) 1 Teilnehmer beherrscht keine der drei Sprachen. [39 - (1+2+7+4+4+9+11) = 1 .]

Das Umformen und Umkehren von Sätzen

2) (K1) $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha, \beta$ sind keine Scheitelwinkel .
Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, dann können sie keine Scheitelwinkel sein.
Ungleich große Winkel sind niemals Scheitelwinkel.

(K6) nicht (2|a und 5|a) $\Rightarrow$ nicht 10|a .
(nicht 2|a oder nicht 5|a) $\Rightarrow$ nicht 10|a .
Wenn eine Zahl nicht sowohl durch 2 als auch durch 5 teilbar ist, dann ist sie auch nicht durch 10 teilbar.
Eine Zahl, die nicht durch 2 oder nicht durch 5 teilbar ist, kann niemals durch 10 teilbar sein.

(K8) nicht n|(a+b) $\Rightarrow$ nicht(n|a $\wedge$ n|b) .
nicht n|(a+b) $\Rightarrow$ (nicht n|a) $\vee$(nicht n|b) .
Wenn eine Summe nicht durch n teilbar ist, dann können nicht beide Summanden durch n teilbar sein.
Bei einer Summe, die nicht durch n teilbar ist, muß stets mindestens ein Summand nicht durch n teilbar sein.

3) Falsche Aussagen: (U1), (U2), (U3), (U7), ($U_1$7), ($U_2$7), (U8), (U9), ($U_2$9), (U10), ($U_1$10).
(S5) 9|QS(a) $\Rightarrow$ 9|a ; (U5) 9|a $\Rightarrow$ 9|QS(a) ; (Z5) 9|a $\Leftrightarrow$ 9|QS(a) .
(S9) (x ger.)$\wedge$(y unger.) $\Rightarrow$ (xy ger.) ; ($U_1$9) (xy ger.)$\wedge$(y unger.) $\Rightarrow$(x ger.) ;
(S9) (y unger.) $\Rightarrow$ [(x ger.) $\Rightarrow$ (xy ger.)] ; ($U_1$9) (y unger.) $\Rightarrow$ [(xy ger.) $\Rightarrow$ (x ger.)]
($Z_1$9) (y unger.) $\Rightarrow$ [(x ger.) $\Leftrightarrow$ (xy ger.)] .
Weitere wahre Aussagen: (U4) für gebrochene Zahlen; (U6) ; ($U_1$8) , ($U_2$8) ; ($U_2$10) .

4) a) (S) [2|x $\wedge$ 3|QS(x)] $\Rightarrow$ 6|x ; (U) 6|x $\Rightarrow$ [2|x $\wedge$ 3|QS(x)] wahr ;
(Z) [2|x $\wedge$ 3|QS(x)] $\Leftrightarrow$ 6|x . Damit sind auch (U_1),(U_2),(Z_1) und (Z_2) wahr.
b) Für zwei Parallelogramme mit den Grundseiten a_1 , a_2 und den Höhen h_1 , h_2 gilt:
(S) $a_1 = a_2 \wedge h_1 = h_2 \Rightarrow A_1 = A_2$; (U_1) und (U_2) sind wahre Aussagen.
(Z_1) $a_1 = a_2 \Rightarrow [h_1 = h_2 \Leftrightarrow A_1 = A_2]$; (Z_2) $h_1 = h_2 \Rightarrow [a_1 = a_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2]$.

Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen

1) a) Wenn $g \| h$, dann $Sp(g) \circ Sp(h) = V(\overrightarrow{PP'})$, wobei $PP' \perp g$ und $\overline{PP'} = d(g;h)$.
b) Wenn $g \perp h$, dann $Sp(g) \circ Sp(h) = Sp(S)$, wobei $g \cap h = \{S\}$.
c) Wenn $g \cap h = \{M\}$, dann $Sp(g) \circ Sp(h) = Dr(M;\varphi)$, wobei $\varphi = 2 \sphericalangle(g;h)$.

2) $Sp(P) \circ Sp(Q) = V(2\overrightarrow{PQ})$.

