**Bezirkskomitee Chemnitz**
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

HELMUT KÖNIG

# Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 - eine Anleitung für AG- Leiter

Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math. - nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

HELMUT KÖNIG

# Arbeitsgemeinschaften Klasse 5 -

# eine Anleitung für AG-Leiter

# Inhalt


| | Seite |
|---|---|
| Einleitung | 2 |
| 1. Zu Ziel und Inhalt der Arbeitsgemeinschaften in Klasse 5 | 5 |
| 1.1. Heuristische Vorgehensweisen | 6 |
| 1.2. Logische Grundlagen | 13 |
| 1.3. Sachkenntnisse und Fertigkeiten | 15 |
| 2. Zu einigen organisatorischen und didaktischen Fragen | 16 |
| 3. Vorschläge zum Gestalten der Zirkel | 20 |
| 3.1. Wer ist wer? | 20 |
| 3.2. Wir schließen auf die Einheit und lösen Sachaufgaben | 29 |
| 3.3. Aufgaben, die man im Finstern löst | 34 |
| 3.4. Wir lernen systematisch arbeiten und geschickt zählen | 35 |
| 3.5. Zahlen werden gesucht | 47 |
| 3.6. Magische Quadrate | 53 |
| 3.7. Hier helfen Variable, Tabellen und Gleichungen | 57 |
| 3.8. Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen | 62 |
| 3.9. Wir lösen Kryptogramme | 65 |
| 3.10. Hier können Skizzen helfen | 74 |
| 3.11. Mengendiagramme helfen beim Lösen von Aufgaben | 80 |
| 3.12. In einem Zug | 83 |
| 3.13. Wir suchen Vermutungen | 85 |
| 3.14. Aufgaben über Flächen und Körper | 91 |
| 3.15. Vermischte Aufgaben | 100 |
| 4. Einige mathematische Spiele | 107 |
| 4.1. Zum Rückwärtsarbeiten | 109 |
| 4.2. Zum Symmetrieprinzip | 112 |
| 4.3. Zum systematischen Probieren | 117 |
| 4.4. Zum Rückführungsprinzip | 123 |
| 4.5. Zu weiteren Strategien | 125 |
| 5. Einige mathematische Scherzfragen und Knobeleien | 127 |
| 6. Lösungen zur "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5" | 132 |
| Literaturverzeichnis | 139 |

# Einleitung

Vorliegende Anleitung ist eine überarbeitete und stark erweiterte Fassung der unter gleichem Namen 1989 erschienenen Auflage, die 1993 bereits einmal überarbeitet wurde. Sie gehört zur "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5" /1/ die eine überarbeitete Fassung der Aufgabensammlung /2/ ist, an deren Erarbeitung und Erprobung Britta Haufe und Milena Krüger mit ihrer Diplomarbeit /15/ maßgeblich beteiligt waren.

Unser Ziel besteht darin, Lehrern bei der Förderung mathematisch interessierter Schüler zu helfen. Dies wird fortgeführt durch die Aufgabensammlungen /3/ bis /7/ für die Klassen 6 bis 10 sowie die zugehörigen Anleitungen /10/ bis /14/.
Das genannte Material wird den Gymnasien in Sachsen zur Unterstützung der Förderung mathematisch interessierter Schüler angeboten, und es haben auch schon andere Bundesländer (vor allem Nordrhein-Westfalen, Thüringen, Sachsen-Anhalt und Bayern) dieses Angebot genutzt.
Seit einiger Zeit wenden wir uns verstärkt der Unterstützung der Förderung von Schülern der Grundschulen zu. In diesem Zusammenhang sind bisher die Aufgabensammlung /8/ und die zugehörige Anleitung /15/ entstanden.

Die Aufgabensammlung /2/ wurde für "Kreisarbeitsgemeinschaften" ausgearbeitet, in denen interessierte Schüler aus verschiedenen Schulen zusammengefasst wurden. Erprobt wurde dieses Material im Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend in Chemnitz "spektrum", wo Mathematiklehrerstudenten des 2. bis 5. Studienjahres bis zum Schuljahr 1990/91 unter Anleitung von Mitarbeitern der TU Chemnitz für Schüler der Klassenstufen 5 bis 10 mathematische Zirkel durchführten. In Diplomarbeiten wurden Zirkelvorbereitungen für jeweils 36 derartige Zirkel festgehalten, in denen die Lehrerstudenten (die ja zu Beginn dieser zusätzlichen Ausbildung auf dem außerunterrichtlichen Bereich noch keine Unterrichtsversuche gehalten hatten) konkrete Hinweise über Ziel, Inhalt und didaktische Gestaltung eines jeden solchen Zirkels erhielten.

Vorliegende Anleitung soll einen ganz anderen Zweck erfüllen. Sie wendet sich an erfahrene Lehrer, die - in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und den Interessen der zu fördernden Schüler - für die Festlegung der Ziele, die Auswahl der Inhalte und die didaktische Gestaltung selbst verantwortlich sind.
Die Aufgabensammlung /1/ ist mit 182 Aufgaben sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades, die insgesamt 330 Teilaufgaben enthalten, so umfangreich angelegt, dass sie für sehr verschiedene Zwecke geeignet ist.
Nach wie vor empfehlen wir, besonders begabte und interessierte Schüler aus mehreren Schulen in sogenannten *"Kreisarbeitsgemeinschaften"* zusammenzufassen, weil dadurch eine effektive Begabtenförderung sehr erleichtert wird.
Eine weit umfangreichere Nutzung dürfte dieses Material jedoch in *Schularbeitsgemeinschaften* finden, zu deren Teilnehmern vor allem mathematisch interessierte Schüler gehören.
Wir wenden uns aber auch an Lehrer, die im Rahmen der *inneren Differenzierung* in ihrem *Unterricht* einzelne, besonders interessierte und befähigte Schüler fördern oder die sich ganz allgemein Anregungen für eine Auflockerung ihres Unterricht holen möchten.
Bei all diesen Aktivitäten geht es stets um eine *zweiseitige Zielstellung* : Einerseits wollen wir interessierten und begabten Schüler die Möglichkeit geben, ihren Interes-

sen nachzugehen und dabei ihre Begabung zu entwickeln, andererseits wollen wir dazu beitragen, auf lange Sicht geeignete Bewerber für ein mathematisch-naturwissenschaftliches oder technisches Studium zu entwickeln und zu gewinnen.
In Klasse 5 kommt noch die Aufgabe hinzu, die in der Grundschule einsetzenden Aktivitäten zum *Finden mathematisch begabter Schüler* fortzusetzen. Viele der in Abschnitt 5. besprochenen Scherzfragen und Knobeleien können helfen, begabte Schüler zu entdecken, und wir werden auch auf Aufgaben aus anderen Abschnitten hinweisen, die diesem Zweck dienen können.

Dem frühzeitigen Erkennen und systematischen Fördern mathematisch begabter Schüler dient auch der 1981 in unserem Bezirk eingeführte *Adam-Ries-Wettbewerb* für Schüler der Klassenstufe 5 (vgl. hierzu /9/ und /16/). Es ist sehr erfreulich, dass dieser Wettbewerb die Wende nicht nur überdauerte, sondern dass er sogar erweitert und verbessert werden konnte. Seit 1992 wird dieser Wettbewerb in den Ländern Bayern/Oberfranken, Thüringen und Sachsen durchgeführt. Seine 1. Stufe ist ein Hausaufgabenwettbewerb und wird auf Schulebene durchgeführt. Die 2. Stufe ist ein Klausurwettbewerb für je 50 ausgewählte Schüler der Klassenstufe 5 auf Landesebene. Die 3. Stufe ist ein Klausurwettbewerb für je 10 ausgewählte Schüler pro Land in Annaberg-Buchholz. Seit 1993 wurde dieser "Dreiländerwettbewerb" durch die Teilnahme von 10 Schülern aus Tschechien zu einem "Vierländerwettbewerb" erweitert.
Es sollte abgesichert werden, dass alle mathematisch interessierten Schüler einer Schule an der 1. Stufe des ARW teilnehmen.

Wir wenden uns nicht nur an die Gymnasien, sondern auch an die Mittelschulen, da vor allem in ländlichen Kreisen in den Klassen 5 der Mittelschulen ebenfalls mathematisch interessierte und begabte Schüler zu finden sind.
Den Gymnasien schlagen wir vor, auf jeden Fall für Schüler der Klasse 5 eine Schularbeitsgemeinschaft anzubieten. Im Freistaat Sachsen gibt es an jedem Gymnasium einen *"Beauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe"*, der für die Verwirklichung der vom *"Sächsischen Landeskomitee zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler"* formulierten Ziele an seinem Gymnasium sorgen soll. Wir wenden uns mit unseren Aufgabensammlungen und Anleitungen daher vor allem auch an diese Kolleginnen und Kollegen.

Die *"Breitenförderung"* an den Gymn asien macht jedoch eine *"Spitzenförderung"* besonders befähigter Schüler nicht überflüssig.
Im Regierungsbezirk Chemnitz wurden in jedem der 12 Kreise ein "Beauftragte für Begabtenförderung und Wettbewerbe" mit der Entwicklung einschlägiger Aktivitäten betraut, wozu eine enge Zusammenarbeit mit den genannten Beauftragten der 67 Gymnasien in unserem Regierungsbezirk eine notwendige Voraussetzung ist.
Besonders günstige Verhältnisse bestehen diesbezüglich in der Stadt Chemnitz, wo im *Mathematikzentrum des Hauses der Kinder und Jugend "spektrum"* nach wie vor für besonders interessierte und begabte Schüler der Klassen 5 bis 10 *"Kreisarbeitsgemeinschaften"* durchgeführt werden

Zur Popularisierung und Durchsetzung unserer Absichten führen wir ab Schuljahr 1993/94 im Regierungsbezirk Chemnitz eine *Weiterbildung für Lehrer* durch, die sich mit fachlichen und didaktischen Aspekten einer derartigen Förderung von interessierten Schülern im unterrichtlichen und im außerunterrichtlichen Bereich befasst.

Auf diese Weise gelingt es, mit denjenigen Kolleginnen und Kollegen in persönlichen Kontakt kommen, die sich für das Gebiet der Begabtenförderung interessieren und auf deren engagierte Arbeit wir angewiesen sind.

Ferner geht es darum, in enger Zusammenarbeit mit den Elternhäusern begabte und interessierte Schüler über *Fördermöglichkeiten und Wettbewerbe* zu informieren.
Seit 1995/96 gibt es den *Korrespondenzzirkel Mathematik* auch für Schüler der Klassen 5 und 6.
Wir hoffen, dass außer in Chemnitz auch noch in anderen Schulamtsbereichen *Kreisarbeitsgemeinschaften* eingerichtet werden.
In mehreren Schulamtsbereichen werden bereits wieder *Spezialistenlager* als weitere Förderform vor allem für Schüler der niederen Klassenstufen durchgeführt.
Auf den *Adam-Ries-Wettbewerb* wurde bereits hingewiesen.
Schüler der Klasse 5 können erstmals an der 1. Stufe (Hausaufgabenwettbewerb, September bis Oktober auf Schulebene) und der 2. Stufe (Klausurwettbewerb im November auf Kreisebene) der *Mathematik-Olympiade* teilnehmen.
Für besonders leistungsstarke Schüler ist bei der 2. Stufe der MO auch ein *Frühstart in Olympiadeklasse 6* möglich. Auf diese Weise haben sie die Chance, auch an der 3. Stufe der MO *(Landesolympiade* im März*)* teilzunehmen, die für Schüler der Klassenstufe 6 bis 12 durchgeführt wird.
Erfreulicherweise sind in den letzten Jahren vor allem für die niederen Klassenstufen wieder *Wettbewerbe zwischen Kreisen* entstanden, die ein sehr effektives Hilfsmittel sind, um Schüler zu einer intensiven außerunterrichtlichen Beschäftigung mit Mathematik zu motivieren.

Nähere Informationen zu den im Regierungsbezirk Chemnitz durchgeführten Fördermaßnahmen und Wettbewerben findet man unter www.bezirkskomitee.de .

Mein besonderer Dank gilt Herrn L. Pörnig für das Lesen der Korrektur und Hilfe beim Überarbeiten der vorliegenden Anleitung.

*Wir würden uns freuen, wenn uns Nutzer dieses Materials ihre Erfahrungen, Einschätzungen und Verbesserungsvorschläge mitteilen würden!*

**Hinweis:**
Eine Überarbeitung der zugehörigen Aufgabensammlung für Klasse 5 (und auch dieser Einleitung) wurde im Januar 2002 abgeschlossen.
Hierbei ging es vor allem um eine Anpassung an die neue Rechtschreibung und bei 4 Aufgaben wurde "DM" durch "€" ersetzt.
Die Lösungen in der Anleitung wurden entsprechend überarbeitet.

# 1. ZU ZIEL UND INHALT DER ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IN KLASSE 5

Beim systematischen Fördern mathematisch interessierter und begabter Schüler geht es in dieser Klassenstufe vor allem um die Entwicklung der Komponente *"Denkfähigkeit"*. Die effektivste Art der Förderung besteht dabei darin, die Schüler stets an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit zu fordern. Die Zirkel sind daher stets so zu gestalten, daß die leistungsstärksten Schüler nicht unterfordert werden.
Im allgemeinen werden die Leistungsunterschiede zwischen den AG-Mitgliedern im Laufe des Schuljahrs eher zunehmen als abnehmen. Daher sind Maßnahmen der *inneren Differenzierung* von großer Bedeutung.

Die Aufgabensammlung /1/ enthält 14 verschiedene Aufgabenarten sowie eine Klasse von "vermischten" Aufgaben. Zunächst muß der AG-Leiter in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit und den Interessen seiner AG-Mitglieder eine Auswahl treffen. Eine besonders enge Beziehung zum Unterrichtsstoff haben die im Inhaltsverzeichnis angegebenen Abschnitte 3.2., 3.7., 3.10. und 3.14. . Allerdings findet man hier manchmal auch recht schwierige Aufgaben, so daß es für Schul-AGn mit relativ geringem Leistungsniveau zu empfehlen ist, die Mehrzahl der angegebenen Aufgabenarten zu behandeln und dabei nur auf die leichteren Aufgaben einzugehen.

Zwar kann man davon ausgehen, daß Schüler, die an einer solchen AG teilnehmen, Interesse an der Mathematik und Freude am Knobeln mitbringen. Dennoch ist eine Weiterentwicklung der Komponente *"Einstellungen"* sehr wichtig. Schüler dieser Altersstufe müssen an ein bewußtes und beharrliches Arbeiten erst herangeführt werden.
Bei all dem darf man aber eines nicht vergessen: *Die außerunterrichtliche Arbeit soll den Schülern vor allem auch Spaß machen!*

Die Aufgabensammlungen der Klassen 6 bis 10 sind nach stofflichen Gesichtspunkten gegliedert (Arithmetik, Geometrie , Zahlentheorie, u.ä.). Dies wäre für eine AG Klasse 5 kaum möglich und sicher nicht nützlich. So haben wir uns entschlossen, eine Gliederung nach Aufgabenarten vorzunehmen, die mit Überschriften versehen wurden, die Interesse wecken sollen (z.B. "Wer ist wer?", "Aufgaben, die man im Finstern löst" usw.).
Im Inhaltsverzeichnis der Aufgabensammlung /1/ sind zu jeder der 15 Aufgabenarten knappe Hinweise auf die zu vermittelnden Verfahrenskenntnisse festgehalten. Bereits hieraus ist ersichtlich, daß wir vor allem auf das bewußte Vermitteln von *heuristischen Vorgehensweisen* (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel) Wert legen. Diese Zielstellung wird in den AGn der Klassen 6 bis 10 konsequent weitergeführt. Näheres hierzu findet man in /20/ .
Ferner geht es darum, einige *logische Grundlagen* zu vermitteln und den Schülern beizubringen, was alles zu einer exakten und vollständigen *Lösungsdarstellung* gehört. Näheres hierzu findet man in /21/ .
Von geringerer Bedeutung ist für uns das Vermitteln von *Sachkenntnissen* und *Fertigkeiten.*

## 1.1. Heuristische Vorgehensweisen

Im Unterschied zu algorithmischen Verfahren kann das Anwenden heuristischer Vorgehensweisen einen Lösungserfolg nicht garantieren, es erhöht sich dadurch lediglich die Wahrscheinlichkeit, zu einer Lösung zu gelangen.

Es ist möglich und wünschenswert, daß Schüler beim Lösen problemhafter Aufgaben gewisse heuristische Vorgehensweisen selbst entdecken und sie sich auf diese Weise besonders dauerhaft aneignen. Jeder erfahrene Aufgabenlöser entwickelt im Laufe der Zeit einen subjektiven Lösungsstil, bei dem meist unbewußt eine Reihe heuristischer Vorgehensweisen eingesetzt werden. Es wäre jedoch äußerst zeitraubend und uneffektiv, wollte man heuristische Schulung darauf beschränken, den Schülern nur viel Zeit zum selbständigen Lösen problemhafter Aufgaben zu geben und dann lediglich die von ihnen selbst entdeckten heuristischen Vorgehensweisen nachträglich abzuheben. Es lohnt, die im Lauf der letzten beiden Jahrtausende von erfolgreichen Problemlösern erworbenen Erfahrungen und Erkenntnisse aufzubereiten und weiterzugeben.

*Heuristisches Vorgehen* ist bis zu einem gewissen Grad *lehrbar.* Es reicht vom Anwenden relativ einfach anzueignender konkreter geistiger Techniken bis zum Einsatz sehr allgemeiner Prinzipien.
Wir vertreten die Ansicht, daß das *bewußte Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen in Form von Verfahrenskenntnissen* die Entwicklung des Schöpfertums der Schüler nicht behindert, sondern auf einem höheren Schwierigkeitsniveau sogar unterstützt, wenn bei deren Vermittlung bestimmte *didaktische Prinzipien* beachtet werden (siehe Abschnitt 2.).

Für uns besteht heuristische Schulung vor allem im Vermitteln gewisser *Fragen und Impulse,* die vom konkreten Inhalt der zu lösenden Aufgabe weitgehend unabhängig sind. Anders ausgedrückt: Heuristische Impulse unterscheiden sich dadurch von speziellen "Lösungstricks", daß sie auf viele unterschiedliche Aufgaben anwendbar sind.

Wir wollen nun einige heuristische Vorgehensweisen, mit deren Vermittlung in AGn der Klasse 5 begonnen werden kann, durch solche Fragen und Impulse charakterisieren. Ferner geben wir an, bei welchen Aufgabenarten die besprochenen Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel einsetzbar und damit auch lehrbar sind. Dabei verwenden wir Abkürzungen und die im Inhaltsverzeichnis der Aufgabensammlung /1/ verwendete Numerierung.
Zunächst wollen wir jedoch an die ***allgemeine Schrittfolge*** erinnern, die beim Lösen von Aufgaben einzuhalten ist:

1. Erfassen der Aufgabenstellung;
2. Finden eines Lösungsplans;
3. Ausführen des Plans ; Darstellen der Lösung ;
4. Kontrolle und Auswertung.

Heuristik spielt vor allem im 2. Schritt, teilweise aber auch im 1. Schritt und bei schwierigen Aufgaben auch im 4. Schritt eine Rolle. Lediglich das Darstellen der Lösung ist eine voll erlernbare Technik.

Wir charakterisieren zunächst den 1. Schritt und den 4. Schritt und betrachten anschließend die beim 2. Schritt einsetzbaren heuristischen Vorgehensweisen.

***Erfassen der Aufgabenstellung:***

- Sind alle vorkommenden *Begriffe klar?*
- Habe ich eine *ähnliche Aufgabe* schon einmal gelöst? Wie bin ich dabei vorgegangen?
- Ist eine günstige *Veranschaulichung* möglich? (*Tabelle*, *Skizze* u.ä.)
- Günstige *Bezeichnungen* einführen!
  - ° Geschickte Abkürzungen verwenden (für Personen, Objekte usw.)!
  - ° Welche Bezeichnungen sind im betreffenden Sachgebiet üblich?
- Was ist *gesucht*, was ist *gegeben?*
  Ich schreibe das Gegebene/Gesuchte unter Verwendung der gewählten Bezeichnungen heraus oder halte es in einer Tabelle, einer Skizze o.ä. fest.

***Kontrolle und Auswertung:***

- Ich überprüfe die Rechnungen (*Probe*; Vergleich mit *Überschlag*).
- Ich überprüfe das Resultat an der Aufgabenstellung (*Probe am Text*; Vergleich mit *Schätzungen*).
- Ich überprüfe, ob die Begründungen vollständig sind, ob die durchgeführte Fallunterscheidung vollständig ist, ob ich alle Anforderungen an eine vollständige und korrekte Lösungsdarstellung erfüllt habe.
- Ich überlege, was mir beim Lösen dieser Aufgabe besonders geholfen hat, und merke es mir (*Abspeichern der heuristischen Erfahrungen*). Ich formuliere eine Aufgabe, die sich *analog* lösen läßt.
- Ich versuche, die Aufgabe zu *verallgemeinern* oder eine andere *"verwandte" Aufgabe* zu finden.

***Das Analogieprinzip***

- Habe ich eine *ähnliche Aufgabe* schon einmal gelöst? Wie bin ich dabei vorgegangen? Welche *Hilfsmittel* habe ich verwendet?

In dieser einfachen Form wird dieses Prinzip bereits beim *Erfassen der Aufgabenstellung* eingesetzt.
Besonders gut trainierbar ist es beim Lösen von "15. Vermischte Aufgaben".

***Das Rückführungsprinzip:***

- Ich suche nach bekannten, bereits *gelösten Aufgaben*, auf die ich die gestellte Aufgabe *zurückführen* kann.

So wird etwa im Unterricht das Addieren von ungleichnamigen Brüchen auf das bekannte Addieren von gleichnamigen Brüchen zurückgeführt.
Das Berechnen der Anzahl verschiedener Anordnungen von n Elementen läßt sich zurückführen auf das Berechnen der Anzahl verschiedener Anordnungen von (n-1) Elementen.
Weitere Beispiele findet man in "4. Systematisches Arbeiten", "12. In einem Zug", "13. Vermutungen" und bei der Turm-von Hanoi-Aufgabe.

***Übergang zu einer einfacheren Aufgabe:***

- Ich beschäftige mich zunächst mit einem *Spezialfall* oder einem *vereinfachten Fall*, in der Hoffnung, so auf eine Lösungsidee zu kommen.

Beispiele hierfür findet man in "3. Im Finstern" und in "4. Systematisches Arbeiten".

Eine einfache Variante des ***Extremalprinzips*** lautet:

- Ich betrachte den *ungünstigsten Fall*, der eintreten kann.

Dieses Prinzip findet Anwendung in "4. Im Finstern".

Eine einfache Variante des ***Symmetrieprinzips*** lautet:

- Lassen sich vorhandene oder erzeugte Symmetrien für das Entdecken einer *Gewinnstrategie* ausnützen?"

Verwendung findet dieses Prinzip bei den *Spielen* "Nimm-Spiel-II", "Kein Rechteck", "Groschenspiel", "Knack" und "Rip-van-Winkle-Spiel" (vgl. Abschnitt 4.).

In Klasse 5 kann man den Schülern natürlich nur einen ersten Eindruck von der Wirksamkeit solcher Prinzipien vermitteln. Eine Ergänzung und Erweiterung in höheren Klassenstufen ist unerläßlich. Dabei lernen die Schüler nicht die Namen der Prinzipien, sondern die zugehörigen Fragen und Impulse kennen.

Dasselbe trifft auf die nun zu besprechenden ***HEURISTISCHEN STRATEGIEN*** zu:

***Vorwärtsarbeiten:***

- Was läßt sich aus den gegebenen Zahlen oder Größen unmittelbar berechnen? Begründung!
- Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründung!

Beispiele für dieses Vorgehen findet man in allen Aufgabenarten, vor allem in "1. Wer ist wer?", "6. Magische Quadrate", "9. Kryptogramme", "11. Mengendiagramme", "14. Flächen/Körper".

***Rückwärtsarbeiten:***

- Woraus ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Begründung!
- Von welcher Spielstellung ausgehend ließe sich der Gewinn unmittelbar erreichen? Begründung!

Beispiele für dieses Vorgehen findet man in "10. Skizzen", "11. Mengendiagramme", "14. Flächen/Körper" sowie bei "Nimm-Spiel-I", "Hundertspiel" und "Wer erreicht h8?" .

Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten wird oft kombiniert angewendet und wird bei den so erreichten *abgeleiteten* bzw. *hinreichenden Teilzielen* fortgesetzt.
Die auf diese Weise gefundenen *Lösungspläne* lassen sich durch ***Lösungsgraphen*** günstig festhalten.
Durch "Begründe" wird die Angabe des verwendeten *"Hilfsmittels"* (Formel, Satz, Umformungsregel u.ä.) gefordert.

Erst ab Klasse 6 gewinnt eine 2. Variante des Vorwärts- bzw. Rückwärtsarbeitens eine große Bedeutung, wo man zunächst nach einem günstigen *"Hilfsmittel"* sucht, das dann das zugehörige *"Teilziel"* liefert.

***Suche nach Gleichungen:***

- Führe günstige *Variable* ein und halte die gegebenen Beziehungen oder Bedingungen / die gefundene Gesetzmäßigkeit in Form einer *Gleichung* fest.

Beispiele für dieses Vorgehen findet man in "5. Zahlen", "7. Variable, Tabellen, Gleichungen", "9. Kryptogramme ", "13. Vermutungen" und "14. Flächen/Körper" .
Ab Klassenstufe 7 wird diese Strategie erweitert durch den Impuls

- Suche nach Gleichungen zwischen den gegebenen, den gesuchten und günstig gewählten *Hilfsgrößen*; eliminiere die Hilfsgrößen.

Diese Strategie wird eingesetzt, wenn das kombinierte Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten nicht zum Ziel führt.

***Systematisches Probieren*** läßt sich beim Lösen folgender Aufgabenarten einsetzen, wobei sich in beiden Fällen *Tabellen* als günstiges Hilfsmittel anbieten:

1. Ermitteln der *Erfüllungsmenge einer Aussageform* (Bedingung, Beziehung, Gleichung, Ungleichung usw.), deren Erfüllungsgrundbereich endlich ist.
2. Finden von *Vermutungen* durch *unvollständige Induktion*.

Beim Ermitteln der Erfüllungsmenge von genau einer Aussageform (mit einer oder mit mehreren Variablen) geht es zunächst darum, die endlich vielen Elemente (Zahlen, Zahlenpaare, usw.) in eine *Reihenfolge* zu bringen, die mit Sicherheit alle Elemente enthält.
In einfachen Fällen kann man eine *lexikographische Ordnung* herstellen, bei komplizierteren Aufgaben muß man ein solches *Ordnungsprinzip* erst finden.
Anschließend wird untersucht, welche der so ermittelten "möglichen" Elemente die Aussageform tatsächlich erfüllen.
Folgende *Impulse* charakteriseren diese Vorgehensweise:

- Ich ermittle eine *Reihenfolge* der Elemente des *Erfüllungsgrundbereichs*, die mit Sicherheit alle "möglichen" Elemente (Fälle) enthält.
- Ich entscheide für jedes Element (jeden Fall), ob es (er) die gegebene Bedingung (Beziehung, Gleichung, Ungleichung o.ä.) erfüllt.

Die Strategie des systematischen Probierens findet Anwendung in "4. Systematisches Arbeiten", "5. Zahlen", "6. Magische Quadrate", "8. Gleichungen/Ungleichungen", "9. Kryptogramme", "13. Vermutungen" sowie beim Aufstellen der Spielbäume für "Klein-Trlenka" und "Zwei-Haufen-Spiel".

Die Strategie des systematischen Probierens ist eine Grundlage der Strategie der ***Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen***, die eingesetzt wird, wenn die Erfüllungsmenge einer *Konjunktion von Aussageformen* zu ermitteln ist. Sie wird durch folgende Impulse charakterisiert:

- Ermittle zu jeder der gegebenen Bedingungen (Beziehungen, Gleichungen, Ungleichungen o.ä.) die Erfüllungsmenge.
- Ermittle diejenigen Elemente (Zahlen, Zahlenpaare o.ä.), die in jeder dieser Erfüllungsmengen enthalten sind, d.h. bilde den *Durchschnitt der Erfüllungsmengen*.

Diese Strategie ist nur dann einsetzbar, wenn die Erfüllungsmengen von allen (konjunktiv verknüpften) Aussageformen endlich sind. Ist dies nicht der Fall, dann

wird man eine *Variante dieser Strategie* einsetzen, die in der Regel auch dann schneller zum Ziel führt, wenn alle Erfüllungsmengen endlich sind.
Man versucht zunächst abzuschätzen, welches die *"informativste Bedingung"* ist, die unter allen gegebenen Bedingungen die "kleinste" Erfüllungsmenge besitzt.