3) a) Stets gilt $V(\overrightarrow{PP'}) \circ V(\overrightarrow{QQ'}) = V(\overrightarrow{QQ'}) \circ V(\overrightarrow{PP'})$.
b) Für $g \neq h$ und $g \| h$ gilt stets $Sp(g) \circ Sp(h) \neq Sp(h) \circ Sp(g)$.
c) Für $P \neq Q$ gilt stets $Sp(P) \circ Sp(Q) \neq Sp(Q) \circ Sp(P)$.

5) $ABCD \xrightarrow{V(\overrightarrow{AE})} EFGH$; Sei $P(1;0)$, $M(4;3)$ und $g = PM$. Dann gilt
$ABCD \xrightarrow{Sp(g)} EHGF$; $ABCD \xrightarrow{Sp(M)} GHEF$ mit $Sp(M) = Dr(M;180°)$.

7) Die Gerade g schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten (12;0) und (0;12) .

8) Sei $P(7;4)$, $Q(7;8)$, $R(7;0)$. Dann gilt
$ABCD \xrightarrow{Dr(P;180°)} C'D'A'B'$; $ABCD \xrightarrow{Dr(Q;\,90°)} B'C'D'A'$;
$ABCD \xrightarrow{Dr(R;\,-90°)} D'A'B'C'$.

Geometrische Bestimmungsaufgaben

1) $\alpha = \gamma = 54°$; $\beta = \delta = 126°$.

2) $\alpha = \delta = 81°$; $\beta = \varphi = 27°$; $\gamma = \psi = 72°$.

3) a) $\delta = 110°$; $g_1 \| g_2$.
b) $\delta = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$.

4) $\varepsilon = \alpha - \delta + 180°$.

5) $\gamma = \alpha + \beta$.

6) a) $\sphericalangle ACM = 21°$; $\sphericalangle ACB = 90°$; b) $\sphericalangle ACM = \frac{1}{2}\varphi$; $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\varphi + 90° - \frac{1}{2}\varphi = 90°$.

7) $u = 160$ cm .

8) $V = 0{,}122$ m³ .

9) $h_i = 30$ cm ; $h_a = 30{,}5$ cm .

10) $V = 315$ cm³ ; $(9 \cdot 7 \cdot 5 = 315)$.

11) $\overline{AC} : \overline{AB} = 1 : 2$.

12) $J(AEF) = \frac{3}{8}a^2$.

13) $J(AEF) = \frac{1}{2}(1 - p^2)a^2$.

14) $\delta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

15) $\gamma = 75°$.

Geometrische Konstruktionsaufgaben

1) $99° = 3 \cdot 36° - \frac{1}{4} \cdot 36° = 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot 36°$.

2) $a = \frac{1}{2}(s + d)$; $b = s - a = \frac{1}{2}s - d$.

3) 2 Lösungen . 4) 2 Lösungen . 5) 1 Lösung . 6) 0 Lösungen .
7) 1 Lösung . 8) 2 Lösungen . 9) 0 Lösungen . 10) 1 Lösung .
11) 1 Lösung .

Vermischte Aufgaben

1) 10 Goldmedaillen, 21 Silbermedaillen, 11 Bronzemedaillen .

2) $L = \{ 1 \}$. 3) $a = 20$ mm . 4) Fehler!

5) $x = 346$; $y = 1664$.

6) Aufbruch 7.24 Uhr ; Ankunft 7.48 Uhr .

7) Ruth - Schwimmen ; Marion - Volleyball ; Petra - Tischtennis .

8) 220 Minuten .

9) 1.Abschnitt: 20 Stunden ; 2.Abschnitt: 60 Stunden ; 3.Abschnitt: 30 Stunden .

10) 2 cm² . 11) 360 km . 12) $z = 6789$; $z' = 6987$.

13) 1 Pyramide = 9 Kugeln . 14) $a = 13$ mm .

15) a) $P = \frac{1}{28}$; b) $P = \frac{4}{28}$; c) $P = \frac{16}{28}$; d) $P = \frac{6}{28}$; e) $P = \frac{1}{28}$.