- Ermittle die Erfüllungsmenge der *"informativsten"* Bedingung.
- Sondere aus dieser Menge alle diejenigen Elemente aus, die eine der anderen Bedingungen nicht erfüllen.

Systematisches Probieren ist bereits dann unpraktikabel, wenn die Erfüllungsmengen der gegebenen Aussageformen zwar endlich, aber sehr groß sind. In solchen Fällen wendet man die Strategie des ***"Folgerns zum Zweck des Vereinfachens"*** an. Selbst wenn systematisches Probieren zum Ziel führt, liefert diese Strategie meist elegantere Lösungswege. Sie gestattet ebenfalls die Ermittlung der Erfüllungsmenge von einer oder von mehreren (konjunktiv verknüpften) Aussageformen.

Beim Lösen einer Gleichung/Ungleichung durch *Umformen* wird diese Gleichung/Ungleichung so lange vereinfacht, bis man ihre Erfüllungsmenge unmittelbar ablesen kann. Im allgemeinen handelt es sich hierbei um eine spezielle Form des *Vorwärtsarbeitens*, wobei aus einer Aussageform zweckmäßige Folgerungen gezogen werden. Das sollte man beim Formulieren der Impulse beachten.

Sind mehrere Aussageformen (Bedingungen) gegeben, dann spielt wieder das Auffinden der "informativsten" Bedingung eine bedeutende Rolle.
Folgende Impulse charakterisieren diese Strategie:

- Welche der gegebenen Bedingungen ist (vermutlich) die *"informativste Bedingung"* (die die Anzahl der möglichen Lösungen am stärksten einschränkt)?
- Was läßt sich aus dieser Bedingung unmittelbar ableiten? Begründung!
- Welches ist die "nächst informative" Bedingung? Was läßt sich aus ihr (und den vorher gezogenen Schlußfolgerungen) unmittelbar ableiten? Begründung!

Bei vielen Aufgaben führt systematisches Probieren und Folgern zum Zweck des Vereinfachens zu zwei verschiedenen Lösungswegen. Bei schwierigeren Aufgaben in höheren Klassenstufen kommt man oft erst durch kombiniertes Anwenden der beiden Strategien zum Ziel.
Beispiele findet man in "5. Zahlen" und "8. Gleichungen/Ungleichungen".

Die zum Charakterisieren der besprochenen *Strategien* verwendeten Impulse waren weniger unbestimmt als die zum Charakterisieren der angegebenen heuristischen *Prinzipien*. Dies trifft in verstärktem Maß auf die Impulse zum Charakterisieren gewisser ***HEURISTISCHER HILFSMITTEL*** zu, deren Anwendung eine weitgehend erlernbare geistige Technik darstellt.

Das ***Hilfsmittel "Variable - günstige Bezeichnungen"*** wird bereits in der Phase *"Erfassen der Aufgabenstellung"* eingesetzt (vgl. S.7) . Es kommt jedoch auch vor, daß man erst nach dem Finden eines Lösungsplans bemerkt, daß man diesbezüglich geschickter vorgehen kann.
Beispiele findet man vor allem in "1. Wer ist wer?", "3. Im Finstern", "4. Systematisches Arbeiten", "5. Zahlen", "7. Variable, Tabellen, Gleichungen" und "11. Mengendiagramme".

Sehr vielseitig einsetzbar und von besonderem Wert ist das ***Hilfsmittel "Tabelle"***. Tabellen dienen sowohl dem übersichtlichen *Abspeichern der Aufgabenstellung* als auch dem Finden und Abspeichern eines *Lösungsplans*, und auch eine *Probe am Text* können sie erleichtern.
In Klassenstufe 5 werden Tabellen vor allem beim Lösen von gewissen logisch-kombinatorischen Aufgaben sowie von Sachaufgaben eingesetzt. Gemeinsam ist, daß es dabei stets um das Festhalten von *Zuordnungen* geht.
Bei *logisch-kombinatorischen Aufgaben* wird in den Feldern das Bestehen oder Nichtbestehen von Zuordnungen festgehalten (vgl. hierzu Abschnitt 3.1.).
Bei *Sachaufgaben* werden in die Felder der Tabelle Konstante, Variable oder Terme aus Konstanten oder Variablen eingetragen.
In einfachen Fällen kommt man ohne Variable aus (z.B. Proportionalitätstabellen), bei komplizierteren Aufgaben sind Variable meist sehr nützlich.
Folgende Impulse charakterisieren das Arbeiten mit derartigen Tabellen:

- Wofür benötige ich *Zeilen*, wofür *Spalten*?
  - ° Es müssen Felder entstehen, in die ich das *Gegebene* bzw. das *Gesuchte* eintragen kann.
  - ° In die *Zeileneingänge* schreibe ich die Objekte (Situationen), über die etwas ausgesagt wird.
  - ° In die *Spalteneingänge* trage ich die Größen (Merkmale) ein, über die (bezüglich der Objekte) etwas ausgesagt wird.
- Ich trage die gegebenen Größen in die Felder ein; ich kennzeichne das (die) Feld (er) , in denen das Gesuchte steht.
- Ich fülle weitere Felder der Tabelle aus, indem ich die aus der Aufgabenstellung hervorgehenden *Beziehungen* nutze.
  - ° Welches Feld läßt sich als erstes füllen? Begründung!
  - ° Welches Feld läßt sich als nächstes füllen? Begründung!
- Wenn es mir nicht gelingt, alle leeren Felder der Tabelle auszufüllen, dann wähle ich eine *Variable* und trage sie in ein günstig gewähltes Feld ein.
- Ich ermittle die *Ansatzgleichung*, indem ich eine noch nicht verwendete Beziehung nutze. Ich löse die Ansatzgleichung.
  - ° Ich untersuche, welche (spezielle oder allgemeine) Beziehung ich noch nicht verwendet habe; sie liefert mir die Ansatzgleichung.

Die mit " ∘ " gekennzeichneten *Unterimpulse* gibt man nur, wenn die mit " - " gekennzeichneten *Hauptimpulse"* noch nicht den gewünschten Erfolg bringen.
Beispiele für den Einsatz von Tabellen findet man in "1. Wer ist wer?", "2. Schliessen auf die Einheit", "4. Systematisches Arbeiten", "7.Variable, Tabellen, Gleichungen", "9. Kryptogramme" und "13. Vermutungen".

Abschließend gehen wir noch auf das ***Hilfsmittel "Skizze"*** ein, das ebenfalls sowohl dem Abspeichern von Aufgabenstellungen als auch dem Finden von Lösungswegen dient und das eine Veranschaulichung mit geometrischen Hilfsmitteln liefert.
Wie bei den Tabellen, so erfolgt auch hier eine Entscheidung über den Einsatz oft schon in der Phase *"Erfassen der Aufgabenstellung"*. Es ist zweckmäßig, verschiedene Arten von Skizzen zu unterscheiden.

***Graphen*** und ***Mengendiagramme*** vermögen ganz spezielle Sachverhalte sehr gut zu veranschaulichen (vgl. hierzu die Abschnitte 3.11. und 3.12.).

Bei *geometrischen Aufgaben* lassen sich meist die gesuchten Größen, die gegebenen Größen und Bedingungen sowie die benötigten Hilfsgrößen in ***"informativen Figuren"*** festhalten (vgl. hierzu Abschnitt 3.14.).

Eine ähnliche Rolle spielen geometrische Figuren als Modelle für Sachverhalte bei *Sachaufgaben.* Von besonderer Wichtigkeit sind ***Skizzen bei Bewegungsaufgaben***. Ihre Anfertigung kann durch folgende Impulse gesteuert werden:

- Welche *Situation* des Prozesses will ich durch eine Skizze erfassen?
  - ° Ich zeichne für jeden entscheidenden Zeitpunkt eine *Teilskizze* und vermerke diesen Zeitpunkt.
- Was läßt sich in der Skizze festhalten?
  - ° Ich halte Streckenlängen und Geschwindigkeiten nebst Richtung (durch Pfeile) fest.
- Günstige *Bezeichnungen* einführen!
- Sind alle gegebenen und gesuchten Größen in der Skizze festgehalten?
  - ° Gegebene Bedingungen oder Beziehungen, die sich auf diese Weise nicht festhalten lassen, notiere ich gesondert.

Beispiele für dieses Vorgehen findet man im Abschnitt "10. Skizzen".

## 1.2. Logische Grundlagen

Zunächst sollen die Schüler an einen exakten Gebrauch der ***Begriffe*** *"ein"* , *"genau ein"* , *"höchstens ein"* sowie von *"nicht"*, *"und"*, *"oder"*, *"entweder - oder"* , *"wenn - dann"* gewöhnt und auf diesbezügliche Unterschiede zwischen Fachsprache und Alltagssprache aufmerksam gemacht werden.

Ferner sollte man die bei vielen Schülern noch vorkommende Meinung ausmerzen, daß jede gestellte Aufgabe stets eindeutig lösbar ist.
Bereits in dieser Klassenstufe kann und soll den Schülern bewußt werden, daß äusserlich sehr verschiedenartige Aufgabentypen zu einer großen ***Klasse von Bestimmungsaufgaben*** gehören, die sich wie folgt formulieren lassen:

*"Ermittle alle Elemente, Zuordnungen oder Anordnungen, die gewisse gegebene Bedingungen (Beziehungen, allgemein Aussageformen) erfüllen!*

Eine derartige Aufgabe kann keine, genau eine, endlich oder unendlich viele Lösungen besitzen. Zu einer vollständigen ***Lösungsdarstellung*** gehört neben der Angabe der Lösung auch der Nachweis, daß wirklich alle Lösungen und auch nur Lösungen angegeben werden.
Hierzu muß zweierlei gezeigt werden:

I) "Wenn ein Element alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Lösungsmenge." (***Einzigkeitsnachweis*** *; begründete Herleitung).*

II) "Wenn ein Element zur angegebenen Lösungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gegebenen Bedingungen." (***Existenznachweis*** *; Probe*).

Derartige Aufgaben lernt der Schüler in folgenden Abschnitten kennen: "1. Wer ist wer?", "4. Systematisches Arbeiten", "5. Zahlen", "6. Magische Quadrate", "8. Gleichungen/Ungleichungen " und "9. Kryptogramme".

Bei den sogenannten ***Sach- und Anwendungsaufgaben***, zu denen wir auch die ***geometrischen Bestimmungsaufgaben*** zählen wollen, wird meist unausgesprochen vorausgesetzt, daß sie stets genau eine Lösung besitzen. Solche Aufgaben kommen vor allem in folgenden Abschnitten vor: "2. Einheit", "7. Variable, Tabellen, Gleichungen", "10. Skizzen" und "14. Flächen/Körper" .
Auch bei solchen Aufgaben sollten wir die Schüler zu einem gesunden Mißtrauen erziehen. Es ist durchaus möglich, daß die zum Lösen eines praktischen Problems benötigten Meßdaten unvollständig oder fehlerhaft übermittelt wurden., daß eine solche Aufgabe *unterbestimmt* ist, einander widersprechende Daten enthält oder anderweitig *überbestimmt* ist.
Es ist daher zweckmäßig, derartige Aufgaben bisweilen auch wie folgt zu formulieren:

*"Untersuche, ob die gesuchte Größe aus den gegebenen Größen und Bedingungen eindeutig ermittelt werden kann; wenn dies der Fall ist, dann berechne die gesuchte Größe."*

Wenn der Aufgabe eindeutig zu entnehmen ist, daß es genau eine Lösung geben muß, und wenn durch eine begründete Herleitung ein Einzigkeitsnachweis geliefert wurde, dann ist aus logischer Sicht ein Existenznachweis nicht erforderlich.
Desgleichen kann in einem solchen Fall der Einzigkeitsnachweis entfallen, wenn das (etwa durch Erraten gefundene) Resultat angegeben und der Existenznachweis geführt wurde.

Steht jedoch die eindeutige Existenz der Lösung nicht fest, dann kann man auf eine Probe nicht verzichten, die bei einer Sachaufgabe stets eine *Probe am Text* sein muß und nicht etwa nur eine Probe bei der Ansatzgleichung sein darf. Es wäre nämlich durchaus möglich, daß im Aufgabentext eine Bedingung "versteckt" ist, die für die Herleitung nicht benötigt wurde, der die gefundene "Lösung" jedoch widerspricht.

Man könnte die ***logisch-kombinatorischen Aufgaben*** des Abschnitts "1. Wer ist wer" wie Sachaufgaben behandeln und stets voraussetzen, daß sie immer genau eine Lösung besitzen. Dies wäre jedoch ein didaktischer Fehler. Bei diesem Aufgabentyp kann man den Schülern relativ einfach die Notwendigkeit von Einzigkeitsnachweis und Existenznachweis bei "Textaufgaben" klarmachen, und es ist dann leichter möglich, auch Sachaufgaben in einem kritischen Licht zu betrachten, was im Unterrricht leider meist unterbleibt.

Die im Unterricht vorkommenden *Sachaufgaben* mit genau einer Lösung können als *Spezialfall der* eingangs genannten *Klasse von Bestimmungsaufgaben* aufgefaßt werden, und das sollte den Schülern in der AG auch bewußt werden.
Andererseits besteht jedoch auch ein gewichtiger Unterschied zwischen diesen beiden Aufgabentypen: Als "Gegebenes" kommen bei Sachaufgaben vor allem "Daten" (Größen) vor, aus denen die gesuchte Größe mit Hilfe implizit gegebenener bzw. erst zu findender Beziehungen (d.h. Aussageformen) als "Unbekannte" zu ermitteln ist.
Bei den eingangs genannten Bestimmungsaufgaben sind dagegen Aussageformen gegeben, deren Erfüllungsmenge zu ermitteln ist.

Beweisaufgaben im engeren Sinn können in Klasse 5 noch nicht gestellt werden, wohl aber ist auf ***vollständige und exakte Begründungen*** größter Wert zu legen. In den Abschnitten "12. In einem Zug" und "13. Vermutungen" lernen die Schüler den Unterschied zwischen einer ***Vermutung*** und einer ***bewiesenen Aussage*** sowie zwischen ***Spezialisieren*** und ***Verallgemeinern*** kennen.

Um bei Mathematik-Olympiaden bestehen zu können, müssen die Schüler die erlernbare Technik der ***Lösungsdarstellung*** beherrschen. Da in den Zirkeln nicht viel Zeit für das Aufschreiben von Lösungen verwendet werden soll, wurde in der Aufgabensammlung eine Reihe von *Musterlösungen* mit abgedruckt, die als Vorbild für mündliche Darstellungen im Zirkel sowie für schriftliche Darstellungen in Form von Hausaufgaben verwendet werden sollen.

## 1.3. Sachkenntnisse und Fertigkeiten

Im Unterricht erworbene Kenntnisse und Fertigkeiten sollten in der AG nur implizit, dafür aber immanent gefestigt werden. Dies betrifft vor allem das *Rechnen mit natürlichen und gebrochenen Zahlen*, das *Umwandeln von Größen* und das Berechnen von *Umfängen, Flächen- und Rauminhalten.*

Im Abschnitt "8. Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen" gehen wir zwar über das Unterrichtsniveau hinaus, Fertigkeiten im algorithmischen Lösen werden jedoch nicht angestrebt. Wichtig ist nur eine gewisse Fertigkeit im Umformen von Termen mit Variablen.

Über den Unterricht hinaus führt auch das Entdecken des *Satzes von Euler über das Durchlaufen von Graphen*, den sich die Schüler einprägen sollten.
Desgleichen sollten die Schüler das "Additionsverfahren des Schülers GAUß" beherrschen; ein Einprägen der zugehörigen Summenformeln ist dagegen entbehrlich
Im Abschnitt "13. Wir suchen Vermutungen" geht es nur um das Entdecken, nicht um das Einprägen von Gesetzmäßigkeiten.
Auf das in Klasse 5 ohne weiteres mögliche Vermitteln von Kenntnissen und Fertigkeiten über Positionssysteme haben wir bewußt verzichtet.

# 2. ZU EINIGEN ORGANISATORISCHEN UND DIDAKTISCHEN FRAGEN

Jeder Zirkel dauert 90 Minuten und besteht - in Anlehnung an Schulze/Sprengel /18/ - aus drei Teilen:

A) "Die Sache mit Pfiff" - mathematische Scherzfragen oder Knobeleien als Auftakt.

B) Lösen von Aufgaben aus der Aufgabensammlung.

C) Mathematische Spiele.

***Teil A)*** sollte nicht mehr als 5 bis 10 Minuten in Anspruch nehmen. Einige Anregungen geben wir in Abschnitt 5. Hier bietet sich oft die Gelegenheit, Einblicke in die Art der Denktätigkeit einiger Schüler zu gewinnen und u.U. auch Begabungen zu entdecken.

Für **Teil B)** sollten mindestens 60 Minuten zur Verfügung stehen. Hinweise zum Durchführen dieses Teils werden in den Abschnitten 3.1. bis 3.15. gebracht.
Finden die Zirkel wöchentlich statt und will man alle Teilgebiete behandeln, dann empfehlen wir folgende *Reihenfolge*:
Nach den Abschnitten 1. bis 3., für die man etwa 5 - 6 Zirkel verwenden kann, behandle man in weiteren 2 Zirkeln zunächst nur die Aufgaben 1) bis 10) aus 4. "Wir lernen systematisch arbeiten". Nach 2 weiteren Zirkeln zu 5. "Zahlen werden gesucht" sollten nun die ersten beiden Zirkel aus 15. "Vermischte Aufgaben" kommen, in denen die Schüler erstmals selbst entscheiden müssen, welche der bisher besprochenen heuristischen Vorgehensweisen sie beim Lösen dieser Aufgaben einsetzen wollen.
Dann kommen die restlichen 3 Zirkel zu "Systematisch arbeiten" sowie weitere 7 - 8 Zirkel zu den Aufgabengruppen 6. bis 10. Nach 10. "Hier können Skizzen helfen" füge man weitere 2 Zirkel mit "Vermischten Aufgaben" an.
Nach 6 - 7 Zirkeln zu den Abschnitten 11. bis 14. kommen dann die letzten beiden Zirkel mit "Vermischten Aufgaben".
Auf diese Weise kann man 31 - 34 Zirkel füllen, wobei man berücksichtigen sollte, daß auch die Vorbereitung und vor allem die Auswertung der Kreis-Olympiade und des Adam-Ries-Wettbewerbs nicht zu kurz kommen sollen und daß auch der Zirkel vor Weihnachten und vor dem Schuljahrsabschluß sich aus dem "Zirkelalltag" abheben sollten.

Mit ***Teil C)*** wird jeweils der Rest der Zeit für einen Zirkel gefüllt, was auch den Vorteil hat, daß man bei der zeitlichen Planung von Teil B) recht variabel sein kann. Einige Anregungen für das Gestalten von Teil c) geben wir in Abschnitt 4. Wie bereits betont, soll hierbei auch ein bewußtes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen erfolgen.

Auf die Notwendigkeit einer ***inneren Differenzierung*** wurde bereits hingewiesen. Man sollte stets absichern, daß vor allem für die leistungsstarken Schüler im Zirkel kein "geistiger Leerlauf" entsteht. Es empfiehlt sich, für jeden Zirkel zwei "Angebote" zu planen und an der Wandtafel festzuhalten.
Das "Normalangebot" richtet sich zunächst an alle Schüler. Es besteht aus der Angabe der Aufgaben, die im Zirkel behandelt werden sollen, sowie aus an der Wandtafel festgehaltenen "Leerstellen" für Teilresultate und das Endresultat der zu behandelnden Aufgaben. Die Schüler werden aufgefordert, sich zu melden, wenn sie

eine Aufgabe gelöst zu haben glauben, und sich dann sofort der nächsten Aufgabe zuzuwenden.
Nach einer angemessenen Zeit läßt sich der AG-Leiter die gewonnenen Teilresultate und das Endresultat nennen, hält es kommentarlos an der Wandtafel fest und fragt nur, ob es Schüler gibt, die andere Resultate erhalten haben. Ist dies der Fall, dann werden auch diese Resultate an der Wandtafel festgehalten, und die Schüler werden aufgefordert, selbst zu entscheiden, welches der angeschriebenen Resultate das richtige ist.
Wer die Aufgaben des "Normalangebots" gelöst hat, beschäftigt sich mit dem "Zusatzangebot", das Aufgaben höheren Schwierigkeitsgrades enthält. Bei "gestaffelten" Aufgaben wird es häufig so sein, daß die leistungsschwächeren Schüler nur den leichteren Einstiegsteil lösen, während die leistungsstärkeren Schüler auch die schwierigeren Teile bewältigen müssen.
Leistungsstarke Schüler, die überzeugt sind, die Aufgaben des "Normalangebots" lösen zu können, dürfen sich sofort mit den Aufgaben des "Zusatzangebots" beschäftigen. In der Regel sind dies nur sehr wenige Schüler der AG, so daß der Lehrer hinreichend Zeit hat, diese Schüler individuell zu beraten, während die Lösungen zu den Aufgaben des "Normalangebots" nach angemessener Zeit mit allen AG-Mitgliedern gemeinsam besprochen werden.

Beim Lösen der ***"vermischten Aufgaben"*** hat sich folgendes Vorgehen bewährt: Der AG-Leiter wählt 3 Aufgaben aus und fordert die Schüler auf, diese Aufgaben durchzulesen und u.U. Fragen zum Aufgabentext zu stellen. Dann soll jeder Schüler für sich den Schwierigkeitsgrad der drei Aufgaben einschätzen und die Aufgaben diesbezüglich ordnen. (Dies hilft bei der Phase "Aufgabe verstehen" und ist auch für Klausuren, bei denen man stets mit der vermutlich leichtesten Aufgabe beginnen sollte, bedeutsam. ) Hierüber wird kurz diskutiert.
Dann darf jeder Schüler angeben, mit welcher Aufgabe er sich als erstes beschäftigen möchte, wobei dies nicht die Aufgabe sein muß, die von ihm als die leichteste eingeschätzt wurde. Der AG-Leiter entscheidet, ob vor Beginn der selbständigen Schülerarbeit darüber diskutiert wird, welche der behandelten heuristischen Vorgehensweisen beim Lösen jeder der 3 Aufgaben nützlich sein dürfte oder ob dies erst in der Phase der Auswertung geschehen soll. Desgleichen entscheidet der AG-Leiter, welche Schüler sich mit welcher Aufgabe beschäftigen sollen (wobei die Wünsche der Schüler weitgehend berücksichtigt werden sollten) und ob die gesamte Lösung in selbständiger Schülerarbeit zu bewältigen ist oder ob bereits nach Teilresultaten eine gemeinsame Auswertung erfolgen soll.

Beim bewußten Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen sind einige ***didaktische Prinzipien*** zu beachten:

1) Heuristisches Vogehen läßt sich nur im Prozeß angestrengter geistiger Tätigkeit beim weitgehend *selbständigen Lösen* anspruchsvoller Aufgaben (und nicht etwa nur durch reines Zuhören) erlernen. Dazu muß man dem Schüler *Zeit zum Nachdenken* lassen. Ein kurzschrittiges Steuern der Schülerhandlungen mit dem Ziel, möglichst rasch zur Lösung zu gelangen, ist eine für heuristische Schulung unbrauchbare Methode.

2) Wenn ein Schüler eine Aufgabe ohne bewußten Einsatz heuristischer Vorgehensweisen zu lösen vermag, dann ist diese Aufgabe für eine heuristische Schulung dieses Schülers ungeeignet. Nur wenn ein Schüler eine Aufgabe in angemessener

Zeit nicht selbständig bewältigen kann, wird er am Kennenlernen einer hilfreichen heuristischen Vorgehensweise interessiert sein.
Wurde eine solche Vorgehensweise vermittelt und anhand eine geeigneten Aufgabenfolge auch "trainiert", dann bleibt es weiterhin dem Schüler überlassen, welche heuristische Vorgehensweise er beim Lösen von Aufgaben einsetzen will. Je begabter ein Schüler, desto schädlicher wäre jeder diesbezügliche Zwang.

3) Das Endziel besteht darin, jeden Schüler zu befähigen, daß er sich beim Lösen problemhafter Aufgaben - in der Regel unterbewußt - *Fragen* stellt und *Impulse* gibt, durch die gewisse heuristische Vorgehensweisen charakterisiert sind.
Zum Zweck des Vermittelns müssen diese Fragen und Impulse bewußt angeeignet werden, und wenn ein Schüler beim Lösen einer problemhaften Aufgabe auf größere Schwierigkeiten stößt, dann sollte er angehalten werden, das ihm zur Verfügung stehende Repertoir an heuristischen Vorgehensweisen bewußt zu durchmustern.

4) Die Fragen und Impulse werden in der Regel zunächst vom Lehrer formuliert, dann aber möglichst schnell von den Schülern selbst gestellt. Wer eine Lösung gefunden hat, der darf sie nicht verraten, er darf lediglich die nächste Frage stellen, den nächsten Impuls geben. Auf diese Weise werden die leistungsstärksten Schüler zusätzlich gefordert (und damit gefördert), die leistungsschwächeren Schüler haben mehr Zeit zum Überlegen und zum Aneignen des Verfahrens, und den leistungsschwächsten Schülern bleibt es vorbehalten, die Lösung zu formulieren.
Im Idealfall spielt der Lehrer die Rolle eines Dirigenten, der bestimmt, wer zu Wort kommen soll, und der die gestellten Fragen und Impulse sowie die zugehörigen Antworten wertet. Aus Zeitgründen wird er die Schüler auch vor "Sackgassen" warnen, die beim selbständigen Lösen von Aufgaben nicht zu vermeiden sind.

5) Um die *Gemeinsamkeiten des Vorgehens* beim Lösen unterschiedlicher Aufgaben hervorzuheben, sollte sich der AG-Leiter der *"genormten" Impulse* bedienen, die zum Charakterisieren der heuristischen Vorgehensweisen eingeführt wurden.
Es sind dies (inhaltsunabhängige) *Hauptimpulse*, die nur dann durch *Unterimpulse* ergänzt werden sollten, wenn der Hauptimpuls noch nicht zum Ziel führt. Auch diese Unterimpulse sollten vom konkreten Aufgabeninhalt noch möglichst wenig abhängen. Bei den Impulsen zum heuristischen Hilfsmittel "Tabelle" wurde diese Vorgehensweise angedeutet. Konkrete Lösungshinweise sollten nur notfalls und dann ganz zum Schluß kommen.

Die Erfahrung lehrt, daß das Erlernen einer solchen *"Impulstechnik"* den Lehrern keineswegs leicht fällt. Wer einen Lösungsweg kennt, ist in der Regel geneigt, sofort einen "inhaltlichen" Impuls zu geben, der den Lösungsweg gleich "verrät". Es ist erst recht nicht einfach, Schülern das Verraten von Lösungswegen abzugewöhnen und ihnen klar zu machen, daß eine gute Frage (zu einem vom Schüler gefundenen Lösungsweg) viel wertvoller ist als die Antwort selbst. Dieses *Hinauszögern der endgültigen Lösung* ist ein sehr gutes Mittel, um zu erreichen, daß sich alle Schüler im Rahmen ihrer Leistungsfähigkeit aktiv an der Suche nach einem Lösungsweg beteiligen.

Es besteht die Gefahr, daß die außerunterrichtliche Arbeit in Zirkeln genau so verläuft wie die meisten Unterrichtsstunden: Neben einem vom Lehrer geleiteten Unterrichtsgespräch gibt es allenfalls noch Phasen der Stillarbeit, wo sich alle Schüler mit derselben Aufgabe beschäftigen müssen. Ein derartiges "routinemäßiges" Vorgehen sollte auf jeden Fall vermieden werden. Beim Einsatz verschiedener ***Formen der***

***Zirkelarbeit*** sorge man für Abwechslung. Es ist von Vorteil, wenn sich ein Zirkel im äußeren Ablauf deutlich von einer Unterrichtsstunde unterscheidet.

Wie bereits hervorgehoben, achte man darauf, daß beim ***Unterrichtsgespräch*** die leistungssstärksten Schüler die Lösung nicht gleich verraten und dadurch den leistungsschwächeren Schülern die Möglichkeit zu selbständiger intensiver geistiger Arbeit nehmen.

Bei der ***Stillarbeit*** achte man darauf, daß die leistungsstarken Schüler nicht unterfordert werden. Es ist unrationell, allen Schülern stets dieselbe Aufgabe zu stellen mit dem Ziel, diese komplett zu lösen. Zum mindesten muß man für die leistungsstarken Schüler eine weitere Aufgabe nennen, die zu bearbeiten ist, wenn die erste Aufgabe gelöst wurde. In Klassenstufe 5 muß der zeitliche Umfang der Stillarbeit noch recht stark begrenzt werden.
Folgende didaktische Variante ist empfehlenswert: Wenn sich alle Schüler mit einer bestimmten schwierigen Aufgabe beschäftigen sollen, dann kann man die Stillarbeit nach einer gewissen Zeit (noch bevor der erste Schüler die Lösung gefunden hat) unterbrechen und die Schüler auffordern, über ihre Lösungsideen zu diskutieren. Bei dieser Gelegenheit kann man sie zu einem bewußten Einsatz der kennengelernten heuristischen Vorgehensweisen anhalten.

Besonders bei den mathematischen Spielen am Ende eines Zirkels liegt es nahe, zur ***Gruppenarbeit*** überzugehen. Aber auch beim Lösen von Aufgaben sollte der AG-Leiter versuchen, Erfahrungen beim Einsatz dieser interessanten Unterrichtsform zu sammeln.

Wenn die Leistungsunterschiede in einer AG zu groß werden und Maßnahmen der inneren Differenzierung nicht mehr ausreichen, dann sollte man zu Maßnahmen der ***äußeren Differenzierung*** greifen. Es sollte in jedem Schulamtsbereich neben Schul-AGn auch eine Kreis-AG existieren, in der die begabtesten und leistungsfähigsten Schüler gefördert werden.

# 3. VORSCHLÄGE ZUM GESTALTEN DER ZIRKEL

Zunächst werden stets die beim Behandeln der jeweiligen Aufgabenart anzustrebenden Ziele (in Form von Stichworten) zusammengestellt. Es folgen Hinweise zum Schwierigkeitsgrad und zum Einsatz der Aufgaben. Schließlich wird gezeigt, wie man beim Behandeln der einzelnen Aufgaben vorgehen kann, welche Impulse dieses Vorgehen steuern können und zu welchen Resultaten die Impulse führen können. Die oft gewählte Darstellung in Frage-Antwort-Form soll dem AG-Leiter helfen, sich die weiter vorn beschriebene Impulstechnik anzueignen. Vor Mißdeutungen soll jedoch ausdrücklich gewarnt werden: Es handelt sich hierbei keineswegs um ein reibungslos ablaufendes, kurzschrittiges Verfahren, das bei jedem Schüler zu einem Lösungserfolg führt!

## 3.1. Wer ist wer?

***Ziele:***

- *Tabellen* als Hilfsmittel zur Lösungsfindung.
- Wahl günstiger *Bezeichnungen.*
- *Vorwärtsarbeiten.*
- Problematik *"Einzigkeits- und Existenznachweis"*; überbestimmte Aufgaben.

Vermögen die meisten Schüler die Aufgabe 1) ohne Mühe selbständig zu lösen, dann führe man die "Tabellenmethode" anhand der etwas schwierigeren Aufgabe 2) ein. Die sehr leichten Aufgaben 3) und 4) dienen dem selbständigen Anwenden der Tabellenmethode für die leistungsschwächeren Schüler. Spätestens bei der recht schweren Aufgabe 10) dürften auch sehr leistungsstarke Schüler erkennen, wie nützlich Tabellen beim Lösen solcher Aufgaben sind.

***Aufgabe 1):***

- Günstige Veranschaulichung?
- Zeilen- und Spalteneingänge?
  - ° Was für eine Zuordnung ist gesucht?

Hier dürfte eine *Tabelle* nützlich sein.
In die Zeilen- bzw. Spalteneingänge schreibe ich die Vor- bzw. Familiennamen, da zwischen diesen eine Zuordnung gesucht wird.

- Günstige *Bezeichnungen*!
  - ° Wie kann ich gegebene oder gefundene Beziehungen abgekürzt schreiben?

Um zwischen Vor- und Familiennamen unterscheiden zu können, kürze ich erstere mit a , b , c , d und letztere mit E , F , G , H ab. $c \neq H$ bedeute, daß Christian nicht Hausmann heißen kann, u.s.w.

- Was läßt sich aus Bedingung (1) ableiten? Begründung!

Aus (1) folgt $c \neq H$ , weil es sich hierbei um verschiedene Personen handelt.

- Wie halte ich das gefundene Teilresultat in der Tabelle geschickt fest?

Ich trage in das zu c-H gehörende Feld ein "-" und die (1) ein.

- Was läßt sich aus (1) noch ableiten?

Aus (1) folgt weiterhin noch $c \neq E$ , $b \neq H$ , $b \neq E$ ; ich trage diese Feststellungen analog in die Tabelle ein.

- Was läßt sich aus (2) ableiten? Begründung!

Aus (2) folgt $a \neq H$ , $b \neq H$ , $a \neq G$ , $b \neq G$; es sind verschiedene Personen.

- Was läßt sich nun ableiten? Begründung!

Hier hilft mir die Tabelle, wo in der zu H gehörenden Spalte jetzt drei "-" stehen.
Da einer der vier Schüler Hausmann heißt, muß (3) d = H gelten; ich schreibe in das zugehörige Feld ein "+" und eine (3).

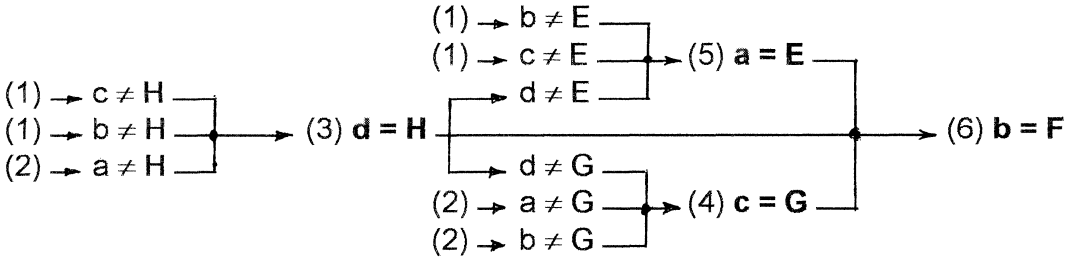
- Was läßt sich nun ableiten? Begründung!

Hieraus folgt dann $d \neq E$ , $d \neq F$ , $d \neq G$ , weil Dieter nur einen Familiennamen haben kann; ich trage diese Feststellungen in die Tabelle ein.

| | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|
| a | | | - (2) | - (2) |
| b | - (1) | | - (2) | - (1/2) |
| c | - (1) | | | - (1) |
| d | - (3) | - (3) | - (3) | + (3) |

An diese Stelle gibt es mehrere Möglichkeiten, fortzusetzen
Nebenstehender Tabelle ist zu entnehmen, daß sowohl im Feld a-E als auch im Feld c-G ein "+" stehen muß, woraus dann jeweils folgt, daß das letzte "+" im Feld b-F stehen muß.
Zu einem dieser Lösungswege ist in der Aufgabensammlung auf S.30 eine "Musterlösung" angegeben, ein weiterer Lösungsweg wird angedeutet.

Gewissermaßen als "Zwischenstation" zwischen der Tabelle, die nur den Lösungsplan festhält, und einer exakten Lösungsdarstellung, kann folgender *"Lösungsgraph"* eingesetzt werden:




Bei ***Aufgabe 2)*** gelangt man durch analoges Vorgehen leicht zu der links angegebenen Tabelle, aus der man jedoch keine weiteren Folgerungen ziehen kann. Durch den Impuls

- Welche in den Bedingungen festgehaltenen Informationen wurden noch nicht voll ausgenützt?

werden die Schüler veranlaßt, in einem zweiten Durchlauf aus den Bedingungen Folgerungen zu ziehen. So kann man merken, daß die Information über die Teilnahme bzw. Nicht-Teilnahme der Schüler an der letzten MO noch eine wesentliche Information ist..

| | B | D | H | S |
|---|---|---|---|---|
| a | - (1) | | | |
| b | | | | |
| d | - (3) | | | |
| k | | - (2) | | - (4) |

| | MO B | nMO D | H | S |
|---|---|---|---|---|
| MO a | - | | - (6) | |
| b | + (5) | - (5) | - (5) | - (5) |
| d | - | | - (6) | |
| nMO k | - (*) | - | + (6) | - (6) |

| | MO B | nMO D | nMO H | MO S |
|---|---|---|---|---|
| MO a | - | | - | + (8) |
| MO b | + (5) | - | - | - |
| nMO d | - | + (7) | - | |
| MO k | - | - | + (6) | - |

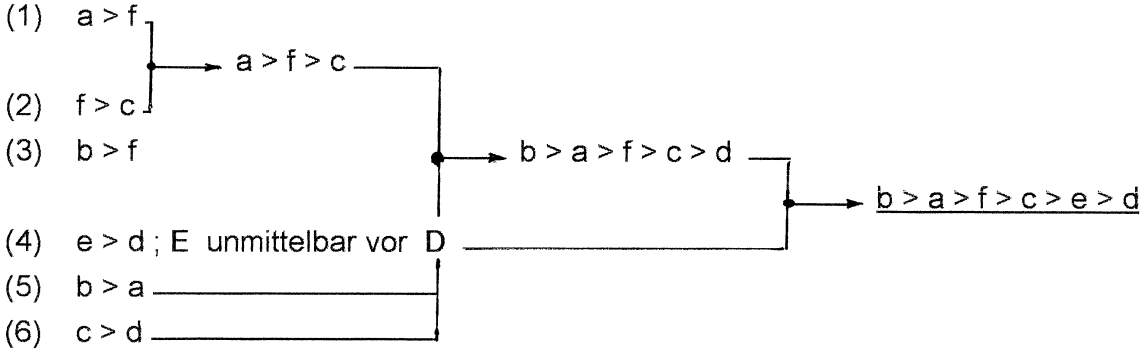
Aus (1) und (2) folgt (*) $k \neq B$ , weil B an der letzten MO teilgenommen hat, k aber nicht. Hieraus folgt dann (5) $\underline{b = B}$ und (6) $\underline{k = H}$ , jeweils als letzte verbleibende Möglichkeit. Dies kann man so festhalten, wie in der mittleren Tabelle angegeben.
Aber auch jetzt ist man noch nicht am Ziel. Man gebe den Impuls

- Was läßt sich nun aus den gegebenen Bedingungen und den abgeleiteten Feststellungen folgern? Begründe!

Aus (5) b = B und B = MO folgt b = MO, also d = nMO .
Analog folgt aus (6) und der Bedingung, daß genau zwei der Schüler an der letzten MO teilgenommen haben, die anderen beiden dagegen nicht, daß H = nMO und S = MO gelten muß.
Hieraus folgt dann als einzig mögliche Zuordnung (7) $\underline{d = D}$ und (8) $\underline{a = S}$ .
Beim *"Rückblick"* wird man hervorheben, daß man bei schwierigeren Aufgaben in der Regel die gegebenen Bedingungen mehrfach durchlaufen und dabei beim Folgern auch Feststellungen mit einbeziehen muß, die man in einem früheren Durchlauf abgeleitet hat.

Bei ***Aufgabe 3)*** und ***Aufgabe 4)*** kommt man leicht bereits beim ersten Durchlauf ans Ziel. Leistungsstarke Schüler werden hier auf eine Tabelle als Hilfsmittel verzichten können.

Bei ***Aufgabe 5)*** geht es zunächst darum, die gegebenen Bedingungen durch Einführen *günstiger Bezeichnungen* übersichtlich festzuhalten.
Bezeichnet man mit a die Sprungweite von Arnd sowie mit f , c , b , e und d die Sprungweiten der anderen Jungen und bringt die gegebenen Bedingungen stets in die Form "X sprang weiter als Y" , dann lassen sich diese Bedingungen wie folgt festhalten und die angegebenen Feststellungen leicht ableiten:




Schwierigkeiten kann allenfalls das Einordnen von e bereiten. Bei nochmaligem Durchlesen von "(4) Erik war *nur* besser als Dietmar" müssen die Schüler erkennen, daß die hier gegebene Information durch e > d nicht voll erfaßt wird. Unabhängig von den anderen gegebenen Bedingungen läßt sich aus (4) ableiten, daß Dietmar der letzte und Erik der vorletzte war. Uns reicht die Feststellung, daß Erik in der Plazierung unmittelbar vor Dietmar kommt, um die Plazierung der Jungen aus den gegebenen Bedingungen ableiten zu können.
Teil b) der Aufgabe gestattet es, auf die Problematik des *Einzigkeitsnachweises* und des *Existenznachweises* einzugehen. Offensichtlich haben wir die Bedingung (3) für unsere Ableitung nicht benötigt, unsere Aufgabe ist *überbestimmt*. Ersetzt man (3) etwa durch (3*) f > b , dann würde sich an der Ableitung (dem Einzigkeitsnachweis) nichts ändern, und nur eine "Probe" (der Einzigkeitsnachweis) würde zeigen, daß die abgeleitete Plazierung keine Lösung ist, weil sie der Bedingung (3*) widerspricht.

Beim *"Rückblick"* wird man daher hervorheben, daß bei derartigen Aufgaben stets auch eine "Probe" erforderlich ist, um sicher zu sein, daß tatsächlich eine Lösung vorliegt.

Der Schwierigkeitsgrad der ***Aufgabe 6)*** sinkt, wenn man die Schüler durch die Aufgabenstellung auffordert, zunächst herauszufinden, an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat. Jedes andere Vorgehen dürfte in eine *Sackgasse* führen.
Zunächst lohnt es, übersichtlich festzuhalten, welche der Geschäfte F , H , S , O an den einzelnen Wochentagen geöffnet haben (vgl. die linke Tabelle).

- Was folgt aus den Bedingungen hinsichtlich des Wochentages, an dem das Gespräch stattgefunden hat?

Dabei wird man die Bedingungen zunächst in der gegebenen Reihenfolge betrachten.
Aus dem Wort "eher" in (1) folgt zunächst, daß das Gespräch nicht am Montag stattgefunden haben kann. Der Dienstag käme in Frage, wenn Asja und Shenja in die an diesem Tag geöffneten Geschäfte F bzw. S gehen wollten. Vielleicht erkennen einige Schüler schon jetzt, daß auch die Tage von Donnerstag bis Samstag nicht in Frage kommen, da am Mittwoch alle vier Geschäfte geöffnet haben, was der Aussage (1) widerspricht. Der AG-Leiter sollte diese Folgerung jedoch an dieser Stelle noch nicht erzwingen.
Aus dem Wort "morgen" in (2) folgt, daß das Gespräch nicht am Samstag stattfand; es könnte am Freitag stattgefunden haben, wenn Ira zu O wollte.
Aus dem Wort "vorgestern" in (3) folgt, daß das Gespräch weder am Montag noch am Dienstag stattfand.
Aus den Worten "gestern" und "morgen" in (4) folgt, daß das Gespräch weder am Montag noch am Samstag stattfand.
Wurde die letztgenannte Folgerung aus (1) nicht im ersten Anlauf gefunden, dann bleiben Mittwoch, Donnerstag oder Freitag als Tage übrig, an denen das Gespräch stattgefunden haben könnte, und man muß wieder nach noch nicht genutzten Informationen suchen. Hier hilft der Impuls

- Was folgt aus der Tatsache, daß es keinen Tag gab, an dem Asja und Shenja ihre Besorgungen machen konnten?
  - ° Beachte die Tage, an denen alle Geschäfte geöffnet hatten!

So erkennt man, daß aus (1) und (3) folgt:

(5) Das Gespräch kann nur am Mittwoch stattgefunden haben.

| Tag | ge öff net | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mo | | H | S | O |
| Di | F | | S | |
| **Mi** | **F** | **S** | **H** | **O** |
| Do | F | H | | |
| Fr | F | H | S | O |
| Sa | F | H | S | |

| | F | H | S | O |
|---|---|---|---|---|
| a | - (7) | + (1,7)=(9) | - (6) | |
| i | - (7) | | - (6) | + (2,6)=(8) |
| k | - (6),(7) | - (6) | + (3,5)=(6) | - (6) |
| s | + (4,5)=(7) | - (7) | - (6),(7) | - (7) |

Kürzt man die Namen der Mädchen durch a , i , k , s ab, dann kann man bei systematischem Vorgehen zu folgenden Folgerungen gelangen, wobei man den Folgerungspfeil zur Abkürzung einsetzen kann:

(5),(1) $\Rightarrow$ (#) [a = H und s = F] oder [a = F und s = H] .

(5),(2) $\Rightarrow$ (*) i = S oder i = O .

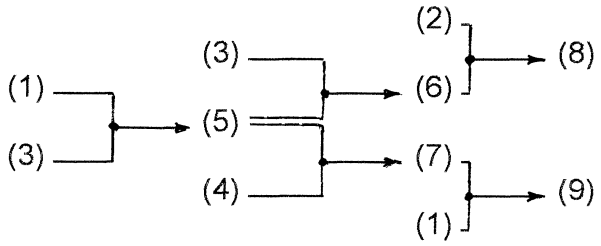
(5),(3) $\Rightarrow$ (6) $\underline{k = S}$ .

(5),(4) $\Rightarrow$ (7) $\underline{s = F}$ .

(6),(*) $\Rightarrow$ (8) $\underline{i = O}$ .

(7),(#) $\Rightarrow$ (9) $\underline{a = H}$ .

Nun wird noch nachgewiesen, daß diese Zuordnung tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllt *(Existenznachweis)*.
Nachträglich wird man versuchen, durch Abänderung der Reihenfolge der Schlüsse einen möglichst kurzen Lösungsweg zu erhalten, den man wie in in der rechten Tabelle angegeben festhalten kann.
Als gute Grundlage für einen (mündlich dargestellten) Beweis kann auch folgender Lösungsgraph verwendet werden:




Wenn man die Bedeutung von (1) bis (8) in Kurzform an der Wandtafel festgehalten hat, dann kann man die Schüler auffordern, die im Graphen festgehaltenen Schlüsse ausführlich (mündlich) vorzutragen.
Im *"Rückblick"* wird man hervorheben, daß man dieser "Musterlösung" nicht mehr ansieht, auf welchen Umwegen sie letztlich gefunden wurde, und daß derartige Umwege (und manchmal auch Sackgassen) sich bei der Lösungfindung nicht vermeiden lassen. Wenn man einen Lösungsweg gefunden hat, dann sollte man allerdings auch stets überprüfen, ob er überflüssige Teile enthält oder ob er sich noch vereinfachen läßt.

Bei **Aufgabe 7)** weist schon die Staffelung in die Teile a), b), c) darauf hin, daß hier wiederum die Notwendigkeit eines *Einzigkeitsnachweises* und eines *Existenznachweises* hervorgehoben werden soll.
Nach dem Einführen naheliegender *abkürzender Bezeichnungen* lassen sich die gegebenen Bedingungen wie folgt festhalten:

(1) Vornamen: a , j , si , st ; Familiennamen: B , D , S , T .

(2) si < a < S .

(3) (x = X) < T .

(4) B < a .

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung unterstützen:

- Von welchem Sportler lassen sich Vor- und Familiennamen leicht ermitteln? Begründe!
  - ° Bei welchem Sportler fangen Vor- und Familiennamen mit dem gleichen Buchstaben an?
    [ Wegen (2) kann Siegfried nicht Semmler heißen; also heißt wegen (3) und (1) einer der Sportler $\underline{\text{Stefan Semmler}}$ ] .

- Auf welchem Platz sitzt Stefan Stemmler? Begründe!
  - ° Was folgt aus (2) ? [ Reihenfolge si - a - (st=S) ] .
  - ° Was folgt dann aus (3) ? [ Reihenfolge si - a - (st=S) - T ] .

(Die Schüler erkennen, daß sich aus (1), (2), (3) allein nicht alle vier Zuordnungen ermitteln lassen, daß Aussage (4) also benötigt wird.)

- Was folgt dann aus (4)? Begründe!
  - ° Beachte die bereits ermittelte Reihenfolge im Boot!
    [ Wenn B unmittelbar vor a sitzt und si unmittelbar vor a, dann muß si = B gelten] .

Nebenstehende Tabelle hält die bisher ermittelten Ergebnisse fest.
Der Rest ist einfach: Es verbleiben nur die Möglichkeiten j = T und a = D .

| Reihenfolge | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| Vornamen | si | a | st | |
| Familiennamen | B | | S | T |

Man achte darauf, daß die Schüler einen korrekten Antwortsatz formulieren und die "Probe" machen!
Man kann den Schülern mitteilen, daß sie damit die Aufgabe 1.2 des ARW gelöst haben, d.h. die 2. der drei Aufgaben aus dem 1. Adam-Ries-Wettbewerb, der 1981 stattfand.

***Aufgabe 8)*** gleicht der Aufgabe 2). Kürzt man die Namen mit BF , LM , HR , AS sowie die Berufe mit f , m , r , s ab, dann folgt aus den Bedingungen, daß die in Tabelle 1 gekennzeichneten Zuordnungen nicht bestehen können, und man erkennt, daß Bedingung (2) nicht benötigt wird, weil man die benötigte Folgerung auch aus(1) ziehen kann.
Der Tabelle 1 ist weiterhin zu entnehmen, daß die in Tabelle 2 festgehaltenen Zuordnungen (6) Bernd Fleischer ist Schlosser und (7) Hans Richter ist Maurer bestehen müssen, was es ermöglicht, weitere Felder der Tabelle 2 mit einem "-" zu füllen. Ferner erkennt man, daß die aus (5) gezogenen Folgerungen (die zur Ableitung von (6) und (7) nicht benötigt wurden) auch aus (6) bzw. (7) gewonnen werden können, d.h. daß auch Bedingung (5) nicht benötigt wird.

| | f | m | r | s |
|---|---|---|---|---|
| BF | - (3) | - (4) | - (1) | |
| LM | | - (4) | | |
| HR | - (3) | | - (1),(2) | |
| AS | | - (5) | | - (5) |

Tabelle 1

| | f | m | r | s |
|---|---|---|---|---|
| BF | - | - | - | + (6) |
| LM | | - | | - (6) |
| HR | - | + (7) | - | - (6) |
| AS | | - (7) | | - (6) |

Tabelle 2

Da es uns nicht gelingt, weitere Folgerungen abzuleiten, kann man vermuten, daß die letzten beiden Zuordnungen aus den gegebenen Bedingungen nicht ableitbar sind. Man überzeugt sich leicht, daß sowohl die Zuordnungen [ f = AS und r = LM] als auch die Zuordnungen [f = LM und r = AS] die gegebenen Bedingungen (1) bis (5) erfüllen. Damit ist nachgewiesen, daß der Name des Fleischers und der Name des Richters aus den gegebenen Bedingungen nicht eindeutig zu ermitteln sind.
Beim *Rückblick* wird man wiederum die Bedeutung des *Existenznachweises* und des *Einzigkeitsnachweises* hervorheben. Würde man die überflüssigen Bedingungen (2)

und (5) durch Bedingungen ersetzen, die einer der restlichen Bedingungen widersprechen, dann hätte unsere Aufgabe keine Lösung. Andererseits könnte man zu (1), (3), (4) eine weitere Bedingung hinzunehmen, die die Unterbestimmtheit unserer Aufgabe aufhebt und es gestattet, auch noch die beiden anderen Zuordnungen eindeutig abzuleiten.
Man kann den Schülern mitteilen, daß sie damit die Aufgabe 8.2 des ARW gelöst haben.

Bei ***Aufgabe 9)*** sollte man die Schüler ausdrücklich darauf aufmerksam machen, daß sie nicht versuchen sollen, die Folgerungen aus den Bedingungen in der gegebenen Reihenfolge zu ziehen, sondern daß es oft nützlich ist, zunächst nach der vermutlich *"informativsten Bedingung"* zu suchen, d.h. nach derjenigen Bedingung, aus der man die meisten unmittelbaren Folgerungen ziehen kann. Oft wird auch vergessen, rechtzeitig Informationen zu nutzen, die in dem gegebenen Stundenplan enthalten sind.

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung unterstützen:

- Was folgt aus (6) und dem Stundenplan? Begründe!
[ H unterrichtet Ma und Bio ; H unterrichtet am Montag nicht in der 5a, wo laut Stundenplan aber Unterricht in allen sechs anderen Fächern stattfindet.]

- Was folgt aus (5) und dem Stundenplan? Begründe!
[ Da R am Dienstag nicht unterrichtet, unterrichtet er weder Ph, noch De, Ma oder Sp .]

- Was folgt nun aus (4) und dem Stundenplan? Begründe!
[ F unterrichtet Ph ; laut Stundenplan kann F in den beiden ersten Stunden am Dienstag nur Ph-Ph oder De-Ma unterrichten, aber Ma wird von H unterrichtet. ]

- Was folgt nun aus (3) und dem Stundenplan? Begründe!
[ F unterrichtet nicht De, Geo oder Ge, weil diese Fächer auch in der 1. oder 2. Stunde unterrichtet werden, der Physiklehrer aber erst ab der 3. Stunde unterrichtet. F unterrichtet auch nicht Sp, weil Montag in der 3. Stunde Ph und Sp parallel zu unterrichten sind. Daher gilt: F unterrichtet Ze ]

Der Rest ist einfach. Der Tabelle ist zu entnehmen, daß noch folgende Zuordnungen (als letzte verbleibende Möglichkeit) gelten: R unterrichtet Geo und Ge ; W unterrichtet De und Sp .

| | Ma | Ph | Bio | Geo | De | Ge | Ze | Sp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | - (6) | - (4),(6) | - (6) | | - (5) | | - (8) | - (5) |
| H | + (6) | - (6) | + (6) | - (6) | - (6) | - (6) | - (6) | - (6) |
| F | - (6) | + (4),(6)=(7) | - (6) | - (6) | - (3) | - (3) | + (8) | - (3) |
| W | - (6) | - (7) | | | | | - (8) | |

Abschließend wird hervorgehoben, daß wir bei unseren Folgerungen stets stillschweigend die Bedingungen (1) und (2) mit verwendet haben.

Durch die Frage "Haben wir damit unsere Aufgabe gelöst?" überprüfe man, ob bereits allen Schülern die Notwendigkeit eines *Existenznachweises* bewußt ist. Man lasse in die gegebene Stundentafel neben die Fächer die (Abkürzungen der) Namen der Lehrer eintragen und nachweisen, daß tatsächlich kein Widerspruch eintritt, d.h. daß ein Lehrer nicht etwa in derselben Stunde zwei Fächer unterrichten soll. Abschließend lasse man nachweisen, daß auch die Bedingungen (1) bis (5) in vollem Umfang von den angegebenen Zuordnungen erfüllt werden.

***Aufgabe 10)*** hat einen hohen Schwierigkeitsgrad und eignet sich daher als *"Differenzierungsaufgabe"* (für die leistungsstärksten Schüler, u.U. auch als Hausaufgabe zu stellen).
Wenn man die Namen mit K , D , M , S und die Berufe mit b , a , i , m abkürzt, dann erkennt man zunächst recht leicht:

Laut Bedingung (1) "fahren" K und D, laut (4) "läuft" b , also gilt

(8) $K \neq b$ und $D \neq b$ .

Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß man nur "indirekt" weiterkommt. Man kann zeigen, daß die Annahmen $D = m$ , $K = m$ und $M = m$ jeweils zu einem Widerspruch führen, woraus dann

(9) $D \neq m$ , (10) $K \neq M$ , (11) $M \neq m$ folgt.

Als letzte verbleibende Möglichkeit folgt hieraus dann

(12) $\underline{S = m}$ .

Recht leicht ist dann zu sehen, daß aus (8) und (12) die Feststellung

(13) $\underline{M = b}$ folgt.

Dann kann man zeigen, daß die Annahme $K = i$ zu einem Widerspruch führt, also

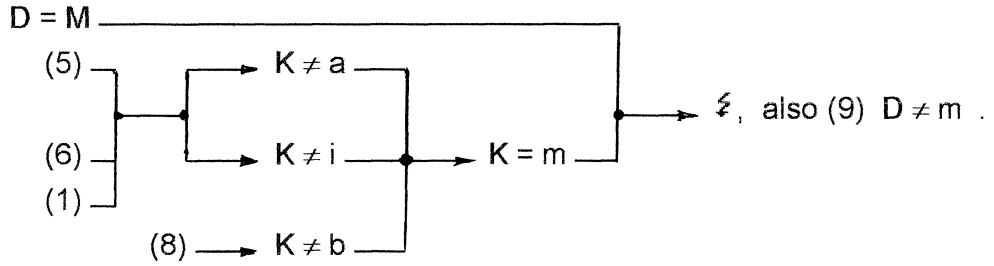
(14) $K \neq i$ gelten muß.

Hieraus folgt dann wieder recht leicht

(15) $\underline{K = a}$ und (16) $\underline{D = i}$ .

Betrachten wir den ersten *indirekten Schluß*:
Wegen (5) sind m und a , wegen (6) sind m und i keine Nachbarn. Da wegen (1) D und k Nachbarn sind, müßte $K \neq a$ und $K \neq i$ gelten.