16) Kinder: 2 , 4 und 8 Jahre ; Mutter: 28 Jahre ; Vater: 30 Jahre ; Großvater: 72 Jahre.

17)

	voll	halb	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halb	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

18) Ja ; 2·4·2 = 16 Menüs . 19) a) $A = 27$ cm² ; b) $A = h(3e + 2f) - 2fg$.

20) 59295 . 21) 40 , 50 , 120 . 22) Nein .

23) Nein ; Es dürfen nicht in beiden Schalen eine gerade Anzahl von Nüssen liegen.

24) 20 Tage .

25) a) $L = \{ (50;50;60), (60;60;40), (70;70;20) \}$; b) $L = \{ (70;60;30), (70;50;40) \}$.

26) $s = 360 \cdot 11111 = 3999960$. 27) a) Nein ; b) Nein .

28) 11 Möglichkeiten .

29) Alfred Erben ; Detlef Dürer ; Egon Baumbach ; Benno Ampler .

30) J(BCDK) = J(KDEL) = 135 cm² ; J(ABLH) = 108 cm² ; J(HEFG) = 63 cm² .

31) a) $L = \{ \frac{14}{35} \}$; b) $L = \{$ Fehler! , Fehler! , Fehler! $\}$.

34) Genau ein Fach: 24 Schüler ; kein Fach: 1 Schüler .

35) a) 210 mal ; 140 mal ; 105 mal ;
b) 39,60 m ; 1000 Pedalumdrehungen ;
c) 200 Pedalumdrehungen .

36) a) $\frac{10}{3}$; $\frac{22}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; $\frac{497}{10}$.

37) Chancenverteilung 25:36 .

38) a) Vater: 51 Jahre ; Mutter: 42 Jahre ; 1.Kind: 16 Jahre ; 2.Kind: 15 Jahre .
b) Nein ; auch (60; 33; 17; 14) ist eine Lösung .

39) 309 Zahlen .

40) a) $\frac{24}{25}$; b) $\frac{24}{25}, \frac{35}{36}, \ldots, \frac{1}{12}$; c) $\frac{24}{25}, \ldots, \frac{63}{64}$; d) $\frac{24}{25}$ bis $\frac{80}{81}, \ldots, \frac{1}{20}$; e) $\frac{24}{25}, \ldots, \frac{2499}{2500}$.

41) a) 10 Personen ; b) 30 Personen ;
c) 25 Personen kein Ohr ; 20 Personen keine Hand ; 15 Personen kein Bein .

42) $\varphi \in \{ 30°; 75° \}$.

43) a) Arnd: Radsport / Lehrmittelbau ; Bernd: Turnen / Gartenbau ; Claus: Mathe / Volleyball.
b) Nicht eindeutig lösbar ; { (A;Ra;Ma), (B;Tu;Ga), (C;Ma;Le) } als zweite Lösung .
c) Keine Lösung ; Bedingung (6) widerspricht den Bedingungen (1) bis (5) .

44) Nein ; 2080 € oder 2010 € als Lösungen .

45) $\delta = 51°$; $\varepsilon = 54°$; $\varphi = 75°$.

46) a) $a_1 = 27$, $a_2 = 19$, $a_3 = 8$, $a_4 = 35$;
b) $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \{ (12; 9; 3; 15), (21; 15; 6; 27) \}$.

47) a) $\delta = 30°$; b) $\delta = 90° - 3\alpha$; c) $\alpha = 22{,}5°$; d) $\alpha = 22{,}5°$; e) $\delta = 45°$.

48) Antons Auto braucht 52,5 Sekunden, Bodos Auto braucht 35 Sekunden .

49) (5) ist die falsche Aussage ; B < C < D < E < A .

50) 6 Möglichkeiten: x = 5s = 3s+k = 2s+f = s+2k = k+f = g ; s<k<f<g ; k=2s , f=3s , g=5s .

51) x = 4 ; x = 3 ; (x = 5,5 führt zu einem Widerspruch zur Dreiecksungleichung) .

52) Die Folgerung "Die Klasse hat 29 Schüler" widerspricht der Angabe "Die Klasse hat 28 Schüler" .