Diese und die unmittelbar folgenden Ableitungen lassen sich übersichtlich in einem *Graphen* festhalten:




Wie gezeigt, gilt

(1),(4) $\Rightarrow$ (8) .

Obigen Schluß kann man daher kurz in der Form

(5),(6),(1),(8) $\Rightarrow$ (9)

festhalten. Verwendet man die oben angegebene Numerierung der abgeleiteten Feststellungen, dann kann man analog zeigen, daß folgendes gilt:

(1),(5),(6),(8),(9) $\Rightarrow$ (10) ;

(2),(7),(8) $\Rightarrow$ (11) .

Weiterhin erhält man dann

(9),(10),(11) $\Rightarrow$ (12) ;

(8),(12) $\Rightarrow$ (13) ;

(3),(6),(12) $\Rightarrow$ (14) ;

(8),(10),(14) $\Rightarrow$ (15) ;

(12),(13),(14) $\Rightarrow$ (16) .

Folgende *spezielle Impulse* können die Lösungsfindung entscheidend erleichtern:

- Was läßt sich aus (1) und (4) unmittelbar ableiten?
- Weise nach, daß die Annahmen D = m , K = m , M = m zu einem Widerspruch führen! Was läßt sich hieraus ableiten?
- Weise nach, daß die Annahme K = i zu einem Widerspruch führt!

Der Hinweis, daß die Beziehung "einander kennen" im Sinne von "einander mehr als ein einziges mal getroffen haben" eine wichtige Rolle spielt, weil sie aus (1),(3) und (6) Folgerungen zu ziehen gestattet, wäre hier ein recht wirksamer *"Unterimpuls"*.
Die restlichen Schlußfolgerungen sind leicht zu finden, wenn man eine *Tabelle* als Hilfsmittel verwendet. Ferner erkennt man, daß alle gegebenen Bedingungen benötigt wurden.
Probe nicht vergessen!

## 3.2. Wir schließen auf die Einheit und lösen Sachaufgaben

***Ziele:***

- *Tabellen* (ohne Variable) zum Abspeichern von Aufgabenstellung und Lösungsplan.
  - ° Bestimmen von Zeilen- und Spalteneingängen.
- Unterbestimmte Aufgaben.
- *Erweiterter Dreisatz* (Beziehungen zwischen mehr als zwei Größenarten).

Nach Aufgabe 1) sollte man zunächst die Aufgaben 4) und 5) lösen lassen, weil auch hier Tabellen ein nützliches Hilfsmittel sein können, während man bei den Aufgaben 2) und 3) auch ohne dieses Hilfsmittel leicht ans Ziel gelangt. Man beobachte, welche Schüler beim selbständigen Lösen dieser Aufgaben "routinemäßig" Tabellen einsetzen und gehe im "Rückblick" auf einfachere Lösungswege ein.
Bei den Aufgaben 9), 10) und 11) lasse man zunächst den *"groben Lösungsplan"* finden und formulieren, bevor die Schüler in selbständiger Arbeit die erforderlichen Rechnungen durchführen.

***Aufgabe 1):***
Bei Verwendung der auf Seite 11 angegebenen *Impulse* kann man zu *Tabelle 1* gelangen, in der zunächst nur die Aufgabenstellung abgespeichert ist.
Nun ist zu entscheiden, in welcher Spalte die "Einheit" günstigerweise stehen soll. Nach Durchführung der jeweiligen Nebenrechnung werden die Felder der um eine Zeile erweiterten *Tabelle 2* ausgefüllt. Hierfür gibt es bezüglich der Reihenfolge zwei gleichberechtigte Möglichkeiten: 1 , 16 , 80 , 208 , das Feld mit der 13 kann freibleiben; 1 , 16 , 13 , 208 , das Feld mit der 80 kann freibleiben.

| | Stunden | Werkstücke |
|---|---|---|
| 1. Schicht | 8 | 128 |
| 2. Schicht | 5 | |
| zusammen | | |

Tabelle 1

| | Stunden | Werkstücke |
|---|---|---|
| 1. Schicht | 8 | 128 |
| 2. Schicht | 5 | 80 |
| zusammen | 13 | **208** |
| | 1 | 16 |

Tabelle 2

Die Schüler müssen wissen, daß die so ergänzte Tabelle 2 nur den Lösungsweg nebst Resultat festhält! Eine exakte Lösungsdarstellung - die noch die zugehörigen Begründungen und einen Antwortsatz enthalten muß - wird man mündlich formulieren lassen.

Bei ***Aufgabe 2)*** und ***Aufgabe 3)*** führt *"Differenzbildung"* einfach zum Ziel:
Aus der Aufgabenstellung folgt, daß der 2. Kunde genau 2 m Maschendraht mehr kaufte als der 1. Kunde und dafür genau 30 € mehr bezahlte. Also kostet 1 m Maschendraht 15 € und der 1. Kunde zahlte für die 3 m Maschendraht 45 € .
Analog kann man ableiten: Das erste Mal wurden 175 Liter Milch gebracht.

Bei ***Aufgabe 4)*** lernen die Schüler den *"erweiterten Dreisatz"* kennen. Die in den Aufgaben 1) und 2) verwendete Tabellenart wird analog erweitert. Nach dem Abspeichern der Aufgabenstellung von Teil a) und Teil b) lasse man die Schüler Vorschläge für die notwendigen Nebenrechnungen machen und einen günstigen Vor-

schlag festhalten. Man beobachte, welche Schüler erkennen, daß man sofort nach dem Ausfüllen der ersten Zeile " 1 | 4 | 5 " der Nebenrechnung den Teil b) der Aufgabe lösen kann. Im letzten Schritt wird das zu Teil a) gehörende umrahmte Feld gefüllt, und es werden die Antwortsätze formuliert.
Beim selbständigen Lösen von Teil c) sollen die Schüler erkennen, daß diese Aufgabe *unterbestimmt* ist und daß man deshalb keine eindeutige Antwort formulieren kann. Dennoch gibt es eine sinnvolle Antwort: 1 Mähdrescher reicht in jedem Fall aus, und man kann auch ausrechnen, daß er zum Bearbeiten von 48 Hektar 12 Stunden benötigen würde.

| | Mähdrescher | Stunden | Hektar |
|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | 25 |
| a) | 8 | 3 | **30** |
| b) | 7 | **4** | 35 |
| | 1 | 4 | 5 |
| | 8 | 4 | 40 |
| | 8 | 1 | 10 |

| | Mähdrescher | Stunden | Hektar |
|---|---|---|---|
| | 5 | 4 | 25 |
| c) | | | 48 |
| | 1 | 4 | 5 |
| | 1 | 12 | 48 |

***Aufgabe 5a)*** wird analog gelöst. Zunächst wird festgestellt, daß aus der Aufgabenstellung folgt, daß man mit 1 Brutschrank 21 Tage benötigt, um 3000 Eier auszubrüten, also mit 3 Brutschränken in 21 Tagen 9000 Eier ausbrüten kann (wenn man diese Brutschränke gleichzeitig einsetzt). Um mit 3 Brutschränken 27000 Eier auszubrüten, muß man sie also dreimal hintereinander einsetzen und benötigt dazu dann 63 Tage .

***Aufgabe 5b)*** enthält eine *Falle*. Analoges Vorgehen führt zum Ergebnis, daß man mit 1 Brutschrank in 7 Tagen 1000 Eier ausbrüten kann. Dies widerspricht jedoch der Realität, weil man eben 21 Tage benötigt, um (egal ob mit Brutschrank oder Henne) ein Ei auszubrüten. Nach 7 Tagen wären die Eier nur "angebrütet", nicht "ausgebrütet".

Mit der ***Aufgabe 6)*** soll erreicht werden, daß die Schüler beim Formulieren von analogen Aufgaben stets überlegen, ob der erweiterte Dreisatz sinnvoll angewendet werden kann oder nicht.
Wenn eine Aufgabe die Information enthält, daß n Arbeiter auf einer bestimmten Baustelle in t Stunden eine Masse von m Tonnen transportieren, und wenn die Angabe von konkretem (n;t;m) realistisch ist, dann kann die Aufgabe dennoch sinnlos werden, wenn man t hinreichend klein und/oder m hinreichend groß wählt und nach n fragt, ohne zu beachten, daß auf einer solchen Baustelle stets nur eine nach oben beschränkte Anzahl von Arbeitern tätig sein kann, ohne sich gegenseitig zu behindern.
Auch folgender Aufgabentyp sollte bei dieser Gelegenheit betrachtet werden:
1 (ein) Auto benötigt zum Zurücklegen einer bestimmten Strecke bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 80 km/h genau 2 Stunden.
Es wird den Schülern nicht schwerfallen, Aufgaben zu formulieren, bei denen die Anwendung des Dreisatzes sinnlose Ergebnisse liefert und auch zu entdecken, daß zwischen Geschwindigkeit und Zeit eine indirekte Proportionalität besteht.

***Aufgabe 7)*** gestattet zu zeigen, wie man umfangreichere Informationen in einer Tabelle übersichtlich festhalten kann. Da hier Angaben zu zwei verschiedenen

"Situationen" vorliegen, lohnt es, neben den "Zeileneingängen" (Anzahl / Zeit / Volumen) auch "Spalteneingänge" festzuhalten (Bagger / Erdarbeiter)

| | Anzahl | Zeit | Volumen |
|---|---|---|---|
| Bagger | 3 | 20 min | 90 m³ |
| Erdarbeiter | 1 | 1 Tag | 5 m³ |
| Erdarbeiter | 6 | | 90 m³ |

(6 Arbeiter Bedienung)

In gewohnter Weise erhält man das Resultat, daß 3 Tage benötigt werden. Die Information, daß für die Bedienung der 3 Bagger 6 Arbeiter eingesetzt werden, ist zur Beantwortung der gestellten Frage nicht erforderlich. Man kann aber durchaus andere Fragen stellen, wo dies der Fall ist.
Beim Stellen weiterer Fragen sollen die Schüler stets bewußt untersuchen, ob dies Fragen sind, für deren Beantwortung der erweiterte Dreisatz verwendet werden kann, und sie sollen auch Fragen stellen, bei denen dies nicht zutrifft.

***Aufgabe 8):***
Da im Unterricht der Klasse 5 der Begriff "Geschwindigkeit" nebst zugehöriger Formel noch nicht explizit behandelt wird, empfiehlt es sich, bei *"Bewegungsaufgaben"* zunächst Tabellen folgender Art zu verwenden:

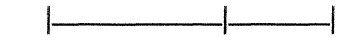
| | Geschwin digkeit | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Weg | Zeit | Gesamtweg | Gesamtzeit |
| 1. Strecke | 75 km | 1 h | | 4 h |
| 2. Strecke | 50 km | 1 h | | |
| zusammen | XXXXX | XXXXX | | 9 h |

Wenn ein Schüler mit Geschwindigkeitsangaben in km/h korrekt umgehen kann, dann wird man dies selbstverständlich akzeptieren.
Wie bei den im Abschnitt "Wer ist wer?" eingeführten Zuordnungstabellen wird man nun fragen, welches der noch leeren 'Felder sich als erstes füllen läßt, u.s.w.
So gelangt man zum Resultat, daß der gesuchte Gesamtweg 550 km beträgt.

Bei der leichten ***Aufgabe 9)*** benötigt man keine Tabelle, um die gegebenen Informationen übersichtlich festzuhalten. Folgende Notizen genügen:

Moped: 60 km/h ; nach 90 min in B .

Auto: 80 km/h ; nach 90 min in C ; 25 min Pause.




Hier sollten die Schüler, bevor sie zu rechnen beginnen, ihren *"groben Lösungsplan"* zur Diskussion stellen. Notfalls helfen folgende *Impulse*:

- Was müßte ich wissen, um die Frage beantworten zu können? Begründe!

[ Wenn ich die Fahrzeit des Mopeds von B bis C kennen würde, dann könnte ich durch einen Vergleich feststellen, ob das Auto zum zugehörigen Zeitpunkt noch Pause in C macht oder schon wieder abgefahren ist.]

- Was benötige ich, um die Fahrzeit des Mopeds von B bis C berechnen zu können?"

[ Ich benötige die Länge der Fahrstrecke $\overline{BC}$ .]

Bei den gegebenen Zahlen sind die Rechnungen leicht im Kopf durchzuführen. Da das Moped für die 20 km von B nach C 30 min benötigt, lautet die Antwort auf die gestellte Frage: Nein .

Beim Durchlesen der ***Aufgabe 10)*** sollen die Schüler feststellen, daß die vorkommenden Massen in unterschiedlichen Einheiten angegeben sind und daher zunächst die Umrechnung in eine günstig gewählte gemeinsame Einheit erforderlich ist. Dann kann man die gegebenen Informationen wie folgt in einer *Tabelle* übersichtlich festhalten:

| Rosenblüten | Rosen | Rosenöl | Parfüm |
|---|---|---|---|
| 1 kg | 500 kg | | |
| | | 2 Tropfen | 1 Liter |
| 0,001 kg | | 25 Tropfen | |
| | 800 kg | | |
| ( 1,6 kg) | 800 kg | | |
| 1,6 kg | | (40000 Tropfen) | |
| | | 40000 Tropfen | 20000 Liter |

Hier werden auch leistungsstärkere Schüler, die die Aufgabe 9) problemlos selbständig bewältigen konnten, merken, wie nützlich es sein kann, zunächst nach einem *groben Lösungsplan* zu suchen, bevor man mit dem konkreten Rechnen beginnt.
Wenn ich wüßte, wieviel Tropfen Öl sich aus den 800 kg Rosen herstellen lassen, käme ich ans Ziel, weil ..... (vgl. die 2. Zeile der Daten) .
Wenn ich wüßte, wieviel kg Öl sich aus den 800 kg Rosen herstellen lassen, käme ich ans Ziel, weil .... (vgl. die 3. Zeile der Daten) .

Mein *Lösungsplan* sieht daher wie folgt aus:
Ich berechne (m.H. der 1. Zeile), wieviel kg Öl sich aus 800 kg Rosen herstellen lassen; dann (m.H. der 3. Zeile) wieviel Tropfen Öl und hieraus (m.H. der 2. Zeile) wieviel Liter Parfüm sich herstellen lassen.

Die Nebenrechnungen liefern dann:

800 kg Rosen - 1,6 kg Öl - 40000 Tropfen Öl - 20000 l Parfüm .

Falls man beim Spiel "Hundert gewinnt" die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* bereits eingeführt hat, dann kann man die Schüler darauf aufmerksam machen, daß wir hier diese Strategie beim Lösen einer Sachaufgabe eingesetzt haben. Es lohnt jedoch nicht, hierfür viel Zeit aufzuwenden, weil erst in den Abschnitten "10. Skizzen", "11. Mengendiagramme" und "14. Flächen/Körper" auf diese Strategie ausführlicher eingegangen wird.

Die ***Aufgabe 11)*** hat einen hohen Schwierigkeitsgrad. Man beobachte, welche Schüler selbständig einen Lösungsweg finden. Solche Schüler dürfen dann denjenigen Schülern, die dies nicht schaffen, geschickte Fragen stellen oder Impulse geben, z.B.:

- Wieviel Wasser fließt in 6 min ab? [ 10 min - 1 Wanne | 6 min - 0,6 Wanne ]
- Welcher Anteil der Wanne wäre also nach 6 min gefüllt? [ 0,4 Wanne ]
- Wann wäre die Wanne also voll? [6 min - 0,4 W | 3 min - 0,2 W | 15 min - 1 W]

Bei leistungsschwächeren Schülern ist es angebracht, den Lösungsfindungsprozeß stärker zu unterstützen. Folgende Impulse können helfen:

- Warum läuft die Wanne über? [ Es fließt mehr Wasser zu als ab ]
- Wann beginnt die Wanne überzulaufen?

[ Wenn genau eine Wannenfüllung mehr zugelaufen als abgelaufen ist ]

° Verschaffe dir einen Überblick über "Zufluß", "Abfluß" und deren Differenz in Abhängigkeit von der seit Öffnen des Wasserhahns vergangenen Zeit!

: Wähle dabei "günstige" Zeiten, für die sich "Zufluß" und "Abfluß" möglichst einfach berechnen lassen!

Auf diese Weise werden die Schüler zum *systematischen Probieren* angeregt, wobei man auch zulassen kann, daß gewisse Werte nur geschätzt werden. Die "Zeit" ist gewiß dann günstig gewählt, wenn sich "Zufluß" und "Abfluß" durch ganzahlige Wannenfüllungen ausdrücken lassen. Dabei bietet es sich an, die berechneten oder geschätzten Werte in einer *Tabelle* festzuhalten.

| Zeit | Zufluß | Abfluß | Differenz |
|---|---|---|---|
| 6 min | 1 Wanne | < 1Wanne \| 0,6 Wannen | |
| 10 min | > 1 Wanne | 1 Wanne | |
| 12 min | 2 Wannen | > 1Wanne \| 1,2 Wannen | |
| 30 min | 5 Wannen | 3 Wannen | 2 Wannen |
| 15 min | 2,5 Wannen | 1,5 Wannen | 1 Wanne |

## 3.3. Aufgaben, die man im Finstern löst

***Ziele:***

- *Extremalprinzip* "ungünstigster Fall".
- Übergang zu einer einfacheren Aufgabe.
- Wahl günstiger Bezeichnungen.
- Begriffe "und", "oder", "mindestens", "höchstens", "genau".

Die beiden Aufgaben könnten ohne weiteres in einem Zirkel bewältigt werden. Um den Übungseffekt zu erhöhen, sollte man sich jedoch mindestens in zwei Zirkeln (neben Aufgaben aus "Wir lernen systematisch arbeiten") mit diesen Aufgaben befassen, z.B.:
Vereinfachte Aufgabe und Aufgabe 1a,b,d,e) im 1. Zirkel;
Aufgabe 1c,f) und Aufgabe 2a) im 2. Zirkel;
Aufgabe 2b), also von den Schülern gestellte Aufgaben im 3. Zirkel.

***Aufgabe 1):***

- *Analoge* einfachere Aufgabe? [ Z.B.: 1 rote Kugel aus einer Menge von 3 roten und 2 blauen Kugeln herausnehmen, kurz: 1 r aus { r , r , r , b , b } ]
- Ungünstigster Fall? [ { b , b } wird entnommen, kurz: 2 b ]
- Wieviel Kugeln müssen daher mindestens entnommen werden? [ Eine mehr als 2 Kugeln, also 3 Kugeln ]

Man lasse solche einfachen Aufgaben lösen, bis alle Schüler die Anwendung dieses Extremalprinzips verstanden haben und die Begriffe "und", "oder", "mindestens" richtig handhaben.
Aufgabenstellung und Lösungsplan zu der schwereren Ausgangsaufgabe lassen sich dann wie folgt übersichtlich (an der Wandtafel) festhalten:

Gegeben: 10r , 8b , 6w

| Gesucht | ungünstigster Fall | zu entnehmen |
|---|---|---|
| a) 1r | 8b und 6w | 8 + 6 + 1 = 15 |
| b) 1r und 1b | 10r und 6w | 10 + 6 + 1 = 17 |
| c) 1r und 1b und 1w | 10r und 8b | 10 + 8 + 1 = 19 |
| d) 1r oder 1w | 8b | 8 + 1 = 9 |
| e) 2r oder 2b oder 2w | 1r und 1b und 1w | 3 + 1 = 4 |
| f) 6r oder 6b oder 6w | 5r und 5b und 5w | 15 + 1 = 16 |

Bei ***Aufgabe 2a)*** führt analoges Vorgehen zu folgendem Ergebnis:

Gegeben: 28r , 28b , 26s , 16w , 2g .
Gesucht: 9 gleichfarbige Kugeln.
Ungünstigster Fall: 8r und 8b und 8s und 8w und 2g .
Zu entnehmen: 8 + 8 + 8 + 8 + 2 + 1 = 35 .

## 3.4. Wir lernen systematisch arbeiten und geschickt zählen

***Ziele:***

- Einführen günstiger Bezeichnungen.
- Prinzip des *lexikographischen Ordnens* (zum Bestimmen von Reihenfolgen).
- Finden mehrerer unterschiedlicher Ordnungsprinzipien.
- *Systematisches Probieren* (auf der Grundlage einer gewählten Reihenfolge der Elemente).
- Übergang zu einfacheren Aufgaben.
- *Rückführungsprinzip.*
- Ermitteln der Anzahlen von *Permutationen* und *Kombinationen.*

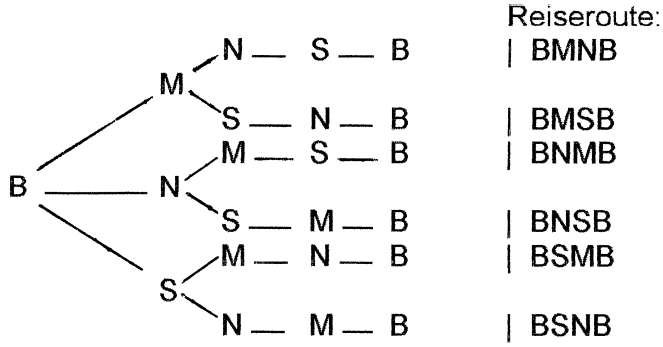
Man beachte, daß von den 5 Zirkeln, die man für diese Aufgabengruppe vorsehen kann, zunächst nur 2 Zirkel gehalten werden. Es folgen dann 2 Zirkel zu "Zahlen werden gesucht", dann 2 Zirkel zu "Vermischte Aufgaben", in denen auch die Vorbereitung und Auswertung der Kreisolympiade liegt. Erst dann folgen die restlichen 3 Zirkel zu "Systematisch arbeiten", und zwar beginnend mit Aufgabe 11).

Schüler dieser Klassenstufe neigen in der Regel sehr dazu, Aufgaben durch *Probieren* zu lösen, auch wenn sich diese Aufgaben durch *"Folgern"* eleganter lösen lassen. In diesem Abschnitt besprechen wir nur solche Aufgaben, bei denen Probieren eine angemessene Lösungsmethode ist. Dabei soll der AG-Leiter den Schülern das "richtige" Vorgehen keinesfalls immer gleich vormachen! Die Schüler sollen selbst erkennen, ob jemand "unsystematisch" probiert oder "ungeschickt" zählt, und sie sollen beim Lösen von hinreichend schweren Aufgaben die Nützlichkeit bzw. sogar Notwendigkeit eines streng systematischen Vorgehens selbst erfahren. Am Anfang sollen stets Vorschläge der Schüler stehen, wie man an das Lösen der betreffenden Aufgabe herangehen kann oder will, und keineswegs immer gleich die hier angegebenen Impulse!

***Aufgabe 1):***

| | |
|---|---|
| - Einfachere Aufgabe! | Der Name hat nur 3 oder gar nur 2 Buchstaben. |
| - Läßt sich die Lösung der einfacheren Aufgabe für die Lösung der Ausgangsaufgabe verwenden? | Bei 3 Buchstaben gibt es (in lexikographischer Reihenfolge geschrieben) jeweils 6 Möglichkeiten, z.B.:<br>ERT , ETR , RET , RTE , TER , TRE .<br>Ich setze jeweils den 4. Buchstaben vor jeden der 3-Buchstaben-Namen. |
| - Löse die Ausgangsaufgabe! | BERT , BETR , BRET , BRTE , BTER , BTRE \| 6 Mögl.<br>EBRT , EBTR , E..... , E..... , E..... , ETRB \| 6 Mögl.<br>RBET , RBTR , R..... , R..... , R..... , RTEB \| 6 Mögl.<br>TBER , TBRE ; T..... , T..... , T..... , TREB \| 6 Mögl.<br>6·4 = 24 Mögl. |
| - Läßt sich die Lösungsidee für andere Aufgaben verwenden? Formuliere und löse solche Aufgaben! | Mit diesem Lösungsprinzip kann ich auch die Anzahl der Möglichkeiten ermitteln, einen Namen mit 5 ( 6 , 7 , ...) Buchstaben zu schreiben:<br>24·5 = 120 ; 120·6 = 720 ; 720·7 = 5040 usw. |

Bei ***Aufgabe 2)*** kann man das Hilfsmittel *"Baum"* einführen. Von B ausgehend kann man im 1. Teilstück der Reise 3 Städte erreichen, im zweiten Teilstück noch jeweils 2 Städte, und die Rückreise nach B im 3. Teilstück der Reise ist dann jeweils eindeutig festgelegt. Also gibt es insgesamt 3·2·1 = 6 verschiedene Reiserouten, die die gestellten Bedingungen erfüllen.
Dies kann man wie folgt festhalten:




Auch hier haben wir das *"lexikographische Ordnungsprinzip"* verwendet.

Bei **Aufgabe 3)** sollen die Schüler erkennen, daß es sich nur um eine andere Einkleidung der Aufgabe 2) handelt.
Beim *"Rückblick"* wird man hervorheben, daß den ersten drei Aufgaben gemeinsam ist, daß es sich um *Anordnungsprobleme* handelt, bei denen unterschiedliche *Reihenfolgen* der Elemente einer gegebenen Menge zu ermitteln waren.

***Aufgabe 4):***
Zunächst ist zu klären, daß es hier um ein *"Auswahlproblem"* geht, bei dem es auf die Reihenfolge (Anordnung) der ausgewählten Elemente nicht ankommt.
Neben dem Üben des *lexikographischen Ordnens* geht es hier wieder um das Entdecken einer verallgemeinerungsfähigen Zählmethode, hier durch geschickte "Gruppenbildung":

ABC , ABD , ABE , ABF ,
ACD , ACE , ACF ,
ADE , ADF ,
AEF ;

BCD , BCE , BCF ,
BDE , BDF ,
BEF ;

CDE , CDF ,
CEF ;

DEF .

1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 Möglichkeiten .

Man wird die Schüler auffordern, andere Einkleidungen für diese Aufgabe zu finden, *"verwandte"* Aufgaben zu formulieren und zu lösen (z.B. 3 Elemente aus 5 ; 3 Elemente aus 7 ; usw.).

Bei ***Aufgabe 5)*** geht es vor allem darum, die durch systematisches Arbeiten erhaltenen Teilresultate übersichtlich festzuhalten, um so durch *unvollständige Induktion* zu einer Vermutung zu gelangen. Auch der *einfachste Fall* eines (2x2)-Felderbretts sollte betrachtet werden.
Die erhaltenen Resultate kann man folgendermaßen festhalten:

| | Anzahl der Quadrate, bestehend aus | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 Feld | 4 Felder | 9 Felder | 16 Felder | 25 Felder | .. | Gesamtanzahl der Quadrate |
| (2x2)-Felderbrett | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 + 4 = 5 |
| (3x3)-Felderbrett | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1+4+9 = 5+9 = 14 |
| (4x4)-Felderbrett | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1+4+9+16=14+16 = 30 |
| (5x5)-Felderbrett | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1+4+...+16+25=30+25 = 55 |

(6x6)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 25 + 36 = 55 + 36 = 91

(7x7)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 36 + 49 = 91 + 49 = 140

(8x8)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 49 + 64 = 140 + 64 = 204

(9x9)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 64 + 81 = 204 + 81 = 285

(10x10)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 81 + 100 = 285 + 100 = 385

(11x11)-Felderbrett: 1 + 4 + ... + 100 + 121 = 385 + 121 = 506

(nxn)-Felderbrett: $1 + 4 + 9 + .... + n^2$

***Aufgabe 6):***

Befolgt man das *Ordnungsprinzip "rechts vor unten"* (d.h. man gehe solange wie möglich nach rechts, dann erst nach unten), erhält man die Folge

ABCFI , ABEFI , ABEHI , ADEFI , ADEHI , ADGHI ,

die sogar *lexikographisch geordnet* ist.

Auch das *Ordnungsprinzip "unten vor rechts"* liefert eine solche Folge, die aber nicht lexikographisch geordnet ist.

Auch das *Hifsmittel "Baum"* kann hier eingesetzt werden. Von A gehen zwei mögliche Wege aus, die nach B bzw. D führen. Von B gehen ebenfalls zwei Wege aus, die nach C bzw. E führen. Von C geht nur ein Weg aus, der nach F führt, usw.

Bei ***Aufgabe 7)*** wird man das *lexikographische Ordnen* auf eine Menge von Zahlen übertragen, für die - wie aus der Aufgabenstellung abzuleiten ist -

$a \leq b \leq c$ und $a + b + c = 7$

gelten soll. Dies liefert folgende 8 Lösungstripel:

(0;0;7) , (0;1;6) , (0;2;5) , 0;3;4) , (1;1;5) , (1;2;4) , (1;3;3) , (2;2;3) .

Von etwas höherem Schwierigkeitsgrad ist die ***Aufgabe 8)***. Hier kommt es darauf an, Teilaufgabe a) als *Hilfsaufgabe* für Teilaufgabe b) einzusetzen und zu erkennen, daß man von den beiden Möglichkeiten, "rot vor blau" (z.B. $r_1b_1r_2b_2r_3b_3$) bzw. "blau vor rot" (z.B. $b_1r_1b_2r_2b_3r_3$) jeweils nur eine genauer betrachten muß, da die Anzahl der Möglichkeiten in beiden Fällen gleich ist.

Man überprüfe, ob bereits alle Schüler in der Lage sind, die 6 Anordnungsmöglichkeiten bei Teilaufgabe a) selbständig zu ermitteln und ob es Schüler gibt, die auch die Teilaufgabe b) selbständig lösen und erkennen, daß es hier $2 \cdot (6 \cdot 6) = 72$ Möglichkeiten gibt. Mit den anderen Schülern erarbeite man folgende Übersicht, die den Lösungsweg veranschaulicht:

| | $r_1$ _ $r_2$ _ $r_3$ _ | $r_1$ _ $r_3$ _ $r_2$ _ | .. | .. | .. | $r_3$ _ $r_2$ _ $r_1$ _ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 Möglichkeiten | $r_1$ $b_1$ $r_2$ $b_2$ $r_3$ $b_3$ | $r_1$ $b_1$ $r_3$ $b_1$ $r_2$ $b_1$ | | | | $r_3$ $b_1$ $r_2$ $b_2$ $r_1$ $b_3$ |
| | " $b_1$ " $b_3$ " $b_2$ | | | | | " $b_1$ " $b_3$ " $b_2$ |
| | .. .... .. .. .. .... | | | | | .. . .. .... .. .... |
| | " $b_3$ " $b_2$ " $b_1$ | | | | | $r_3$ $b_3$ $r_2$ $b_2$ $r_1$ $b_1$ |

6 Möglichkeiten

***Aufgabe 9):***
Beim Ermitteln der Lösungen durch systematisches Probieren ist es hier günstig, zunächst alle Möglichkeiten für das Besetzen der Ecken zu ermitteln und hieraus die zugehörigen Seitenbelegungen zu berechnen.

| in jeder Ecke | auf allen Seiten | auf einer Seite |
|---|---|---|
| 0 | 12 - 4·0 = 12 | 12 : 4 = 3 |
| 1 | 12 - 4·1 = 8 | 8 : 4 = 2 |
| 2 | 12 - 4·2 = 4 | 4 : 4 = 1 |
| 3 | 12 - 4·3 = 0 | 0 : 4 = 0 |

Bei Teil b) sollte man die Problematik *"Einzigkeitsnachweis"* wieder aufgreifen und auf die Anforderungen an eine exakte *Lösungsdarstellung* eingehen.
Abschließend wird man die Schüler die *Musterlösung* auf Seite 30 der Aufgabensammlung durchlesen lassen.

Bei ***Aufgabe 10)*** dürfte es den Schülern nicht schwerfallen, die beiden Lösungen (u.U. durch unsystematisches Probieren) zu finden. Schwierigkeiten können bei der Erläuterung des verwendeten *Ordnungsprinzips* sowie beim *Einzigkeitsnachweis* und beim *Existenznachweis* auftreten.
Offensichtlich gibt es für das Ausfüllen der Felder einer Zeile oder Spalte stets drei verschiedene Möglichkeiten. Beginnt man mit dem Ausfüllen der ersten Zeile, dann gibt es für das Ausfüllen der zweiten Zeile nur noch zwei zulässige Möglichkeiten (Nachweis führen!) und für die dritte Zeile nur noch eine Möglichkeit (Nachweis führen!), wobei man zunächst noch nicht berücksichtigt, daß nur alle "verschiedenen" Stellungen anzugeben sind. Damit ist nachgewiesen, daß nur folgende sechs Stellungen die genannten Bedingungen erfüllen können *(Einzigkeitsnachweis)*:

**(1)**

| | | |
|---|---|---|
| X | X | |
| X | | X |
| | X | X |

**(2)**

| | | |
|---|---|---|
| X | | X |
| X | X | |
| | X | X |

(2a)

| | | |
|---|---|---|
| | X | X |
| X | X | |
| X | | X |

(2b)

| | | |
|---|---|---|
| X | X | |
| | X | X |
| X | | X |

(2c)

| | | |
|---|---|---|
| X | | X |
| | X | X |
| X | X | |

(1a)

| | | |
|---|---|---|
| | X | X |
| X | | X |
| X | X | |

Beim Durchführen des *Existenznachweises* muß man nun noch erkennen, daß nur zwei der 6 "lösungsverdächtigen" Stellungen auch die Bedingung erfüllen, "verschieden" zu sein, denn es gilt:

(2a) geht durch Spiegelung an der waagerechten Symmetrieachse in (2) über;

(2b) geht durch die Halbdrehung um das Symmetriezentrum in (2) über;

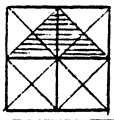
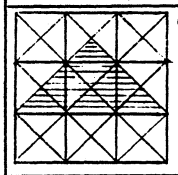
(2c) geht durch Spiegelung an der senkrechten Symmetrieachse in (2) über;

(1a) geht durch die Halbdrehung um das Symmetriezentrum in (1) über.

Da in (1) das zentrale Feld nicht belegt ist, kann es weder eine Drehung noch eine Spiegelung geben, die (1) in (2) überführt, womit gezeigt ist, daß diese beiden Stellungen auch die Bedingung erfüllen, verschiedene Stellungen zu sein.
Von leistungsstarken Schülern sollte man diese Überlegungen verlangen.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist vor allem der Teil c) der ***Aufgabe 11)***, die der Aufgabe 7.3.b des ARW entspricht.
Um die gesuchte Gesamtanzahl von Dreiecken zu erhalten, stellen wir zunächst fest, welche Arten von Dreiecken vorkommen (siehe Spalteneingänge der Tabelle). Dann ermitteln wir jeweils deren Anzahl und berechnen die Summe dieser Anzahlen.
Da Figur b) aus vier Figuren a) zusammengesetzt ist, enthält sie auch jeweils genau 4 Dreiecke der Art d1 und d2 wie Figur a)
Figur a) enthält jeweils genau 4 Dreiecke der Art d1 und d2. Analog findet man in Figur b) jeweils 4 Dreiecke der Art d3 und d4. In Figur b) gibt es allerdings noch vier weitere Dreiecke der Art d3 (eines davon wurde in Figur b) schraffiert).
Also findet man in <u>in Figur b)</u> insgesamt <u>44 Dreiecke</u> .
Bei analogem Vorgehen (vgl. Tabelle) findet man <u>in Figur c)</u> insgesamt <u>124 Dreiecke</u>. Etwas schwieriger ist hier das Ermitteln der Anzahl der Dreiecke der Art d3.

Tabelle zu Aufgabe 11)

| Arten von Dreiecken / Figur | d1 | d2 | d3 | d4 | d5 | d6 | Gesamtanzahl |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 4 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| b)  | 4 • 4 = 16 | 4 • 4 = 16 | 4 + 4 = 8 | 4 4 | 0 0 | 0 0 | 44 |
| c)  | 9 • 4 = 36 | 9 • 4 = 36 | 4 • 8 − 8 = 24 | 4 • 4 = 16 | 4 + 4 = 8 | 4 4 | 124 |

***Aufgabe 12):***
Hier besteht die Möglichkeit, verschiedene *Ordnungsprinzipien* finden und einschätzen zu lassen.

1. *Lexikographisch* vorgehen und dabei die Aufgabentripel, zu denen kein Dreieck gehört, aussondern. Dies liefert die Folge der <u>8 Dreiecke</u>
   ABC , ABD , ABN , ACD , AEJ , AEH , AJH , AND .

2. Ordnungsprinzip *"rechts vor oben"* für den 2. und den 3. Endpunkt. Dies liefert die Folge AEJ , AEH , ABN , ABD , ABC , AJH , AND , ACD .

3. Ordnungsprinzip *"von links nach rechts, der Größe nach"*. Dies liefert die Folge AEJ, AJH , AEH , ABN , AND , ABD , ABC , ACD .

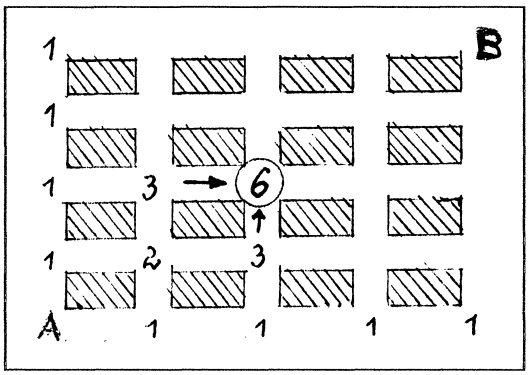
Nach dem Finden verschiedener Ordnungsprinzipien kann man die Lösung arbeitsteilig in Gruppen ermitteln lassen und dabei Zeitaufwand und Fehlerquoten vergleichen.

***Aufgabe 13):***

Bei der Suche nach einer bereits gelösten *analogen Aufgabe* könnte man auf Aufgabe 6) stoßen, wo "Buchstaben" anstelle von "Kreuzungspunkten" der Straßen stehen. Dies könnte zum Vorschlag führen, hier etwa das *Ordnungsprinzip "rechts vor oben"* anzuwenden.

Die Suche nach einer *einfacheren Aufgabe* kann die Idee liefern, zunächst die Weganzahlen zu nähergelegenen "Kreuzungspunkten" zu ermitteln und diese in die Kreuzungspunkte zu schreiben.

- Zu welchen Kreuzungspunkten lassen sich die Anzahlen sofort angeben oder leicht ermitteln?
  - ° "Symmetrie" beachten!
- Lassen sich diese Anzahlen auch berechnen?
  Suche nach Gesetzmäßigkeiten!
  - ° Vergleiche die Zahl in einem Kreuzungspunkt mit den Zahlen in den links und unten benachbarten Kreuzungspunkten! Vermutung? Begründung!




Da es stets genau eine Möglichkeit gibt, von einem Kreuzungspunkt zu einem "benachbarten" zu gelangen, und da jeder neue (von einem Randpunkt verschiedene) Kreuzungspunkt von genau zwei benachbarten Kreuzungspunkten aus erreicht werden kann, brauche ich die in diesen "Nachbarpunkten" stehenden Zahlen nur zu addieren. So kann ich schrittweise zu jedem Kreuzungspunkt die gesuchte Anzahl verschiedener Wege ermitteln und komme so zur Lösung der Aufgabe: Es gibt 70 verschiedene Wege von A nach B .

Auf diese Aufgabe werden wir beim Behandeln der Aufgabe 10) im Abschnitt "13. Wir suchen Vermutungen" zurückgreifen.

***Aufgabe 14):***

Im Prinzip wäre es möglich, in Gedanken die Folge der Zahlen von 1 bis 4637 durchzugehen und die Anzahl der vorkommenden Ziffern 6 mit Hilfe einer Strichliste zu ermitteln. Den Schülern sollte bewußt gemacht werden, daß dies eine unangemessen umständliche Methode wäre.

Wir *vereinfachen* die Aufgabe, indem wir z.B. nur die Zahlen von 0 bis 100 betrachten, wo man durch "Durchzählen" leicht erkennt, daß die Ziffer 6 genau 20 mal vorkommt. Entscheidend ist die Erkenntnis, daß die 6 genau 10 mal als Einerziffer und genau 10 mal als Zehnerziffer vorkommt.

Dieses Zählsystem läßt sich auf die Ausgangsaufgabe übertragen.

Man kann den Lösungsweg folgendermaßen kurz festhalten:

Anzahl der "6" in 0 , 1 , 2 , ... , 4637 ?

6 im Einer: 463 volle Zehnerpakete;
Rest: 4630 , 4631 , ... , 4636 , 4637 .
Also: 436·1 + 1 = 464 .

6 im Zehner: 46 volle Hunderterpakete;

Rest: 4600 , 4601 , ... , 4637 .
Also: 46·10 + 0 = 460 .

6 im Hunderter: 4 volle Tausenderpakete;
Rest: 4000 , 4001 , ... , 4600 , 4601 , ... , 4637 .
Also: 4·100 + 38 = 438 .

6 im Tausender: keine .

Also enthalten die Zahlen 1 , 2 , ... , 4637 insgesamt: 464 + 460 + 438 = 1362 mal die Ziffer 6 ,
Analog erhält man, daß diese Zahlen insgesamt 2070 mal die Ziffer 4 enthalten.

Bei ***Aufgabe 15)*** dürften - vor allem für das 3x4-Labyrinth - nur diejenigen Schüler zu den richtigen Lösungen gelangen, die systematisch nach einem bestimmten Ordnungsprinzip vorgehen. Praktikabel ist das Verwenden eines *Baums,* in dem festgehalten wird, welche Felder man von einem bestimmten Feld aus betreten darf, wenn die Bedingungen der Aufgabe eingehalten werden. Dabei kann man das Ordnungsprinzip *"rechts vor unten vor links vor oben"* (also "in Uhrzeigerrichtung") verwenden. Die Schüler werden schnell merken, daß außer einem "Rückwärtslaufen" auch "Schleifen" zu vermeiden sind, weil auch sie zu einem doppelten Betreten eines Feldes führen.
Beim 3x3-Labyrinth gibt es 11 Möglichkeiten des Durchlaufens, wobei in 2 Fällen alle 9 Felder genau einmal betreten werden. Dies kann man wie folgt festhalten:

| | | |
|---|---|---|
| 123 : | | 1 Möglichkeit |
| 125 : | 63 ; 8963 ; 478963 ; | 3 Möglichkeiten |
| 145 : | 63; 8963; 23; | 3 Möglichkeiten |
| 147 : | 8523; 8563; 8963; 896523 . | 4 Möglichkeiten |

Beim 3x4-Labyrinth gibt es 37 Möglichkeiten des Durchlaufens, wobei in 4 Fällen alle 12 Felder genau einmal betreten werden. Dies kann man wie folgt festhalten:

| | |
|---|---|
| 1234: | 1 Möglichkeit |
| 1237: 84; (11)(12)84; 6(10)(11)(12)84; 659(10)(11)(12)84 | 4 Möglichkeiten |
| 1267: 84; 7(11)(12)84; 34 | 3 Möglichkeiten |
| 126(10): (11)(12)84; (11)(12)8734; (11)784; (11)734; | 4 Möglichkeiten |
| 1265: 9(10)(11)(12)8734; 9(10)(11)(12)84; 9(10)(11)784; 9(10)(11)734; | 4 Mögl. |
| 1567: 84; (11)(12)84; 34; | 3 Möglichkeiten |
| 156(10): (11)(12)84; (11)784; (11)734; | 3 Möglichkeiten |
| 1562: 34; 3784; 37(11)(12)84 | 3 Möglichkeiten |
| 159(10)(11) : (12)84; (12)876234 ; (12)8734; 784; 76234; 734 | 6 Möglichkeiten |
| 159(10)6: 784; 7(11)(12)84; 734; 234; 23784; 237(11)(12)84 . | 6 Möglichkeiten |

Um nachzuweisen, daß es im 3x3-Labyrinth nicht möglich ist, vom Feld 1 ausgehend alle Felder genau einmal zu durchlaufen und Feld 2 als Ausgang zu benutzen, untersuche man die beiden möglichen Fälle, daß entweder das Feld 3 oder das Feld 5 als vorletztes Feld betreten werden müßte, was sich als unmöglich erweist.

So gelangt man schließlich zur Erkenntnis, daß im 3x3-Labyrinth als Ausgang nur die Eckfelder 3 , 7 oder 9 in Frage kommen, beim 3x4-Labyrinth nur die Felder 2 , 4 5 , 10 oder 12.

Bei ***Aufgabe 16)*** sollen vor allem leistungsfähige Schüler erfahren, wie man durch "geschicktes Zählen" auch allgemeingültige Gesetze entdecken kann.
Zunächst wird man zu einigen konkreten Eckenzahlen e (die mit den Seitenzahlen s übereinstimmen) die zugehörigen Anzahlen d der Diagonalen ermitteln lassen, wobei auch der Fall e = s = 3 mit betrachtet wird.
Der so entstandenen Zahlenfolge ist ein *explizites* Bildungsgesetz wohl noch kaum zu entnehmen.

| e = s | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | .. | n | .. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 0 | 2 | 5 | 9 | 14 | | | | | |
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | | |

Lenkt man die Aufmerksamkeit auf die Differenzen aufeinanderfolgender Zahlen, dann ist leicht zu erkennen, daß diese jeweils um 1 zunehmen. Auf diese Weise können auch leistungsschwächere Schüler eine *rekursive* Bildungsvorschrift entdekken, die es gestattet, jeweils das nächste Glied der Folge zu berechnen und die obige Tabelle beliebig weit fortzuführen.
Leistungsstarke Schüler sollte man auffordern, dieses Bildungsgesetz zu begründen. [ Geht man von einem n-Eck durch Hinzunahme eines weiteren Eckpunktes zu einem (n+1)-Eck über, dann kann man (n-2) neue Diagonalen einzeichnen, und eine Seite des n-Ecks wird zu einer weiteren Diagonalen des (n+1)-Ecks. Also hat das (n+1)-Eck stets um (n-1) Diagonalen mehr als das n-Eck. ]
Um eine *allgemeine Formel* für die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks zu ermitteln, können folgende *Impulse* helfen:

- Wieviel Diagonalen gehen von einem jeden Eckpunkt eines n-Ecks aus?

[ Da man von jedem Eckpunkt aus zu den (n-1) restlichen Eckpunkten eine Strecke ziehen kann, und da genau 2 dieser Strecken Seiten des n-Ecks sind (nämlich die zu den beiden "benachbarten" Eckpunkten führenden Strecken), gehen von jedem Eckpunkt eines n-Ecks stets genau (n-3) Diagonalen aus.]

- Wieviel Diagonalen gibt es daher insgesamt in einem n-Eck?

  ° Was muß man bei diesem Zählverfahren beachten?

[ Es gibt dann $n \cdot (n-1)$ Diagonalen, wobei ich beachten muß, daß ich auf diese Weise jede Diagonale doppelt gezählt habe. Also lautet die gesuchte Formel
$d(n) = n \cdot (n-3) : 2$ ] .
Es wird keineswegs verlangt, daß sich die Schüler diese Formel einprägen sollen! Einzuprägen ist die *Vorgehensweise zum Gewinnen der Formel,* verbunden mit der Fähigkeit, dieses *Zählverfahren* auf eine jede konkret vorgegebene Eckenzahl anzuwenden. Bei leistungsschwächeren Schülern wird man auf die Herleitung der allgemeinen Formel verzichten und die Vorgehensweise nur anhand zahlreicher konkreter, hinreichend großer Eckenzahlen üben.

Auch bei ***Aufgabe 17)***, bei der sich die gesuchte Anzahl w(n) der Wege für n = 7 leicht durch Abzählen gewinnen läßt, geht es vor allem daraum, verschiedene *Zählmethoden* entdecken zu lassen, die diese Aufgabe auch für große n zu lösen gestatten.
Zunächst ist zu klären, daß die Aufgabe darauf hinausläuft, die Summe der Anzahlen von Seiten und Diagonalen in einem n-Eck zu ermitteln. Auch hier wird man nur mit leistungsstarken Schülern auf die allgemeinen Formeln eingehen.

*1. Lösungsweg:*
Da ich aus der Aufgabe 16) bereits weiß, wie ich die Anzahl der Diagonalen ermitteln kann, brauche ich hierzu nur die Anzahl n der Seiten zu addieren. Also gilt für die gesuchte Anzahl der Wege $w = n + n\cdot(n-3):2 = 7 + 14 = 21$.

*2. Lösungsweg:*
Von jedem der Häuschen gehen 6 Wege aus, insgesamt also $7\cdot6 = 42$ Wege, wobei allerdings jeder Weg doppelt gezählt wurde. Also gilt $w = 7\cdot6:2 = 21$, allgemein $w = n\cdot(n-1):2$ .

*3. Lösungsweg:*
Jetzt achte ich darauf, daß jeder Weg von vornherein nur einmal gezählt wird. Vom 1. Häuschen gehen 6 Wege aus; vom 2. Häuschen gehen 5 Wege aus; vom 3. Häuschen gehen 4 Wege aus; ... ; vom 6. Häuschen geht dann noch genau 1 Weg aus. Also gilt $w = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

Bei dieser Gelegenheit wird man die Schüler fragen, wer bereits weiß, wie der Schüler GAUß in der 1. Klasse auf geschickte Weise die Summe der Zahlen von 1 bis 100 ermittelte. An der Wandtafel wird festgehalten:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + \ldots + 99 + 100 \\ s &= 100 + 99 + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2s &= 101+101 + \ldots + 101 + 101 \quad (100 \text{ Summanden}) \\ 2s &= 100\cdot101 \\ s &= 100\cdot101:2 \end{aligned}$$

Auch hier geht es wieder nicht darum, die allgemeine Formel $s = n\cdot(n+1):2$ auswendiglernen zu lassen, sondern die Schüler sollen sich das vom Schüler GAUß entdeckte *Additionsverfahren* aneignen. Dazu lasse man auch Aufgaben der folgenden Art lösen, bei denen die oben angegebene allgemeine Formel wertlos ist:

$s = 17 + 18 + 19 + \ldots + 35 + 36$ (20 Summanden)

$s = 3 + 6 + 9 + \ldots + 27 + 30$ (10 Summanden)

$s = 1 + 4 + 7 + \ldots + 25 + 28$ (? Summanden)

$s = 17 + 27 + 37 + \ldots + 247 + 257$ (? Summanden)

Derartige Aufgaben streue man so lange immer wieder ein, bis alle Schüler dieses Additionsverfahren beherrschen.

Bei ***Aufgabe 18)*** muß dann erkannt werden, daß hier dasselbe mathematische Problem vorliegt wie bei Aufgabe 17), nur für n = 15 und in anderer Einkleidung. Also können auch hier die oben angegebenen 3 Lösungswege beschritten werden, wobei man den 2. oder den 3. Lösungsweg bevorzugen wird.
Die gesuchte Anzahl von Fahrkarten beträgt $15\cdot14:2 = 105$ .

***Aufgabe 19)*** ist leicht, wenn man sich auf die Kantenlänge von 3 cm beschränkt. Um die Aufgabe für größere (ganzzahlige) Kantenlängen oder gar allgemein zu lösen, muß man erkennen:

a) Ein Würfel mit n cm Kantenlänge läßt sich stets in $n^3$ Würfel mit der Kantenlänge von 1cm zerlegen.

b) Nur die "Eckenwürfel" besitzen genau 3 angestrichene Seitenflächen, und dies sind stets 8 der kleinen Würfel.

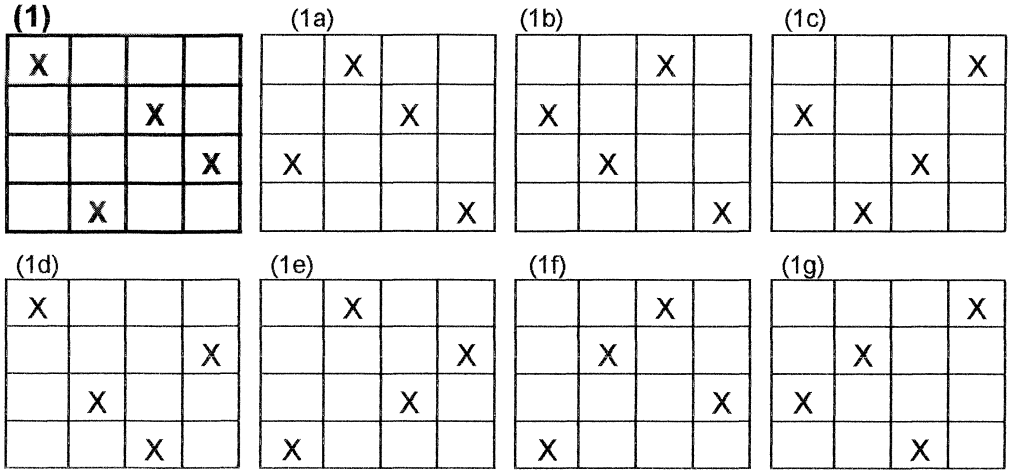
c) Nur die (von "Eckenwürfeln" verschiedenen) "Kantenwürfel" besitzen genau 2 angestrichene Seitenflächen, und dies sind stets $12\cdot(n-2)$ der kleinen Würfel.

d) Nur die (von "Eckenwürfeln" und "Kantenwürfeln" verschiedenen) "Seitenflächenwürfel" besitzen genau 1 angestrichene Seitenfläche, und dies sind stets $\underline{6\cdot(n-2)^2}$ der kleinen Würfel.

e) Nur die "Innenwürfel" besitzen genau 0 angestrichene Seitenflächen, und dies sind stets $\underline{(n-2)^3}$ der kleinen Würfel.

Dann wird man für jedes der konkret betrachteten n die *Probe* machen lassen: Die Summe der Anzahlen der Ecken-, Kanten-, Seitenflächen- und Innenwürfel muß stets $n^3$ betragen.

Bei ***Aufgabe 20)*** besteht die Schwierigkeit nicht darin, eine Lösung zu finden, sondern nachzuweisen, daß es nur genau eine Lösung gibt, die auch die Bedingung der "Verschiedenheit" erfüllt.
Wie in Aufgabe 10) sieht man zunächst von der Bedingung ab, daß nur voneinander verschiedene Verteilungen gesucht sind, d.h. man ermittelt zunächst systematisch alle Verteilungen, die sich äußerlich voneinander unterscheiden, sonst aber alle anderen gestellten Bedingungen erfüllen. Man beginnt mit dem Füllen der 1. Zeile, in der ein Stein offensichtlich genau 4 Stellungen einnehmen kann, die in der Reihenfolgen "links vor rechts" angeordnet werden. Dann zeigt es sich, daß es zu jeder dieser vier Möglichkeiten jeweils genau 2 derartige Verteilungen gibt. Dies liefert die nachfolgend angegebenen 8 Verteilungen.




Nun wählen wir die zuerst gefundene Verteilung als "Repräsentanten" und zeigen, daß die restlichen 7 Verteilungen aus dieser durch eine Spiegelung oder Drehung hervorgehen und daher nicht als weitere Lösungen angesehen werden:

(1a) geht durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen in (1) über.

(1b) geht durch Halbdrehung um das Symmetriezentrum in (1) über.

(1c) geht durch Vierteldrehung entgegen dem Uhrzeigersinn um das Symmetriezentrum in (1) über.

(1d) geht durch Spiegelung an der Nebendiagonalen in (1) über.

(1e) geht durch Spiegelung an der waagerechten Symmetrieachse in (1) über.

(1f) geht durch Vierteldrehung entgegen dem Uhrzeigersinn um das Symmetriezentrum in (1) über.

(1g) geht durch Spiegelung an der senkrechten Symmetrieachse in (1) über.
Es ist erwähnenswert, daß wir hier alle verschiedenen Deckabbildungen eines Quadrats verwendet haben.

***Aufgabe 21):***

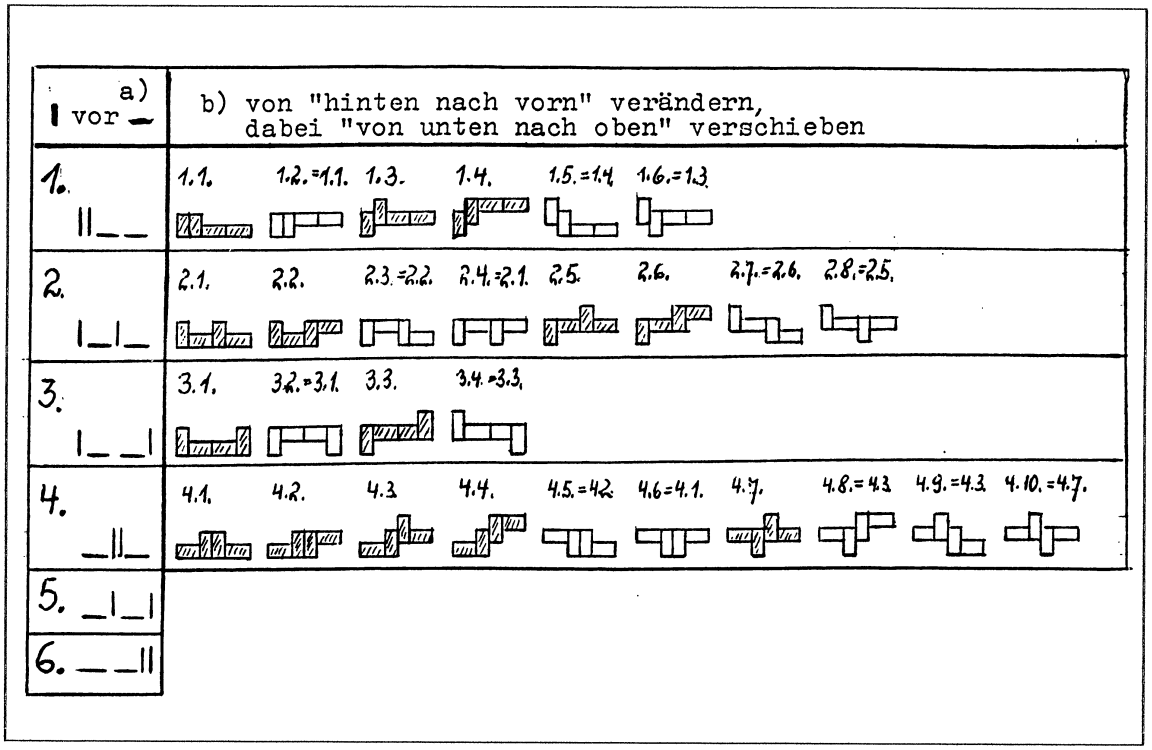
Diese Aufgabe ist relativ schwierig. Man sollte sie zunächst als Hausaufgabe stellen, um die Schüler erleben zu lassen, wie leicht Fehler beim Ermitteln aller Lösungen auftreten, wenn dies nicht systematisch erfolgt, d.h. wenn man über kein "sicheres" Anordnungsprinzip verfügt. Das *Entdecken eines* solchen *Anordnungsprinzips* als Grundlage für ein systematisches Probieren ist der entscheidende Teil der Lösungsfindung. Nur so kann man bei komplizierten Aufgaben wirklich alle Lösungen finden. Den Schülern muß darüberhinaus bewußt gemacht werden, daß ohne explizite Angabe eines solchen Anordnungsprinzips ein exakter *Einzigkeitsnachweis* gar nicht möglich wäre.