53) Arno 28 Jahre ; Bernd 21 Jahre . 54) 33 siebenstellige Zahlen .

55) a) Herr Knobel ; b) Herr Apel .

56) a) (8; 4; 2; 1) , (5; 4; 2; 1) , (6; 3; 2; 1) ;

b) (64; 32; 16; 8; 4; 2; 1) ;

c) (15; 14; 7; 6; 3; 2; 1) ;

d) größte Zahl: $g(n) = 2^{n-1}$; $g(7) = 64$, $g(10) = 512$, $g(11) = 1024$;
kleinste Zahl: $k(2n+1) = 2^{n+1} - 1$; $k(7) = 15$, $k(11) = 63$;
$k(2n) = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$; $k(10) = 47$.

57) 29 Schüler .

58) $14{,}7 \approx 15$ mal .

59) a) M U I U ; M I U U ;
b) Nein ;
c) Ja ; (R1), (R2), R(2) ;
d) (R2), (R2), (R3), (R2) ;
e) (R2), (R2), (R2), (R1), (R3), (R3), (R4) .

60) a) 1:2 ; b) 2:3 , 2:5 ; c) J(Streifen):J(2n-Eck) = 2:n .

61) a) $B = A_2$; b) Jeder Punkt auf dem Wegstück $\overrightarrow{A_3A_4}$.

62) a) 1 , 4 , 6 und alle $n > 6$;

c) 1 , 8 , 15 , 20 , 22 , 27 , 29 , 34 , 36 , 38 , 39 , 41 , 43 , 45 , 46 , 48 , 50 , 51 , 52 , 53, 55 , 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69 und alle $n > 69$.

63) $x = 12012\,k - 10$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$.

64) Fischer ist Poet und liest das Drama von Jordan;
Götting ist Astronom und liest das Prosawerk von Hauser;
Hauser ist Schriftsteller und liest Gedichte von Fischer;
Jordan ist Dramatiker und liest das Astronomiebuch von Götting.

Literaturverzeichnis

1. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6 . Chemnitz, 1995 .
2. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6 . Chemnitz, 1990 .
3. Aufgabensammlung für Kreisarbeitsgemeinschaften - Klasse 6 . TU Karl-Marx-Stadt, 1982 .
4. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5 . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1993 .
5. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 7 . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1994 .
6. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 8 . (überarbeitete Auflage); Chemnitz, 1994 .
7. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 9 . Chemnitz, 1993 .
8. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 10 . Chemnitz, 1994 .
9. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 - eine Anleitung für AG-Leiter. Chemnitz 1990 .
10. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 7 - eine Anleitung für AG-Leiter. (überarbeitete Auflage); Chemnitz 1994 .
11. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 8 - eine Anleitung für AG-Leiter. (überarbeitete Auflage); Chemnitz 1994 .
12. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 9 - eine Anleitung für AG-Leiter. Chemnitz 1993 .
13. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 10 - eine Anleitung für AG-Leiter. Chemnitz 1994 .
14. Häberlein, Ralf: Programm zur Durchführung von Arbeitsgemeinschaften Mathematik in Klasse 6. Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt, 1979 .
15. Meinelt, Frank: Programm zur Durchführung von Zirkeln zur Geometrie in Kreisarbeitsgemeinschaften Mathematik in Klasse 6 . Diplomarbeit, TH Karl-Marx-Stadt, 1984 .
16. König, Helmut: Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich. TU Karl-Marx-Stadt, 1984, (Nachdruck 1990, überarbeitete Auflage in Vorbereitung) .
17. König, Helmut: Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen . In: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 38, Heft 3, Mai 1992, S.24 - 38 .
18. König, Helmut: Zum Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Arbeitsgemeinschaften und in Korrespondenzzirkeln. In: Förderung von Jugendlichen in der Mathematik. K.H. Bock, Bad Honnef, 1993 .
19. König, Helmut: Zur Darstellung der Lösung mathematischer Aufgaben im außerunterrichtlichen Bereich. TU Karl-Marx-Stadt, 1978, (Nachdruck 1988, überarbeitete Auflage in Vorbereitung).