Folgende *Impulse* können die Lösungsfindung unterstützen:

| | |
|---|---|
| - Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen über die gesuchten Figuren sofort ableiten? Begründung!<br>° Mit welcher Bedingung werde ich günstigerweise beginnen? | Nach c) haben die Figuren eine Länge von 6 Quadratseiten; wegen a) können sie daher nur aus genau zwei "senkrechten" und zwei "waagerechten" Rechtecken zusammengesetzt sein. |
| - Ich suche nach einem Anordnungsprinzip, mit dem ich garantiert alle gesuchten Figuren erfassen kann.<br>° Wodurch können sich derartige Figuren noch unterscheiden? | Zwei solche Figuren können sich noch unterscheiden durch<br>(1) die Reihenfolge von "▮" und "▬" ;<br>(2) die Art der Berührung benachbarter Rechtecke. |
| - Mit welchem Anordnungsprinzip will ich beginnen?<br>° Anzahl der Möglichkeiten? | Wenn ich zunächst nur die Reihenfolge von "▮" und "▬" betrachte, dann gibt es genau 6 Möglichkeiten, die ich in meiner Tabelle nach dem Prinzip "▮" vor "▬" angeordnet habe.<br>Wegen Bedingung d) entfallen die beiden letztgenannten Möglichkeiten. |
| - Welches Anordnungsprinzip will ich jetzt beachten?<br>° Welche zulässigen Unterschiede habe ich ich noch nicht berücksichtigt? | Nun ist noch Bedingung b) zu beachten. Aus jeder der bisher ermittelten 4 Lösungsfiguren 1.1, 2.1, 3.1, 4.1 (wo die unteren Begrenzungen der vier Rechtecke jeweils auf einer Geraden liegen) lassen sich durch "Verschieben" der Rechtecke neue Lösungsfiguren gewinnen. |
| Habe ich nun ein Anordungsprinzip gefunden, mit dem ich garantiert alle Figuren erfassen kann, die als Lösung in Frage kommen?<br>° Kann ich dieses Anordnungsprinzip hinreichend klar formulieren? | Ich entscheide mich dafür, nur nach "oben" zu verschieben und dabei das Prinzip "von unten nach oben" zu beachten. (Das ist wegen Bedingung d) statthaft.)<br>Ich entscheide mich dafür, zuerst das 4. Rechteck zu verschieben, dann das 3., das 2. und das 1. Rechteck, also "von hinten nach vorn" zu verändern.<br>Durch dieses Anordnungsprinzip kann ich mit Sicherheit alle Lösungen ermitteln. |

| | |
|---|---|
| - Ich halte alle derart gewonnenen "lösungsverdächtigen" Figuren fest. | So ermittle ich zu jeder der 4 "Grundfiguren" systematisch alle Figuren, die auch die Bedingung b) erfüllen. |
| - Ich überprüfe, ob diese Figuren tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllen. | Ich sondere alle diejenigen Figuren aus, die die Bedingung d) nicht erfüllen<br>So erhalte ich 3+4+2+5 = <u>14 verschiedene Lösungen</u> . |

Resultat und Lösungsplan lassen sich in einer tabellarischen Übersicht festhalten. Der Aufwand wird geringer, wenn man sofort beim Ermitteln der Figuren, die Bedingung b) erfüllen, auch das Erfülltsein der Bedingung d) nachprüft, d.h. wenn man nur Figuren festhält, die b) und d) erfüllen. Dabei wächst jedoch die Gefahr, eine Lösung zu übersehen, und die exakte Darstellung des *Einzigkeitsnachweises* wird problematisch.




Bei ***Aufgabe 22)*** sollen die Schüler erkennen, daß es hier um ein *Anordnungsproblem* handelt, das wir in Aufgabe 1) bereits gelöst haben. Es wird wiederholt, wie man aus den (1·2·3 =) 6 verschiedenen Anordnungen von 3 Elementen die 24 (= 6·4 = 1·2·3·4) verschiedenen Anordnungen von 4 Elementen erhält, hieraus die 120 (= 24·5) verschiedenen Anordnungen von 5 Elementen, usw.
Abschließend kann man die abkürzende Schreibweise <u>n! = 1·2·3· ... ·n</u> einführen und festhalten lassen, daß man n Elemente stets auf n! verschiedene Weisen anordnen kann, wobei wiederum nicht die Formel eingeprägt werden soll, sondern das Verfahren zu ihrer Herleitung.

## 3.5. Zahlen werden gesucht

***Ziele:***

- Einführen von günstigen *Bezeichnungen* (Variablen).
- ° Mathematische Objekte durch *Terme* festhalten.
- ° Beziehungen oder Bedingungen durch *Gleichungen* festhalten.
- *Systematisches Probieren* zum Ermitteln der Erfüllungmenge einer Aussageform (Bedingung); Verwenden von *Tabellen.*
- *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen* zum Ermitteln der Erfüllungsmenge einer Konjunktion von Aussageformen (Bedingungen).
- Ausgehen von der *"informativsten"* Bedingung.
- *Folgern* zum Zweck des Vereinfachens von Aussageformen (Bedingungen).
- Notwendigkeit von *Existenz- und Einzigkeitsnachweis.*

Man lasse bei diesen (meist recht leichten) Aufgaben die Schüler stets zunächst selbständig nach einer Lösung suchen. Erst nach angemessen langer Zeit beginne man mit dem Unterrichtsgespräch, in dem verschiedene Lösungswege in Hinblick auf Einfachheit diskutiert werden. Man hebe hervor, daß man für die Darstellung der Lösung stets einen möglichst geschickten Lösungsweg wählen soll.
Eingangs sichere man ab, daß die Schüler wissen, daß für zweistellige Zahlen $\overline{ab} = 10a + b$ gilt, wobei a und b eine der Ziffern 0 , 1 , 2 , ... , 9 bezeichnen. Ferner hebe man hervor, daß zu den Teilern einer Zahl auch die 1 und die Zahl selbst gehören.

Bei ***Aufgabe 1)*** gehören zu den gegebenen beiden Bedingungen die Erfüllungsmengen { 2 , 14 , 26 , 38 , ... } bzw. { 6 , 22 , 38 , ... }, und man hat in wenigen Schritten die 38 als kleinste natürliche Zahl ermittelt, die bei Division durch 12 den Rest 2 und bei Division durch 16 der Rest 6 läßt.

Bei ***Aufgabe 2)*** gibt es mehrere Möglichkeiten, zu den Zahlen 72 und 90 jeweils die Menge aller Teiler zu ermitteln. Besonders effektiv ist es, systematisch alle Zerlegungen in der Form $72 = 1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 8 \cdot 9$ oder (als Nebenrechnung) in der Form

| 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 45 | 30 | 18 | 15 | 10 |

festzuhalten und in diesen beiden Teilermengen die gemeinsamen Elemente durch Unterstreichen hervorzuheben, was hier zur Menge der gemeinsamen Teiler

{ 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18 } führt.

Auch bei ***Aufgabe 3)*** könnte man zunächst systematisch die beiden Erfüllungsmengen ermitteln und dann deren Durchschnitt bilden:

| Gleichung | Lösungsmenge |
|---|---|
| (1) $x + 2 \cdot y = 17$ | $M_1$ = { (1;8), (3;7), (5;6), (7;5), (9;4), (11;3), (13;2), (15;1) } |
| (2) $x \cdot y = 15$ | $M_2$ = { (1;15), (3;5), (5;3), (15;1) } |

Mit dieser unangemessen umständlichen Lösung sollte man sich jedoch nicht zufrieden geben. Die Schüler müssen erkennen, daß es einfacher ist, zunächst nur die Menge der vier Zahlenpaare zu ermitteln, die die *"informativere"* Bedingung (2) erfüllen, und aus dieser Menge durch eine "Probe" alle diejenigen Zahlenpaare auszuschließen, die die *"weniger informative"* Bedingung (1) nicht erfüllen. Dabei nennen

wir eine Bedingung um so "informativer", je weniger Elemente ihre Erfüllungsmenge besitzt.
Anknüpfend an die im Abschnitt "1. Wer ist wer?" angestellten Überlegungen kann man hervorheben, daß durch den ersten Teil dieser Überlegung ein *Einzigkeitsnachweis* erbracht wurde, in dem man gezeigt hat, daß nur diese vier Zahlenpaare Lösungen sein können, und daß dann in einem *Existenznachweis* gezeigt wurde, daß genau eine dieser Zahlen tatsächlich beide Bedingungen erfüllt.

Bei ***Aufgabe 4)*** sollen die Schüler erkennen, daß hier nur das in Aufgabe 3), nicht aber das in Aufgabe 2) angewendete Verfahren zum Ziel führt, da Bedingung (1) eine unendliche Erfüllungsmenge besitzt. Beim Ermitteln der Erfüllungsmenge von (2) wird man sofort beachten, daß wegen (1) $a > b$ gelten muß.
Es ist naheliegend, daß die Schüler die zur Erfüllungsmenge von (2) gehörenden neun Zahlenpaare in der Reihenfolge (180;1) , (90;2) , ... , (18;10) , (15;12) ermitteln und dann feststellen, daß nur das letzte Zahlenpaar auch die Bedingung (1) erfüllt.
Leistungsstarke Schüler wird man darauf hinweisen, daß es günstig ist, bei der Lösungsdarstellung die Reihenfolge (15;12) , (18;10) , ... zu wählen, nach dem zweiten Zahlenpaar abzubrechen und zu vermerken, daß dieses und alle folgenden Zahlenpaare keine Lösung sein können, weil die Differenz bis zum letzten Paar (180;1) ständig zunimmt und daher stets größer als 3 ist. Folglich ist $\underline{(15;12)}$ das einzige Zahlenpaar, das die beiden Gleichungen erfüllt.

Will man das Verwenden von Variablen üben, dann kann man bei ***Aufgabe 5)*** die gegebenen Bedingungen in der Form (1) $n = \overline{ab}$ ; (2) $a + b = 13$ ; (3) $5 \mid n$ schreiben. Aus den systematisch ermittelten Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, werden dann diejenigen Zahlen ausgesondert, die (3) nicht erfüllen.
Nach dem Finden der Teilbarkeitsregel für die 5 sollte man noch folgenden *2. Lösungsweg* besprechen, bei dem man durch *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* (das eine spezielle Form des *Vorwärtsarbeitens* ist) ans Ziel gelangt:

- Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründung!
- Mit welcher Bedingung werde ich günstigerweise beginnen?

Aus (3) folgt $b = 0$ oder $b = 5$ ; [Teilbarkeitsregel] .

Wenn $b = 0$ , dann $a + b \neq 13$ ; [ da stets $a \leq 9$ ] .

Also gilt $\underline{b = 5}$ ⟶ $a + 5 = 13$ ⟶ $\underline{a = 8}$
Es gilt (2) $a + b = 13$ ⟶

Folglich kann nur $n = 85$ die gestellten Bedingungen erfüllen *(Einzigkeitsnachweis)*.
Wie man sich leicht überzeugt, erfüllt $n = 85$ tatsächlich alle gestellten Bedingungen *(Existenznachweis)*.
Folglich ist $\underline{n = 85}$ die einzige Lösung unserer Aufgabe.

***Aufgabe 6):***

Ges.: Paare (x;y) aus natürlichen Zahlen.

Geg.: (1) $a + b = 8$ ;
(2a) $(a - 1)\cdot(b + 1) = 0$ ;
(2b) $(a - 1)\cdot(b + 1) = 12$ ;
(2c) $(a - 1)\cdot(b + 1) = 14$ .

Auch hier geht es zunächst um den zweckmäßigen Einsatz von *Variablen*. Man sollte das Festhalten von "Vorgänger", "Nachfolger", "gerade", "ungerade", "um 2 kleiner als das Doppelte der Zahl", ü.ä. so lange üben, bis dies alle Schüler sicher beherrschen.
Ferner soll den Schülern hier wiederum bewußt werden, daß solche Aufgaben nicht immer genau eine Lösung besitzen, obwohl die Formulierung manchmal darauf hinzuweisen scheint.

Bei ***Aufgabe 6a)*** wird man aus (2a) zunächst $x = 1$ , aus (1) dann $y = 7$ ableiten und somit $\underline{(1;7)}$ als einzige Lösung der Aufgabe ermitteln.
Bei den Aufgaben 6b) und 6c) führt *systematisches Probieren* zum Ziel. Es gibt jeweils *2 Lösungswege*, je nachdem, mit welcher der beiden Bedingungen man beginnt.
Es erweist sich als günstig, mit der "informativeren" Bedingung (2) zu beginnen und aus deren Erfüllungsmenge alle Elemente auszusondern, die (1) nicht erfüllen.

Bei ***Aufgabe 6b)*** erhält man so die beiden Lösungen $\underline{(3;5) \text{ und } (7;1)}$.

***Aufgabe 6c)*** besitzt dagegen $\underline{\text{keine Lösung}}$.

***Aufgabe 7):***

Geg.: (1) $z = \overline{ab}$ ;
(2) $\overline{ba} = \overline{ab} + 36$ ;
(3) $b = 3 \cdot a$ .

(1) und (3) wird nur von den Zahlen 13 , 26 , 39 erfüllt, von denen nur $\underline{z = 26}$ auch die Bedingung (2) erfüllt.
Wie man die Lösung dieser Aufgabe exakt darstellen kann, wird in der *Musterlösung* auf Seite 30 der Aufgabensammlung vorgeführt, die man mit den Schülern durcharbeiten sollte.

***Aufgabe 8):***

Geg.: (1) $z = \overline{ab}$ ;
(2) $a + b = 10$ ;
(3) $\overline{ba} + 2 = 3 \cdot \overline{ab}$ .

| $\overline{ab}$ | $\overline{ba} + 2$ | $3 \cdot \overline{ab}$ |
|---|---|---|
| 19 | 93 | 57 |
| $\underline{28}$ | 84 | 84 |
| 37 | 75 | 111 |

In der 1. Spalte stehen die Zahlen, die (1) und (2) erfüllen. Da $3 \cdot \overline{ab}$ stärker wächst als $(\overline{ba} + 2)$, wird für die restlichen $\overline{ab}$ , die (2) erfüllen, stets $3 \cdot \overline{ab} > \overline{ba} + 2$ , womit dann gezeigt ist, daß $\underline{z = 28 \text{ die einzige Lösung}}$ unserer Aufgabe ist.

***Aufgabe 9):***

Geg.: (1) $z = \overline{ab}$ ;
(2) $a + b = 13$ ;
(3) $\overline{ba} = \overline{ab} - 27$ .

| $\overline{ab}$ | $\overline{ab} - 27$ | $\overline{ba}$ |
|---|---|---|
| 94 | 67 | 49 |
| $\underline{85}$ | 58 | 58 |
| 37 | 49 | 67 |

Analog vorgehend wie bei Aufgabe 8), wird man zunächst 49 , 58 , 67 , 76 , 85 , 94 als diejenigen Zahlen ermitteln, die (1) und (2) erfüllen. Bei der Darstellung wird man nur die ersten drei Zahlen in umgekehrter Reihenfolge betrachten, um analog zu zeigen, daß $\underline{z = 85 \text{ die einzige Lösung}}$ ist.

Von höherem Schwierigkeitsgrad ist ***Aufgabe 10)***, sie eignet sich als *Zusatzaufgabe* im Rahmen der *inneren Differenzierung*.
Man beobachte, welche Schüler selbständig auf die Idee kommen, die beiden Bedingungen wie folgt umzuformen und dabei zu berücksichtigen, daß laut Definition der gegebene Rest stets kleiner sein muß als $n$ .

(1) Dividiert man 100 durch $n$ , so bleibt der Rest 4 , wobei $n > 4$ .

(1') Dividiert man 96 durch $n$ , so bleibt der Rest 0 , wobei $n > 4$ .

(1'') $n|96$ und $n > 4$ , also $n \in \{ 6 , 8 , 12 , 16 , 24 , 32 , 48 , 96 \}$ .

Aus (2) folgt (2'') $n|72$ und $n > 18$ , also $n \in \{ 24 , 36 , 72 \}$ .

Aus (1) und (2) folgt daher, daß nur $\underline{n = 24}$ die beiden Bedingungen erfüllen kann.

Eine *Probe* zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Sehr leistungsstarke Schüler kann man zusätzlich auffordern, die Bedingung (2) so durch eine analoge Aussage zu ersetzen, so daß die gesuchte Lösungsmenge leer ist bzw. mehr als ein Element besitzt.

Die erstgenannte Forderung ist leicht zu erfüllen. Man wähle (2*'') so, daß die dort auftretende Menge mit der Menge in (1'') kein Element gemeinsam hat. Dies gilt etwa für (2*'') $n|70$ und $n > 3$ , also $n \in \{ 5 , 7 , 10 , 35 , 70 \}$. Hierzu gehört dann die Bedingung

(2*) Dividiert man 73 durch $n$ , so bleibt der Rest 3 , wobei $n > 3$ .

Die zweitgenannte Forderung läßt sich erfüllen, wenn auch in (2#'') $n|96$ vorkommt. Dies trifft für (2#'') $n|96$ und $n > 12$ , also $n \in \{ 16 , 24 , 32 , 48 , 96 \}$ zu. Hierzu gehört dann die Bedingung

(2#) Dividiert man 108 durch $n$ , so bleibt der Rest 12 , wobei $n > 12$ .

Aus (1) und (2#) folgt daher $n \in \{ 16 , 24 , 32 , 48 , 96 \}$ .

Eine *Probe* liefert den Existenznachweis.

***Aufgabe 11):***

| | |
|---|---|
| - Günstige Bezeichnungen einführen! | Ges.: Natürliche Zahlen n . |
| - Gegebene Bedingungen festhalten! | Geg.:<br>(1) $n = \overline{ab}$ , $(a+b)$ nicht durch 10 teilbar;<br>(2) $n' = \overline{ba}$ , $100 < 3 \cdot n' < 200$ ;<br>(3) $a + 2 = b$ . |
| - Erfüllungsmengen suchen, die zu diesen Bedingungen gehören! | Ich beginne mit der Bedingung (3), weil es nur relativ wenige Ziffernpaare (a;b) gibt, die diese Bedingung erfüllen. |
| ° Mit welcher Bedingung beginnen?<br>: Informativste Bedingung? | Ich ermittle alle Zahlen n , die (3) erfüllen. |
| °Welche Bedingung jetzt verwenden? | Ich sondere alle Zahlen aus, die (2) nicht erfüllen, dann noch diejenigen, die (1) nicht erfüllen. |

Der *Lösungsplan* läßt sich dann wie folgt in einer *Tabelle* festhalten:

| $n = \overline{ab}$ | $n' = \overline{ba}$ | 3·n' | (2) erfüllt? | a + b | (1) erfüllt? | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 6 | nein | ----- | ----- | |
| 31 | 13 | 39 | nein | ----- | ----- | |
| 42 | 24 | 72 | nein | ----- | ----- | |
| 53 | 35 | 105 | ja | 8 | ja | Lösung |
| 64 | 46 | 138 | ja | 10 | nein | |
| 75 | 57 | 171 | ja | 12 | ja | Lösung |
| 86 | 68 | 204 | nein | ----- | ----- | |
| 97 | 79 | 237 | nein | ----- | ----- | |

Folglich erfüllen genau die Zahlen 53 und 75 die gestellten Bedingungen.
Beim *"Rückblick"* sollte man die Schüler auffordern, zu untersuchen, wie sich die Lösungsmenge ändert, wenn man auf Bedingung (1) verzichtet oder wie man durch Abänderung von (2) oder (3) erreichen kann, daß die Aufgabe genau eine Lösung besitzt.

Bei ***Aufgabe 12)*** und ***Aufgabe 13)*** findet man die Lösung recht leicht, wenn man diese Aufgaben als *Kryptogramme* auffaßt und allenfalls die Bedingung, welche Ziffern jeweils gleich sein sollen, durch Variable festhält. Die Lösung ermittelt man dann durch sukzessives Ausfüllen der Felder.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | 0 | |
| | a | b | |
| 9 | 6 | 8 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 0 | |
| | 8 | 8 | |
| 9 | 6 | 8 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | b | c | 0 | |
| | a | b | c | |
| 3 | 0 | 5 | 8 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 8 | 0 | |
| | 2 | 7 | 8 | |
| 3 | 0 | 5 | 8 | |

Daher erfüllen bei Aufgabe 12) die Zahlen 880 und 88 die gestellten Bedingungen, und bei Aufgabe 13) hat Peter die Zahl 278 aufgeschrieben.
Um den geforderten Einzigkeitsnachweis zu erbringen, müßten noch erläuternde Bemerkungen angefügt werden.
Wie man die Lösung der Aufgabe 13) auch anders darstellen kann, wird in der *Musterlösung* auf Seite 31 der Aufgabensammlung gezeigt, die man mit den Schülern durcharbeiten sollte.

Bei ***Aufgabe 14)*** ist anzunehmen, daß viele Schüler nicht die Gleichung
$2\cdot(x + 10) + 10 = 100$ aufschreiben und lösen, sondern "variablenfrei" durch *inhaltliches Schließen* (Umkehrung der Rechenoperationen) über die Folge der Zahlen 100 , 90 , 45 , 35 zum Ziel gelangen. Dies wird man natürlich als richtig und auch als angemessen akzeptieren.

Bei ***Aufgabe 15)*** ist "variablenfreies Schließen" schon beträchtlich schwieriger, weil die zugehörige Gleichung $x + 100 = 10\cdot x + 10$ die Variable auf beiden Seiten enthält. Verfügt man dagegen über die Gleichung, dann ist die Lösung 10 (auch ohne Umformungen) durch systematisches Probieren zu ermitteln.

Noch weniger erfolgversprechend ist variablenfreies Schließen bei ***Aufgabe 16).*** Bezeichnet man das Alter von Hans mit h , das von Thomas mit t , dann halten die Gleichungen

$$2\cdot(h + 7) + 6 - h = 33$$

bzw. $$2\cdot(t + 7) + 6 - 2\cdot t = 20$$

die gegebenen Bedingungen fest.

Hier fällt ein variablenfreies Lösen schwer, weil die Variable mehrfach und in verschiedenen Verknüpfungen vorkommt.
Die Lösung $h = 13$ läßt sich durch Probieren wohl nur dann finden, wenn die zugehörige Gleichung mit einer Variablen vorliegt, und auch nur in diesem Fall wird man erkennen können, daß die zweite Gleichung allgemeingültig ist, daß sich das Alter von Thomas also aus diesen Angaben nicht eindeutig ermitteln läßt.
Vor allem mit dieser Aufgabe kann man den Schülern zeigen, wie nützlich das Festhalten gegebenener Bedingungen durch Gleichungen mit Variablen sein kann, und man kann sie auch anregen, nach Umformungen zum Zweck des Vereinfaches solcher Gleichungen zu suchen.

Auch bei ***Aufgabe 17)*** ist es sehr zweckmäßig, die gegebene Bedingung in der Form $2 \cdot x \cdot (x + 1) + 1 = 1985$ festzuhalten und dann zu vereinfachen:

$$2 \cdot x \cdot (x + 1) = 1984 ,$$

$$x \cdot (x + 1) = 992 .$$

Da $30 \cdot 30 = 900$, fällt es nicht schwer festzustellen, daß $31 \cdot 32 = 992$ , und es fällt auch leicht nachzuweisen, daß die Zahlen 31 und 32 die einzigen Zahlen sind, die die gestellte Bedingung erfüllen.

Derartige Aufgaben sollen die Schüler motivieren, gegebene Bedingungen unter Verwendung von Variablen in Form von Gleichungen festzuhalten. Die Schüler sollen jedoch keinesfalls gezwungen werden, dieses Hilfsmittel routinemäßig einzusetzen! Bei Aufgabe 21) der "Vermischten Aufgaben" ist ein variablenfreies Vorgehen sogar geschickter als das Aufstellen einer Gleichung.
Es sei nochmals betont: Die Schüler sollen lernen, aus einem Repertoire angeeigneter heuristischer Hilfsmittel, Strategien oder Prinzipien etwas Geeignetes auszuwählen, sie sollen keinesfalls zum Einsatz bestimmter Hilfsmittel gezwungen werden!

## 3.6. Magische Quadrate

***Ziele:***

- Systematisches Vorgehen.
- Problem der Existenz und Einzigkeit.
- Vermitteln der Begriffe "Ordnung" und "magische Summe" eines magischen Quadrats.
- Vermitteln einiger historischer Fakten.

Bei ***Aufgabe 1)*** wird man beim Berechnen der Summe $S = 1 + 2 + \ldots + n^2$ das vom Schüler GAUß entdeckte Additionsverfahren wiederholen und die Formel $s = S:n$ für die *magische Summe* eines MQ(n) herleiten. Für das MQ(4) gilt $\underline{s =}\ 136:4 = \underline{34}$ .

Bei ***Aufgabe 2)*** ist zu klären, wann zwei MQ(n) verschieden genannt werden. Aus der Menge aller MQ(n), die durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können (und die man dann nicht als verschieden ansieht), wird dasjenige als "genormter Vertreter" ausgezeichnet, bei dem links oben die kleinste der vier Eckenzahlen steht und bei dem die 2. Zahl in der 1. Zeile kleiner ist als die zweite Zahl der 1. Spalte.
Da für die gegebenen MQ(4) stets s = 34 gilt, lassen sich bei den Aufgaben 2a) und 2b) die gegebenen Felder eindeutig füllen *(Einzigkeitsnachweis)*, und man kann sich überzeugen, daß alle Eigenschaften magischer Quadrate erfüllt sind *(Existenznachweis)*. Die Lösungen von 2a) und 2b) sind zwei verschiedene MQ(4). Bei 2a) entsteht die genormte Form, bei 2b) muß man noch an der Nebendiagonalen spiegeln, um die genormte Form zu erhalten, und dieses MQ(4) ist gleich dem in Aufgabe 1) angegebenen MQ(4), das bereits im 1. Jahrhundert in Indien bekannt war.
Bei Aufgabe 2c) muß man zuerst das 1. Feld der 2. Zeile mit der 9 füllen, dann das 3. Feld der 2. Zeile mit der 2 . Da die 2 aber bereits im 3. Feld der 3. Zeile vorkommt, kann hier kein MQ(4) aus den Zahlen von 1 bis 16 entstehen.
Man kann den Schülern mitteilen, daß es genau 528 verschiedene MQ(4) aus den Zahlen von 1 bis 16 gibt.

Bei ***Aufgabe 3)*** geht es um den Nachweis, daß es genau ein (verschiedenes) MQ(3) aus den Zahlen von 1 bis 9 gibt. Dieser Nachweis wird durch *systematisches Probieren* geführt. Wegen $S = 1 + 2 + \ldots + 8 + 9 = 9 \cdot 10:2 = 45$ gilt $s = 45:3 = 15$.

- Ich ermittle alle Möglichkeiten, die 15 als Summe dreier verschiedener Zahlen aus 1 , 2 , ... , 9 darzustellen.
  - ° Lexikographisch ordnen!
  - ° Reichen die ermittelten Kombinationen für unseren Zweck aus? Wieviel solche Kombinationen brauche ich?
- Welche Zahlen können im Mittelfeld, in den Eckfeldern, in den Seitenfeldern stehen?
  - ° In wieviel der ermittelten Kombinationen kommt jede der Zahlen von 1 bis 9 vor?

15 = 1+5+9
= 1+6+8
= 2+4+9
= 2+5+8
= 2+6+7
= 3+4+8
= 3+5+7
= 4+5+6

Die gefundenen 8 Kombinationen reichen aus, denn:
3 Zeilen
3 Spalten
2 Diagonalen .
8 "Reihen" im MQ(3)

Es kommen vor:
4 mal die "5" ;
3 mal die "2", "4", "6", "8" ;
2 mal die "1", "3", "7", "9" .

- Ich ermittle alle zulässigen Möglichkeiten, die Zahlen 1 , 2 , ... , 9 in die Felder des MQ(3) einzutragen.
  - ° Mit welchem Feld werde ich beginnen?
  - ° Welches Feld werde ich als nächstes füllen? usw.

Da das Mittelfeld in 2 Diagonalen, 1 Zeile und 1 Spalte vorkommt, kann nur die "5" im Mittelfeld stehen.
Analog erkenne ich, daß die Eckfelder nur mit 2 , 4 , 6 , 8 , die Seitenfelder nur mit 1 , 3 , 7 , 9 gefüllt werden können.

Um die genormte Darstellung zu erhalten, füllt man das linke obere Eckfeld mit der kleinstmöglichen Eckenzahl, also mit der 2 aus; dann kann im rechten unteren Feld nur die 8 stehen.
Füllt man das rechte obere Eckfeld mit der 4, dann lassen sich alle noch leeren Felder eindeutig ausfüllen, man erhält allerdings nicht die genormte Form des MQ(3). Dies ist der Fall, wenn man das rechte obere Eckfeld mit der 6 füllt.
Das nebenstehend angegebene MQ(3) in genormter Form sollten die Schüler in der Aufgabensammlung festhalten, weil es zum Lösen weiterer Aufgaben noch benötigt wird.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

Dieses MQ(3) mit S = 45 und s = 15 war den Chinesen bereits vor über 4000 Jahren vor unserer Zeitrechnung bekannt.

***Aufgabe 4)*** und ***Aufgabe 5)*** könnte man analog wie Aufgabe 3) lösen. Die Schüler sollen jedoch erkennen, daß dies ungeschickt wäre, und sie sollen folgende *Additions-/ Multiplikationsregel* entdecken:
Wenn man zu jeder Zahl eines MQ(n) dieselbe Zahl addiert oder jede dieser Zahlen mit derselben Zahl multipliziert, dann entsteht wieder ein MQ(n).

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 8 |
| 11 | 7 | 3 |
| 6 | 5 | 10 |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 21 | *18* |
| 27 | 15 | *3* |
| 12 | 9 | *24* |

So erhält man aus der Lösung von Aufgabe 3) durch Addition von 2 als Lösung der Aufgabe 4) ein MQ(3) mit S = 63 und s = 21 bzw. durch Multiplikation mit 3 als Lösung der Aufgabe 5) ein MQ(3) mit S = 135 und s = 45 .
Die Schüler sollten untersuchen, wie sich die magische Summe s und die Gesamtsumme S ändern, wenn man auf ein MQ(n) die Additions- bzw. die Multiplikationsregel anwendet.

Bei ***Aufgabe 6)*** wird erstmals auf die Bedingung verzichtet, daß alle Zahlen eines MQ voneinander verschieden sein sollen. Man wird den Schülern mitteilen, daß der triviale Fall, in dem alle Zahlen in den Feldern gleich sind, im allgemeinen nicht mehr zu den MQ gezählt wird.
Zunächst sollte man nach dem "einfachsten" derartigen MQ(3) suchen, in dem nur die Zahlen 0, 1, 2 vorkommen. Dieses MQ(3) besitzt die magische Summe s = 3. Mit Hilfe der Additionsmethode lassen sich aus diesem (in genormter Form angegebenen) MQ(3) beliebig viele die gestellten Bedingungen erfüllenden MQ(3) bilden, indem man zu jeder Zahl des zuerst angegebenen MQ eine der Zahlen 10 , 20 , 110 , 120 , 210 , 220 , 1000 , usw. addiert.
Zusätzlich kann man die Frage stellen, ob es wohl ein derartiges MQ(3) gibt, in dem neun verschiedene Zahlen vorkommen. Das letztgenannte Beispiel zeigt, daß dies der Fall ist.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 |

s = 3

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 12 | 11 |
| 12 | 11 | 10 |
| 11 | 10 | 12 |

s = 33

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 22 | 21 |
| 22 | 21 | 20 |
| 21 | 20 | 22 |

s = 63

| | | |
|---|---|---|
| 2120 | 2122 | 2121 |
| 2122 | 2121 | 2120 |
| 2121 | 2120 | 2122 |

s = 6363

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 20 | 12 |
| 22 | 11 | 0 |
| 10 | 2 | 21 |

s = 33

Bei ***Aufgabe 7a)*** folgt aus S = 36, daß die magische Summe s = 12 betragen soll. In Aufgabe 3) und Aufgabe 6) haben wir ein MQ(3) mit s = 15 bzw. s = 3 kennengelernt, aus dem wir wegen 12 = 15 - 1·3 bzw. 12 = 4·3 mit Hilfe der Additionsmethode (durch Subtraktion von 1) bzw. der Multiplikationsmethode (durch Multiplikation mit 4) jeweils ein MQ(3) mit s = 12 gewinnen können.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 5 |
| 8 | 4 | 0 |
| 3 | 2 | 7 |

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 8 | 4 |
| 8 | 4 | 0 |
| 4 | 0 | 8 |

Bei ***Aufgabe 7b)*** folgt aus S = 72, daß s = 24 gelten soll.
Da wir aus Aufgabe 7a) jetzt zwei weitere MQ(3) mit s = 12 und aus Aufgabe 6) ein MQ(3) mit s = 33 (=3+10·3) kennen, eröffnen sich weitere Möglichkeiten zur Anwendung der Additions- bzw. Multiplikationsmethode.

Aus 24 = 15 + 3·3

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 9 |
| 12 | 8 | 4 |
| 7 | 6 | 11 |

= 2·12

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 12 | 10 |
| 16 | 8 | 0 |
| 6 | 4 | 14 |

= 2·12 = 8·3

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 16 | 8 |
| 16 | 8 | 0 |
| 8 | 0 | 16 |

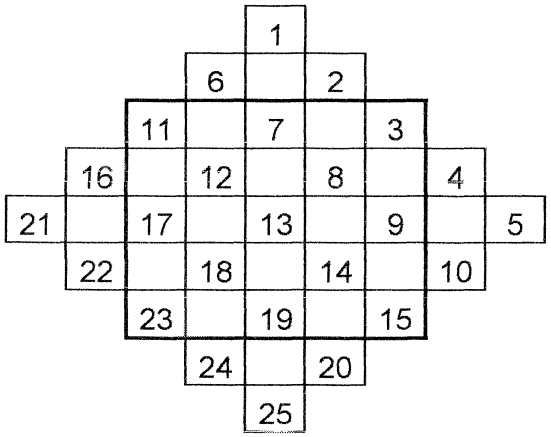
= 33 - 3·3

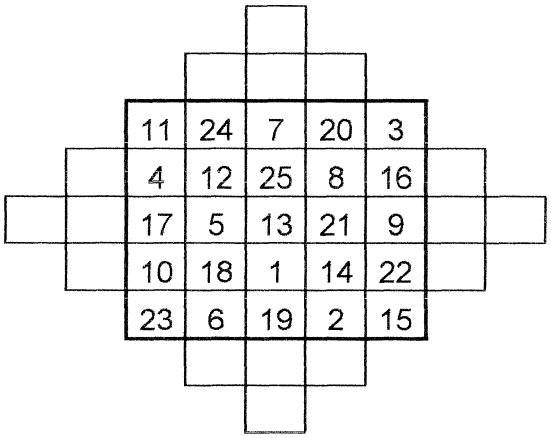
| | | |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 8 |
| 9 | 8 | 7 |
| 8 | 7 | 9 |

gewinnt man die vier angegebenen Lösungen.

***Aufgabe 7c)*** kann keine Lösungen besitzen, weil 3 kein Teiler von 100 ist und daher s = 100 keine magische Summe eines MQ(3) sein kann; vgl. Hinweise zu Aufgabe 9) .

Bei ***Aufgabe 8)*** sollte man nicht viel Zeit verlieren, sondern den Schülern den *"Trick"* zum Bilden von *magischen Quadraten ungerader Ordnung* verraten, der hier für den Fall n = 5 demonstriert wird.




Wir ergänzen das Quadrat vorübergehend zu einer symmetrischen stufenförmigen Figur (vgl. Abbildung). In diese Figur setzen wir nacheinander in schrägen Reihen von oben nach rechts unten die Zahlen von 1 bis 25 ein. Dann muß man jede Zahl, die sich außerhalb des Quadrats befindet, in derselben Zeile oder Spalte genau um soviel Felder von ihrem Feld versetzen, wie die Ordnung des Quadrats angibt, in unserem Fall also um 5. So muß nach dieser Regel die Zahl 6 in das Feld unter die Zahl 18 eingetragen werden, die Zahl 24 über der Zahl 12, die 16 rechts von 8 usw.
Nachdem die Schüler S = 1 + 2 + ... + 24 + 25 = 25·26:2 und s = S:5 = 5·13 = 65 mit möglichst wenig Rechenaufwand berechnet haben, sollen sie sich überzeugen, daß dieses MQ(5) tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt. Ferner sollen sie sich überzeugen, daß diese Methode auch das MQ(3) liefert. Wem es Spaß macht, kann auf diese Weise auch ein MQ(7) herstellen.
Man kann zusammenfassend festhalten: Die Haupteigenschaft eines MQ(n) besteht darin, daß es gleiche Zeilen-, Spalten- und Diagonalensummen besitzt. Man kann zusätzlich fordern, daß unter den $n^2$ Zahlen keine Zahl mehrfach auftritt. Ursprüng-

lich wurde gefordert, daß in einem MQ(n) die Zahlen 1 , 2 , ... , $n^2$ auftreten sollen. Es gibt genau ein derartiges MQ(3) und genau 528 (verschiedene) MQ(4), wobei man zwei MQ(n) genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung oder Spiegelung gibt, die sie ineinanderr überführt.
Nach den Indern beschäftigten sich die Araber mit derartigen Zahlenquadraten, denen man magische Eigenschaften zuschrieb und die man daher "magische" Quadrate nannte. Nach Europa kam das magische Quadrat erst zu Beginn des 16. Jahrhunderts, wo dann intensive Untersuchungen durchgeführt wurden.
Bei dieser Gelegenheit kann man die Schüler auch mit einer Methode zum Bilden von magischen Quadraten der Ordnung 4k bekanntmachen.
Man trägt die Zahlen 1 , 2 , ... , $(4k)^2$ in natürlicher Folge in die Felder eines Quadrats mit der Seitenlänge $n = 4k$ ein. Dann trennt man in den Ecken dieses Quadrats die 4 Quadrate mit den Seiten $n/4$ und in der Mitte ein Quadrat mit der Seite $n/2$ ab. Nunmehr vertauscht man in den 5 abgetrennten Quadraten die Plätze derjenigen Zahlen miteinander, die symmetrisch zum Mittelpunkt des gegebenen Quadrats liegen, im unten festgehaltenen Fall $n = 4$ also die Zahlen 1 und 16 ; 4 und 13; 6 und 11 ; 7 und 10.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

Durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen erhält man die genormte Form dieses MQ(4), das sowohl von dem in Aufgabe 1) als auch von dem in Aufgabe 2a) angegebenen MQ(4) verschieden ist, während das MQ(4) aus Aufgabe 2b) lediglich die genormte Form des MQ(4) aus Aufgabe 1) ist. Somit kennen wir jetzt 3 von den insgesamt 528 verschiedenen MQ(4) aus den Zahlen 1 , 2 , ... , 16 .

Bei ***Aufgabe 9)*** kann man nochmals zusammenfassend auf die in den Aufgaben 4) und 5) entdeckte Additions- und Multiplikationsregel eingehen.
Ist s(n) die magische Summe eines MQ(n) mit den Zahlen 1 , 2 , ... , $n^2$ , dann kann man aus diesem MQ(n) mit Hilfe der genannten Regeln ein MQ'(n) mit der magischen Summe s'(n) herstellen, wenn $s'(n) = p \cdot s(n) + q \cdot n$ gilt, wobei p , q natürliche Zahlen sind und $p > 0$ gilt.
Für $n = 3$ gilt daher $s'(3) = 15 \cdot p + 3 \cdot q$ . Hieraus folgt, daß die magische Summe eines jeden MQ'(3) stets durch 3 teilbar sein muß, daß also die Aufgabe 7c) keine Lösung besitzt.
Es wäre denkbar, daß Schüler beim Lösen von Aufgabe 9c) analog vorgehen und behaupten, diese Aufgabe sei nicht lösbar, weil die magische Summe $s = 102$ nicht durch 4 teilbar ist. Daß hier ein Trugschluß vorliegt, zeigt bereits die magische Summe $s(4) = 34$ eines MQ(4) aus den Zahlen 1 , 2 , ... , 16 , die nicht durch 4 teilbar ist.
Aus Zeitgründen sollte man nicht verlangen, daß die Schüler die gefundenen MQ(4) aufschreiben. Es reicht die Angabe aus, wie man aus jedem der oben genannten drei MQ(4) mit der magischen Summe 34 durch Addition oder Multiplikation ein MQ(4) mit der gegebenen Gesamtsumme S oder der gegebenen magischen Summe s gewinnen kann.

***9a):*** $S = 272$ ; $s = 68 = 2 \cdot 34$ .
***9b):*** $S = 168$ ; $s = 42 = 34 + 2 \cdot 4$ .
***9c):*** $s = 102 = 3 \cdot 34 = 34 + 17 \cdot 4$ .
***9d):*** $S = 480$ ; $s = 120 = 2 \cdot 34 + 13 \cdot 4$ .

## 3.7. Hier helfen Variable, Tabellen und Gleichungen

***Ziele:***

- *Tabellen* mit günstig gewählten Variablen zum Abspeichern der Aufgabenstellung und des Lösungsplans.
  - ° Bestimmen von Zeilen- und Spalteneingängen.
- *Suche nach Gleichungen* (aus ausgefüllten Tabellen).
- Bedeutung von Existenz- und Einzigkeitsnachweis.

Der Vorteil des Verwendens von Tabellen bei derartigen Aufgaben besteht darin, daß man mit einer Variablen auskommt und nicht Gleichungssysteme mit mehreren Variablen aufschreiben muß.

Bei ***Aufgabe 1)*** wächst der Schwierigkeitsgrad der Teilaufgaben so stark, daß nur wenige Schüler auch Aufgabe 1c) im Kopf lösen dürften. Sie sollen auch merken, daß systematisches Probieren hier keine angemessene Lösungsmethode ist. Auf diese Weise läßt sich der Einsatz von Tabellen und Variablen motivieren.
Man achte darauf, daß für die Zahlen 6 , 12 in Aufgabe 1a), für 14 , 9 bei Aufgabe 1b) und für 14 , 35 bei Aufgabe 1c) die *Probe* gemacht wird.

Bei ***Aufgabe 2)*** werden *Tabelle, Variable und Gleichungen* als Hilfsmittet eingeführt. Bei Aufgabe a) wird man die 1. der gesuchten Zahlen mit x bezeichnen, bei Aufgabe b) ist es günstiger, die 2. Zahl mit x zu bezeichnen. Für das Resultat nebst Probe wird jeweils eine eigene Spalte vorgesehen. Folgendes wird an der Wandtafel festgehalten:

| | Aufgabe 2a) | | Aufgabe 2b) | |
|---|---|---|---|---|
| 1. Zahl | x | 9 | 3·x + 4 | 64 |
| 2. Zahl | 4·x + 5 | 41 | x | 20 |
| 3. Zahl | 2·x - 3 | 15 | 4·x + 4 | 84 |
| Summe | 65 | 65 | 168 | 162 |
| Ansatzgleichung | 7·x + 2 = 65 | | 8·x + 8 = 168 | |

Die *Ansatzgleichung* wird in einer Nebenrechnung gelöst. Man beobachte, wie die Schüler dabei vorgehen. Man wird "Erraten" und systematisches Probieren nicht von vornherein verbieten, wohl aber anstreben, daß die Schüler durch inhaltliches Schließen erkennen, daß aus 7·x + 2 = 65 zunächst 7·x = 63 und hieraus dann x = 9 folgt. Dabei geht es keineswegs darum, Regeln zum äquivalenten Umformen von Gleichungen herzuleiten.
Eine *Probe* als notwendiger Existenzachweis sollte stets gefordert werden.

Bei der noch komplizierteren ***Aufgabe 3)*** läßt sich das kennengelernte Vorgehen üben.

Bei ***Aufgabe 3a)*** wird man etappenweise vorgehen und Zwischenkontrollen einschalten: Aufstellen der Tabelle; gemeinsame Variablenwahl; Ausfüllen der Tabelle; Aufstellen der Ansatzgleichung; Lösen der Ansatzgleichung; Probe.
Bei der *Variablenwahl* sollte man bei Aufgabe 3a) mindestens zwei Möglichkeiten betrachten und die so gefundenen Lösungswege hinsichtlich der Einfachheit vergleichen lassen.

Die Lösungsfindung läßt sich durch folgende *Impulse* steuern:

| | |
|---|---|
| - Günstige Veranschaulichung? | Ich verwende eine *Tabelle*, um die gegebenen Beziehungen zwischen den gesuchten Zahlen festzuhalten. |
| ° Zeileneingänge? Spalteneingänge? | Ich brauche zunächst 5 Zeilen (für 4 Zahlen und deren Summe). |
| - Günstige *Variable* wählen! | Im Prinzip könnte ich jede der vier gesuchten Zahlen mit x bezeichnen und dann die anderen Zahlen durch x ausdrücken. Ich werde versuchen, die günstigste Möglichkeit zu wählen (vgl. die 4 Lösungswege in der Tabelle). |
| - Felder der Tabelle füllen! | |
| ° Ich nutze die in der Aufgabenstellung gegebenen Beziehungen. | Besonders günstig dürfte es sein, die 2. Zahl mit x zu bezeichnen; besonders ungünstig wäre es, für die 4. Zahl eine Variable einzuführen. |
| - Welche Beziehung habe ich noch nicht verwendet? Sie liefert die *Ansatzgleichung*! | Zum Ausfüllen der leeren Felder der Tabelle habe ich die Bedingung, daß die Summe der Zahlen 62 beträgt, noch nicht verwendet. Dies liefert mir die *Ansatzgleichung*, die ich in einer weiteren Zeile der Tabelle festhalte. |
| - Was ist nun noch zu tun? | Ich löse die Gleichung und mache eine *Probe*. |
| - Was ist nun noch zu tun? | Ich berechne die restlichen Zahlen und überzeuge mich, daß ihre Summe tatsächlich 62 beträgt. |
| - Was ist nun noch zu tun? | Ich mache eine *Probe am Text*. |
| - *Antwortsatz!* | Die gesuchten vier Zahlen lauten 20 , 10 , 5 , 27 . |

| | 1. Lösungsw. | | 2. Lösungsw. | | 3. Lösungsw. | | 4. Lösungsw. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Zahl | 2·x | 20 | 2·y + 10 | 20 | **z** | 20 | u - 7 | 20 |
| 2. Zahl | **x** | 10 | y + 5 | 10 | $\frac{z}{2}$ | 10 | $\frac{u}{2} - \frac{7}{2}$ | 10 |
| 3. Zahl | x - 5 | 5 | **y** | 5 | $\frac{z}{2} - 5$ | 5 | $\frac{u}{2} - \frac{17}{2}$ | 5 |
| 4. Zahl | 2·x + 7 | 27 | 2·y + 17 | 27 | z + 7 | 27 | **u** | 27 |
| Summe | 62 | 62 | 62 | 62 | 62 | 62 | 62 | 62 |
| Ansatzgleichung | 6·x + 2 = | 62 | 6·y + 32 = | 62 | 3·z + 2 = | 62 | 3·u - 19 = | 62 |
| deren Lösung | x = | 10 | y = | 5 | z = | 20 | u = | 27 |

Die Probe für die Gleichung prüft deren korrekte Lösung.
Die Korrektheit der Berechnung der vier Zahlen prüft man durch die Summenbildung nach.
Erst durch eine *Probe am Text* wird nachgewiesen, daß die Terme mit der Variablen x die in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen korrekt erfassen.

Bei ***Aufgabe 3b)*** überprüfe man, ob alle Schüler die 2. Zahl mit x bezeichnen und beobachte, welche Schüler dann selbständig in der Lage sind, den Term für die 4. Zahl zu ermitteln. In Form einer Nebenrechnung wird ermittelt, daß das Doppelte

von $(3 \cdot x + 3)$ durch $(6 \cdot x + 6)$ erfaßt wird und daß dieses um 1 verminderte Doppelte daher $(6 \cdot x + 5)$ lautet.
Aus der *Ansatzgleichung* $12 \cdot x + 11 = 83$ erhält man dann $x = 6$ , und hieraus die gesuchten vier Zahlen 15 , 6 , 21 ,41 .

Bei ***Aufgabe 3c)*** gelangt man zur *Ansatzungleichung* $12 \cdot x + 11 < 40$ . Durch *systematisches Probieren* erhält man $x = 0$ oder $x = 1$ oder $x = 2$ und erkennt, daß eine derartige Aufgabe auch mehr als eine Lösung haben kann.
Folglich sind derartige Aufgaben noch nicht vollständig gelöst, wenn man eine Lösung erraten (und hierfür die Probe gemacht) hat, sondern es ist stets noch ein *Einzigkeitsnachweis* erforderlich.
Auf dem von uns beschrittenen Weg gelangt man hier zu der Aussage: Wenn es vier Zahlen gibt, die die genannten Bedingungen erfüllen, dann können dies nur die Zahlen (3;0;3;5) oder (5;1;6;11) oder (7;2;9;17) sein.
Eine *Probe* bestätigt, daß tatsächlich diese drei Quadrupel alle gestellten Bedingungen erfüllen *(Existenznachweis)*.

Bei ***Aufgabe 3d)*** gelangt man zur *Ansatzgleichung* $12 \cdot x + 11 = 10$ , die - wie man durch inhaltliche Überlegungen leicht erkennt - im Bereich der Zahlen, die Schüler der Klasse 5 kennen, keine Lösung besitzt.
Leistungsstarke Schüler kann man auf folgende "Feinheit" aufmerksam machen: Würde die Aufgabe lauten: "Ermittle diejenigen vier Zahlen, von denen folgendes bekannt ist: ... " , dann wäre durch die Aufgabenstellung die eindeutige Existenz solcher vier Zahlen vorgegeben. In diesem Fall dürfte man nach dem Einzigkeitsnachweis auf eine Probe verzichten, oder man könnte auf den Einzigkeitnachweis verzichten, wenn man für die (etwa erratene) Lösung die Probe macht.
Durch die Formulierung "Wir suchen vier Zahlen ... " wird die eindeutige Existenz einer Lösung dagegen nicht vorgegeben; es ist daher durchaus möglich, daß wir mehr als eine Lösung finden oder daß wir vergeblich suchen, weil es keine Lösung gibt.

Bei ***Aufgabe 4)*** wird man zunächst klären, daß man durch eine Umrechnung die gegebenen Gewichte auf eine gemeinsame Einheit bringen muß. Um das Rechnen mit Dezimalzahlen zu umgehen, wird man in kg umrechnen, die Rechnungen mit den entsprechenden Maßzahlen durchführen und zum Schluß das Resultat wieder in dt umrechnen. Man lasse die Schüler selbständig arbeiten, um kontrollieren zu können, wer das vermittelte Verfahren bereits beherrscht.
Die *Ansatzgleichung* $5 \cdot x + 200 = 5000$ führt zu $x = 960$ sowie $2x + 80 = 2000$ und somit zum *Antwortsatz*: Die Klasse 5 sammelte 2 Dezitonnen Altpapier.

Auch die ***Aufgabe 5)*** sollte man selbständig lösen lassen und dabei beobachten, welche Schüler routinemäßig vorgehen und Variable verwenden, was hier unangemessen kompliziert ist. Bezeichnet man die 2. Ziffer mit x , dann lautet die 4. Ziffer $3 \cdot x$, die 1. Ziffer $(3 \cdot x - 3)$ und es tritt für Schüler der Klasse 5 die Schwierigkeit auf, für die um 2 kleinere 3. Ziffer den Term $(3 \cdot x - 5)$ anzugeben und dann u.a. die Terme $(3 \cdot x - 3)$ und $(3 \cdot x - 5)$ zu addieren.
Weitaus angemessener ist es, zunächst alle 4 Möglichkeiten zu erfassen, in denen die 4. Ziffer dreimal so groß ist wie die 2. Ziffer, hieraus alle Möglichkeiten zu ermitteln, in denen zusätzlich die 1. Ziffer um 3 kleiner ist als die 4. Ziffer (das sind noch 3 Möglichkeiten), dann zu be-

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. Ziffer | - | 0 | 3 | 6 |
| 2. Ziffer | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 3. Ziffer | | - | 1 | 4 |
| 4. Ziffer | 0 | 3 | 6 | 9 |
| Summe | - | - | 12 | 22 |

rücksichtigen, daß die 3. Ziffer um 2 kleiner ist als die 1. Ziffer (es verbleiben noch zwei Möglichkeiten) und abschließend zu überprüfen, ob die Ziffernsumme 22 beträgt (es bleibt nur noch eine Möglichkeit).
Auf diese Weise hat man nachgewiesen, daß sich die Telefonnummer 6349 aus den Angaben eindeutig ermitteln läßt. Eine Probe ist aus logischer Sicht entbehrlich, sollte aber dennoch durchgeführt werden, um Rechenfehler aufzuspüren.
Den *Lösungsplan* kann man wie oben angegeben in einer *Tabelle* festhalten.

Bei ***Aufgabe 6)*** sind die Zeileneingänge leicht zu finden. Es ist günstig, die Situation "in einem Jahr" zu betrachten, das gemeinsame Alter von Kurt und Steffen mit x zu bezeichnen und erst zum Schluß das gesuchte gegenwärtige Alter der Personen zu ermitteln.

| | Alter in einem Jahr | | Alter heute |
|---|---|---|---|
| Mutter | 3·x - 6 | 33 | 32 |
| Vater | 3·x | 39 | 38 |
| Steffen | x | 13 | 12 |
| Kurt | x | 13 | 12 |
| Summe | 98 | 98 | |
| Ansatz | 8·x - 6 = 98 | | |
| | x = 13 | | |

Die Schwierigkeit liegt darin, aus dem letzten Satz der Aufgabenstellung folgende Schlußfolgerung zu ziehen: "Da meine Mutter nicht 2 Jahre früher geboren wurde, werden wir vier in einem Jahr nicht 100 Jahre, sondern nur 98 Jahre alt sein". Die gegebene Zahl 100 taucht in unserer Tabelle dann nicht auf.
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 6.3.a) des ARW war.

Zu ***Aufgabe 7)*** ist in der Aufgabensammlung eine Musterlösung abgedruckt, in der auch die verwendete Tabelle festgehalten wurde.
Hier ist es wichtig, zuerst die Situation nach dem 2. Platzwechsel zu betrachten und mit Hilfe einer Gleichung mit einer Variablen zunächst die Anzahlen der Vögel auf den drei Bäumen nach dem 2. Wechsel zu berechnen.
Hieraus lassen sich dann variablenfrei die Anzahlen nach dem 1. Wechsel und hieraus schließlich die gesuchten Anzahlen am Anfang berechnen:
Auf dem 1. Baum saßen 15 , auf dem 2. Baum 14 und auf dem 3. Baum 27 Vögel .
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 4.1. des ARW war.

***Aufgabe 8)*** ist recht schwierig und eignet sich als *"Differenzierungsaufgabe"*. Dabei gehen wir davon aus, daß die Lösung nicht durch systematisches Probieren ermittelt werden soll, weil dann der geforderte *Einzigkeitsnachweis* nur sehr umständlich zu führen wäre.
Die Schwierigkeit läßt sich stark abschwächen, wenn man den Schülern rät, für die zwischen "früher" und "heute" verstrichene Zeit eine *Hilfsvariable* t einzuführen.
Bezeichnet man Bernds früheres Alter mit b , dann beträgt laut Aufgabenstellung das "jetzige" Alter von Arno 2·b , und das "spätere" Alter von Bernd ist auch 2·b .
Dies wird in einer *Tabelle* festgehalten.
Bezeichnet t die Anzahl von Jahren, die zwischen "früher" und "jetzt" vergangen sind, dann ist laut Aufgabenstellung das "jetzige" Alter von Bernd b + t , und das "frühere" Alter von Arno ist 2·b - t . Die Tabelle wird diesbezüglich ergänzt, und es werden auch die gegebenen 63 Jahre in das entsprechende Feld eingetragen.
Nach Aufgabenstellung ist das "frühere" Alter von Arno gleich dem "jetzigen" Alter von Bernd, also gilt $2 \cdot b - t = b + t$ und somit $b = 2 \cdot t$ .
Setzt man dies in die 1. Tabelle ein, dann erhält man eine 2. Tabelle, der man eindeutig entnehmen kann, daß auch zwischen "jetzt" und "später" genau t Jahre vergangen sind.

| | früher | jetzt | später | früher | jetzt | später | früher | jetzt | später |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arno | 2·b - t | 2·b | | 3·t | 4·t | | 21 | 28 | 35 |
| Bernd | b | b + t | 2·b | 2·t | 3·t | 4·t | 14 | 21 | 28 |
| Summe | | | 63 | | | 63 | | | 63 |

Folglich beträgt das "spätere" Alter von Arnd $3 \cdot t + 4 \cdot t = 5 \cdot t$ , was ebenfalls in die 2. Tabelle eingetragen wird.
Der so ergänzten 2. Tabelle entnimmt man dann die *Ansatzgleichung* $5 \cdot t + 4 \cdot t = 63$, aus der $t = 7$ folgt.
Hieraus folgt dann, daß zum gegenwärtigen Zeitpunkt Arno 28 Jahre und Bernd 21 Jahre alt ist.
Füllt man nun noch eine 3. Tabelle mit allen errechneten Zahlen aus, dann kann man mit deren Hilfe eine *Probe am Text* machen.
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 6.3.b) des ARW war.

Beim Lösen der ***Aufgabe 9)*** werden sowohl Tabellen mit Variablen nebst Gleichungen als auch das systematische Probieren eingesetzt.
Die Zeilen- und Spalteneingänge der *Tabelle* sind leicht zu finden, und es liegt auch nahe, hier die Anzahl der vom 1. Kunden gekauften Schrauben mit x zu bezeichnen. Das Ausfüllen der 1. Spalte ist problemlos, auf die 2. Spalte der unten angegebenen Tabelle könnte man verzichrten.
Die Frage "Welche der gegebenen Bedingungen habe ich noch nicht verwendet?" führt zum Betrachten der gegebenen Kostendifferenz und damit zur Gleichung
$4 \cdot x \cdot p - x \cdot p = 588$ , also zu $3 \cdot x \cdot p = 588$ .
Durch *systematisches Probieren* mit den laut Aufgabenstellung zulässigen Werten $x \in \{ 5 ; 7 ; 9 \}$ erkennt man, daß nur $p = 7$ die gestellten Bedingungen erfüllt und daß daher $x = 28$ gilt.
Nun sind die gestellten Fragen leicht zu beantworten, und es läßt sich auch zeigen, daß sich diese Fragen eindeutig beantworten lassen.
Es gibt Schüler, die das systematische Probieren abbrechen, wenn sie die Lösung $p = 7$ gefunden haben. Es ist ausdrücklich hervorzuheben, daß der geforderte *Einzigkeitsnachweis* nur erbracht ist, wenn alle anderen möglichen Fälle - in unserem Beispiel also $p = 5$ und $p = 9$ - ausgeschlossen wurden.

| | Anzahl Schrauben | | Kosten in Cent | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Kunde | x | 28 | x·p | 28·7 = | 196 |
| 2. Kunde | x - 10 | 18 | (x - 10)·p | 18·7 = | 126 |
| 3. Kunde | 2·x - 10 | 46 | (2·x - 10)·p | 46·7 = | 322 |
| 4. Kunde | 4·x | 112 | 4·x·p | 112·7 = | 784 |
| Summe | | 204 | | | 1428 |

Folglich zahlte der 4. Kunde 7,84 €, alle vier Kunden zusammen 14,28 €, und die Anzahl der gekauften Schrauben sind der zweiten Spalte zu entnehmen.
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 2.2.b) des ARW war.

## 3.8. Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen

***Ziele:***

- Gegenüberstellen der Lösungsverfahren *"systematisches Probieren"* und *"inhaltliches Lösen"* beim Lösen von Gl/Ugl .
- Entdecken von Umformungsregeln beim Lösen von Gl/Ugl ; Vereinfachen von Gleichungen durch *Umformen.*
- *Existenz* und *Einzigkeit* von Lösungen.
- Berechnen des Produkts zweier Binome.

Die Schüler sollen erkennen: Eine Gleichung kann keine, genau eine, mehrere oder unendlich viele Lösungen besitzen. Es geht stets darum, auf möglichst geschickte Weise alle Lösungen zu ermitteln und dabei gleichzeitig nachzuweisen, daß man tatsächlich alle Lösungen und auch nur Lösungen angegeben hat.

Bei ***Aufgabe 1)*** wird "inhaltliches Lösen" und "Lösen durch systematisches Probieren" einander gegenübergestellt und bei jeder Teilaufgabe diskutiert, welches Lösungsverfahren geschickter ist. Im Zweifelsfall sollte man dem inhaltlichen Lösen den Vorrang geben.
Beim systematischen Probieren, das man vor allem bei Ungleichungen einsetzen wird, achte man darauf, daß die Schüler durch Betrachten der vorkommenden Terme stets zunächst feststellen, welche natürliche Zahlen *nicht* eingesetzt werden dürfen, was als Übergang zum inhaltlichen Schließen angesehen werden kann.
Man wird den Schülern erklären, daß $a^1 = a$ gilt (als Produkt mit einem Faktor). Es lohnt jedoch nicht, den Schülern bereits hier mitzuteilen, daß $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ definiert wird. Bei Aufgabe 1d) ist auf jeden Fall festzustellen, daß $0^0$ nicht definiert ist.
Bei ***Aufgabe 1a)*** ist neben dem (von den Schülern im allgemeinen bevorzugten) systematischen Probieren auch das *inhaltliche Lösen* zu erklären. Nach dem Beantworten der Frage " 3 hoch wieviel ist gleich 81 " wird gefolgert:
Da $3^4 = 81$, muß $x + 2 = 4$ , also $\underline{x = 2}$ gelten. Probe: $3^{2+2} = 3^4 = 81$ .
Durch derartige inhaltliche Überlegungen sollte man auch die Lösungen der Aufgaben 1f),g),i),m) ermitteln sowie nachweisen, daß die Aufgaben 1d),l) keine Lösungen besitzen.
Bei ***Aufgabe 1k)*** ist es angemessen, zunächst festzustellen, daß $x \geq 4$ gelten muß, dann festzustellen, daß $x = 4 , 5 , 6 , 7$ keine Lösung liefert und abschließend zu begründen, daß für $x > 8$ keine Lösungen vorkommen können, weil dann stets $x \cdot (x - 4) > 24$ gilt. Also kann nur $\underline{x = 8}$ gelten, was tatsächlich zutrifft.

Bei ***Aufgabe 2)*** sind Zahlenpaare (a;n) zu ermitteln, die die Gl/Ugl mit 2 Variablen erfüllen..
Bei ***Aufgabe 2a)*** ist es angemessen, die Zahlenpaare (a;n) durch *systematisches Probieren* zu ermitteln. Die Schüler sollten versuchen, diese Aufgabe selbständig zu lösen, und man wird von den Schülern verlangen, zunächst nur die Anzahl der gefundenen Zahlenpaare zu nennen. Wer alle <u>19 Zahlenpaare</u> gefunden hat, darf das *Ordnungsprinzip* angeben, nach dem er vorgegangen ist.
Zunächst muß man sich entscheiden, mit welcher der beiden Variablen man das Probieren geschickterweise beginnt.
Beginnt man mit a , dann wird man zunächst die Fälle $a = 1$ und $a > 16$ begründet ausschließen und anschließend für $a = 2 , 3 , 4 , \ldots , 16$ untersuchen, welche $n = 1, 2, 3 , \ldots$ jeweils Lösungen liefern. Dies liefert die Lösungen in folgender Reihenfolge:

<u>(2;2) , (2;3) , (2;4) | (3;1) , (3;2) ,|(4;1) , (4;2) | (5;1) , (6;1) , ... , (15;1) , (16;1)</u> .

Beginnt man dagegen mit n , dann muß man zunächst die Fälle $n > 4$ begründet ausschließen und anschließend für jedes der zulässigen $n = 1 , 2 , 3 , 4$ entscheiden, welche a Lösungen liefern. Dies liefert die Lösungen in der Reihenfolge

(3;1) , (4;1) , ... , (15;1) , (16;1) | (2;2) , (3;2) , (4;2) | (2;3) | (2;4) .

Da es wohl immer einige Schüler geben wird, die in selbständiger Arbeit nicht alle Lösungen gefunden haben, wird man beim *Rückblick* hervorheben, wie wichtig es ist, *systematisch* (und nicht wahllos) zu probieren und dabei bewußt ein *Ordnungsprinzip* zu verwenden, das absichert, daß man keine Lösungen verlieren kann.

Bei ***Aufgabe 2b)*** ist es günstig, zunächst festzustellen, daß $16 = 16^1 = 4^2 = 2^4$ alle Möglichkeiten erfaßt, die 16 als Potenz darzustellen, was dann leicht zu den 3 Lösungen (17;0) , (5;1) , (3;3) führt.

Bei ***Aufgabe 2c)*** ist durch *inhaltliche Überlegungen* nachzuweisen, daß keine Lösungen existieren.

***Aufgabe 3)*** sollten die Schüler selbständig lösen. Als "Probe" wird die von den Schülern jeweils genannte Ungleichung gelöst und nachgewiesen, daß stets die Lösungsmenge aus den Zahlen 0 , 1 , 2 , 3 besteht.

Bei ***Aufgabe 4)*** wird zunächst das *Distributivgesetz* wiederholt und erweitert zu

$$a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d .$$

Dann wird es zum Berechnen des Produkts zweier Binome angewendet. Es ist - dem Unterricht vorgreifend - auch in den kommenden Zirkeln anzustreben, daß die Schüler diesbezüglich Fertigkeiten erwerben. Diese Rechenregeln dürfen jedoch nicht als Formeln mit bestimmten Variablennamen eingeprägt werden! Die Schüler sollen vielmehr gedanklich stets mit *"Leerstellen"* arbeiten, in die beliebige Terme eingesetzt werden dürfen. Schreibweisen wie

$$\square \cdot (\bigcirc + \triangle) = \square \cdot \bigcirc + \square \cdot \triangle$$

können diese Denkweise unterstützen, wenn man hervorhebt, daß für jedes der verwendeten Zeichen auch Summen oder Produkte eingesetzt werden dürfen.

Die Aufgaben 4d) bis 4f) sind auf jeden Fall zu lösen und die Resultate in der Aufgabensammlung festzuhalten, da in Aufgabe 10) des Abschnitts "13. Vermutungen" auf sie zurückgegriffen wird.

***Aufgabe 5)*** verfolgt keinesfalls das Ziel, Fertigkeiten im Umformen von Gleichungen zu vermitteln! Es ist hervorzuheben, daß hier nicht mehr nur natürliche Zahlen gesucht werden und daß daher das systematische Probieren als Lösungsmethode entfällt. Wieder geht es um ein möglichst geschicktes Ermitteln der Lösungsmenge, die auch leer oder gleich der Menge aller gebrochenen Zahlen sein kann. Die Gleichungen werden erst dann umgeformt, wenn kein einfacherer Weg zum Ziel führt. Man beobachte, welche Schüler beim Ermitteln der Lösungsmengen besonders findig sind!

Man fordere die Schüler auf, sich alle 10 Gleichungen genau anzusehen und zunächst nur diejenigen zu nennen, die sie leicht lösen können. Es wird mit dem gemeinsamen Lösen solcher Gleichungen begonnen, wobei gefundene Lösungen prinzipiell nicht verraten werden, sondern lediglich Hinweise zur Lösungsfindung gegeben werden dürfen.

Die Lösung ($y =$) 0,62 der Aufgabe ***5a)*** ist durch *inhaltliche Überlegungen* zu ermitteln. Dasselbe trifft für die Erkenntnis zu, daß die Aufgaben ***5b)*** und ***5f)*** keine Lösungen besitzen und daß ($x =$) 0 die einzige Lösung von ***5i)*** ist.

Vielleicht gelangen einige Schüler auf diese Weise auch noch zur Lösung ($x =$) 0 der Aufgabe ***5d)*** oder erkennen, daß in Aufgabe ***5e)*** die linke Seite stets größer als die rechte Seite ist und daher keine Lösungen existieren können. Ist dies nicht der

Fall, dann liegt es nahe, durch *Anwenden des Distributivgesetzes* diese Gleichungen durch *Umformen* zu vereinfachen (Klammern beseitigen). Auf diese Weise erkennt man auch, daß die Gleichung ***5g)*** alle Zahlen als Lösung besitzt und daß die Gleichung ***5k)*** keine Lösung besitzt.
Bei Aufgabe ***5c)*** führen inhaltliche Überlegungen zu der Feststellung, daß aus dieser Gleichung die Gleichung $x + 500 = 70$ folgt, deren linke Seite stets größer ist als die rechte Seite und die daher keine Lösung besitzen kann.
Mit der schwierigsten Teilaufgabe ***5h)*** sollte man keine Zeit verschwenden, sondern nur beobachten, welche Schüler die Lösung $(x =) 16$ selbständig finden. Man wird den Schülern mitteilen, daß sie in höheren Klassen Regeln kennen lernen werden, die es gestatten, solche Gleichungen zu lösen.
Mit leistungsstarken Schülern kann man herausarbeiten, daß das Umformen stets dem Vereinfachen der Gleichung dient mit dem Ziel, die Form $x = ....$ herzustellen. Die Gleichung $x = a$ hat genau die Zahl $a$ als Lösung ; die Gleichung $x = x + a$ mit $a \neq 0$ besitzt keine Lösung; die Gleichung $x = x$ hat alle Zahlen als Lösung.

Bei leistungsschwächeren Schülern kann man auf das Behandeln der ***Aufgabe 6)*** verzichten. Hier geht es darum, das Lösen von Klammern zu üben und weitere Regeln zum Vereinfachen von Gleichungen entdecken zu lassen.
Bei ***Aufgabe 6a)*** wird herausgearbeitet, daß wir die Gleichung schrittweise so lange vereinfachen wollen, bis sie die Form $u = ....$ angenommen hat. Dabei stellen wir uns stets die Frage, was jeweils "am meisten stört", worin die Vereinfachung bestehen soll. Dabei lohnt es u.E. nicht, den Begriff des äquivalenten Umformens vorzeitig einzuführen. Es werden lediglich die den Schülern bereits vertrauten Schlußfolgerungen in der Wenn-dann-Form durchgeführt, die den *Einzigkeitsnachweis* erbringen, und an deren Ende eine Probe stehen muß, die den *Existenznachweis* liefert.
Um die störenden Klammern zu beseitigen, wenden wir das Distributivgesetz an. Wir erkennen: Wenn $3\cdot(u + 4) + 2\cdot(u + 5) = 32$ , dann $3\cdot u + 12 + 2\cdot u + 10 = 32$.
Addieren auf der linken Seite führt zur vereinfachten Gleichung $5\cdot u + 22 = 32$ .
Von hier aus würde auch inhaltliches Schließen zum Ziel führen. Die Schüler können hier aber auch zu der Entdeckung geführt werden, daß der "störende" Summand 22 auf der linken Seite der Gleichung zum Verschwinden gebracht werden kann, indem man auf der linken Seite 22 subtrahiert, daß man dann aber auch auf der rechten Seite 22 subtrahieren muß, damit die Gleichheit erhalten bleibt. Dies führt zur vereinfachten Gleichung $5\cdot u = 10$ , aus der sich der "störende" Faktor 5 auf der linken Seite beseitigen läßt, indem man beide Seiten der Gleichung durch 5 dividiert, was zur vereinfachten Gleichung $x = 2$ führt, die nur die Zahl 2 als Lösung besitzt. Also kann die Ausgangsgleichung ebenfalls nur diese Zahl 2 als Lösung besitzen, was man durch eine Probe nachprüft.
Die Vereinfachung der Gleichung ***5e)*** führt zur Gleichung $23a + 16 = 23a + 10$ , der bereits anzusehen ist, daß sie keine Lösung besitzt, auch ohne zu der noch einfacheren Gleichung $23a + 6 = 23a$ oder gar zu $0\cdot a = 6$ überzugehen. Wenn aber die vereinfachte Gleichung keine Lösung besitzt, dann kann die Ausgangsgleichung erst recht keine Lösung besitzen.
Die Vereinfachung der Gleichung ***5f)*** führt zur Gleichung $107\cdot x = 107\cdot x$ bzw. zur noch einfacheren Gleichung $x = x$ , die offensichtlich alle Zahlen als Lösungen besitzt. Daß dies auch für die Ausgangsgleichung zutrifft, läßt sich jedoch offensichtlich durch keine "Probe" im üblichen Sinn nachweisen! Man müßte vielmehr zeigen, daß aus $x = x$ die Ausgangsgleichung folgt, d.h. daß jeder Umformungsschritt auch in umgekehrter Richtung durchgeführt werden kann, was in der Tat der Fall ist. Hierauf sollte man leistungsstarke Schüler hinweisen.

## 3.9. Wir lösen Kryptogramme

***Ziele:***

- Systematisches Erfassen aller Fälle durch *Fallunterscheidungen* beim *Vorwärtsarbeiten.*
- *Tabellen* als Hilfsmittel beim *systematischen Probieren.*
- Gesetzmäßigkeiten entdecken und in Form von *Gleichungen* festhalten.
- Problem der *Existenz* und *Einzigkeit von Lösungen.*

Beim Lösen von Kryptogrammen kann man die Lösungsfindung durch folgende *Impulse* unterstützen:

- Welches Feld (Buchstabe) läßt sich als erstes füllen? Begründung!
  - ° Wo ist die "schwache Stelle" der Aufgabe?
  - ° Ist das Ausfüllen eindeutig möglich? Ist eine *Fallunterscheidung* nötig?
- Welches Feld läßt sich nun ausfüllen? Begründung!

usw.

Die Teilaufgaben der ***Aufgabe 1)*** sind nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet, so daß für leistungsstarke Schüler beim selbständigen Arbeiten kein Leerlauf entstehen kann. Die Teilaufgaben sollen in der gegebenen Reihenfolge gelöst werden. Wer eine Teilaufgabe gelöst hat, darf die letzte Zeile als "Angebot" nennen, ein bereits notiertes Angebot bestätigen oder durch ein "Gegenangebot" ergänzen und dann zur nächsten Teilaufgabe übergehen. Wird eine Teilaufgabe auf diese Weise von allen Schülern in selbständiger Arbeit gelöst, dann entfällt eine Besprechung. Ist dies nach angemessener Zeit nicht der Fall, dann wird die selbständige Arbeit unterbrochen. Schüler, die diese Teilaufgabe gelöst haben, dürfen dann Impulse geben, bis alle Schüler einen Lösungsweg gefunden haben.
Es reicht aus, wenn die ersten drei Teilaufgaben mit allen Schülern besprochen werden. Für besonders leistungsstarke Schüler, die viel früher fertig werden, wird man schwierige Zusatzaufgaben bereithalten.

Bei ***Aufgabe 1a)*** lassen sich alle Leerfelder eindeutig ausfüllen. Schwierigkeiten kann es allenfalls beim Ausfüllen der beiden Zehnerstellen geben. Hier kann die Frage helfen: "Kann bei der Addition der Zehnerziffern ein Übertrag auftreten? Begründe!" .

Die Lösung lautet 13090 + 37012 = 50102 .

Bei ***Aufgabe 1b)*** muß als erstes Feld die Einerstelle des ersten Faktors gefüllt werden, wofür es genau zwei Möglichkeiten gibt, die 3 oder die 8 . In jedem der beiden Fälle lassen sich die restlichen Felder eindeutig auszufüllen. Die Schülerfrage "4 mal wieviel endet auf 2" ist akzeptabel.

Die beiden Lösungen lauten 593·41 = 24313 und 598·41 = 24518 .

Bei ***Aufgabe 1c)*** lassen sich alle freien Felder eindeutig füllen und liefern das Resultat 14945 , was der Angabe widerspricht, daß die erste Ziffer des Resultats 2 lauten soll. Folglich besitzt diese Aufgabe keine Lösung.

Bei ***Aufgabe 1d)*** kann die Einerziffer des ersten Faktors 4 oder 9 , die Einerziffer des zweiten Faktors 2 oder 7 lauten. In jedem der insgesamt 4 möglichen Fälle lassen sich die restlichen Leerfelder eindeutig füllen, in einem dieser Fälle (bei der

Kombination 9 / 7) tritt ein Widerspruch auf (die Einerziffer des Produkts lautet nicht 8 sondern 3).

Die drei Lösungen lauten 569·42 = 23898 , 564·47 = 26508 , 564·42 = 23688 .

Bei ***Aufgabe 1e)*** lassen sich alle Leerfelder eindeutig ausfüllen, allerdings ist die Reihenfolge, in der dies geschehen muß, nicht mehr ganz so leicht zu finden wie bei den anderen Teilaufgaben.

Die Lösung lautet 253·38 = 9614 .

Bei der etwas schwierigeren ***Aufgabe 2)*** sollen die Schüler erkennen, wie man durch Abänderung von gegebenen Zahlen oder Bedingungen die Lösungsmenge gezielt verändern kann, und daß daher natürlich auch bei solchen Aufgaben im allgemeinen ein *Einzigkeitsnachweis* erforderlich ist, den wir bei Aufgabe 1) nur nicht explizit formuliert haben.
Es empfiehlt sich, zunächst herausfinden zu lassen, daß man mit dem Ausfüllen der 1. Zeile beginnen muß und wie dies zu erfolgen hat. Nachdem dieses Teilziel erreicht ist, kann wieder selbständige Arbeit einsetzen.
Da von allen zweistelligen Zahlen mit der Einerziffer 9 nur die Zahl 19 ein Teiler von 646 ist und da 646:19 = 34 gilt, läßt sich die erste Zeile des Kryptogramms eindeutig ausfüllen.
Wegen der in der 3. Spalte gegebenen beiden 0 lassen sich hier die 6 und die 4 wie nebenstehend angegeben eindeutig eintragen, und es ist auch klar, daß drei noch fehlende Hunderterziffern gleich sind (vgl. das nebenstehende Kryptogramm).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 6 | : | 1 | 9 | = | 3 | 4 | | | |
| | - | | | | · | | | + | | | |
| h | | | - | x | 0 | = | h | 0 | 6 | | |
| | | | - | | | = | h | 4 | 0 | | |

Bei ***Aufgabe 2a)*** steht in der 2. Zeile für x eine 2, also lautet die 2. Spalte 19·20 = 380 . Da hier nur verlangt wird, eine korrekte Eintragung anzugeben, ist es statthaft, für h = 1 zu wählen, woraus dann folgt, daß die 2. Zeile 126 - 20 = 106 und die 3. Zeile 520 - 380 = 140 lauten muß. In der dann zwangsläufig ausgefüllten 1. Spalte steht die wahre Aussage 646 - 126 = 520 , also erfüllt die so angegebene Eintragung alle gestellten Bedingungen.
Der Nachweis, daß h nicht größer als 1 sein darf und daß die angegebene Lösung daher die einzige Lösung ist, wird in Aufgabe 1a) noch nicht verlangt.

Bei ***Aufgabe 2b)*** steht in der 2. Zeile für x eine 3, also lautet die 2. Spalte 19·30 = 570 . Wählt man wieder h = 1, dann muß in der 2. Zeile 136 - 30 = 106 , in der 3. Zeile 710 - 570 = 140 stehen, was in der 1. Spalte zu der falschen Aussage 646 - 136 = 710 führt. Ist h größer als 1, dann tritt erst recht ein Widerspruch auf. Damit ist gezeigt, daß diese Aufgabe keine Lösung besitzt.

Am anspruchsvollsten ist die ***Aufgabe 2c)*** .
Von Aufgabe 2a) her ist klar, daß für x = 2 und h = 1 eine Lösung existiert.
Der Aufgabe 2b) ist zu entnehmen, daß für x = 3 und erst recht für x > 3 keine Lösung existiert.
Also braucht man nur noch den Fall x = 1 zu untersuchen. Bei analogem Vorgehen erkennt man, daß hier nur für h = 2 eine Lösung existiert. Die drei Zeilen lauten hier: 646:19 = 34 ; 216 - 10 = 206 ; 430 - 290 = 240.
Folglich besitzt Aufgabe 2c) genau 2 Lösungen.

Man kann den Schülern mitteilen, daß diese Aufgabe der Aufgabe 1.3. aus dem ARW entspricht.

Bei ***Aufgabe 3)*** geht es vor allem darum, eine *"schwache Stelle"* als günstigen Ansatzpunkt zu finden, um dadurch die Anzahl der notwendigen *Fallunterscheidungen* möglichst niedrig zu halten.
Bei leistungsschwächeren Schülern sollte man auf den oft recht aufwendigen Einzigkeitsnachweis verzichten, indem man die Anzahl der Lösungen vorgibt, nach denen die Schüler suchen sollen, bzw. indem man den Nachweis verlangt, daß keine Lösung existieren kann.
Man beobachte, welche Schüler besonders schnell die Lösungen entdecken!

Bei ***Aufgabe 3a)*** werden viele Schüler aus den 3 untereinanderstehenden A schließen, daß A = 0 gelten muß. Es könnte aber auch A = 9 gelten, wenn bei der Addition der Zehnerstellen ein Übertrag aufgetreten ist! Diesen Fall sollten leistungsstarke Schüler erkennen und ausschließen.
Da die fünfstellige Summe aus zwei vierstelligen Summanden entstanden ist, muß für deren erste Ziffer S = 1 gelten. Hieraus folgt für deren Einerziffer T = 2 . Da dann H + H = 12 gelten soll, muß H = 6 gelten, (weil bei der Addition der Ziffern 0 in den Hunderterstellen kein Übertrag entstanden ist).
Um die nun noch fehlenden Zehnerziffern U und D zu ermitteln, wird eine *Fallunterscheidung* vorgenommen. Für U kommen die bereits vergebenen 0 , 1 oder 2 nicht in Frage; für U = 3 müßte D die bereits vergebene 6 sein.
Aus U = 4 folgt D = 8 , was eine Lösung liefert. Für U > 4 müßte ein Übertrag auftreten, was nicht der Fall ist.
Damit ist gezeigt, daß das Kryptogramm HAUS + HAUS = STADT genau eine Lösung hat: 6041 + 6041 = 12082 .

Bei ***Aufgabe 3b)*** ermittelt man die Ziffern in der Reihenfolge F = 1, A = 9, N = 8, woraus dann folgt, daß nur noch L = 2 oder L = 3 und somit G = 4 oder G = 8 gelten kann, womit die beiden Lösungen gefunden sind:

992 + 992 = 1984 , 993 + 993 = 1986

Bei ***Aufgabe 3c)*** kommt man ohne Probieren ans Ziel, weil wegen des Übertrags nur S = 1 gelten kann, was der gegebenen Bedingung I + I = S oder I + I = S + 10 widerspricht. Folglich besitzt diese Aufgabe keine Lösung.

Schwieriger ist der Nachweis, daß ***Aufgabe 3d)*** keine Lösung besitzt. Hier muß man bemerken, daß wegen der beiden E bzw. I in in der Zehner- bzw. Hunderterstelle eines der Summanden und der Summe bei der Addition der Einer- , Zehner- und Hunderterziffern stets der Übertrag 1 vorkommen muß.
Folglich gilt

$$
\begin{aligned}
I + S &= R + 10 \\
E + N + 1 &= E + 10 \longrightarrow N = 9 \\
R + I + 1 &= I + 10 \longrightarrow R = 9 \\
D + E + 1 &= V
\end{aligned}
\qquad \longrightarrow N = R \longrightarrow \text{Widerspruch}
$$

Wesentlich aufwendiger ist die ***Aufgabe 3e)***, wo man die 11 Lösungen nur mit Hilfe einer ziemlich aufwendigen *Fallunterscheidung* ermitteln kann.

- Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründung!

[ I muß gerade sein, weil S + S = I oder S + S = I + 10 ; $E \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$, weil kein Übertrag auftritt, und $E \neq 0$ als erste Ziffer.]

- Mit welcher Bedingung beginne ich am günstigsten?

[ Es scheint günstig zu sein, mit der Fallunterscheidung bezüglich E zu beginnen, weil hier nur noch 4 von 10 Fällen vorkommen können. ]

- Was läßt sich jetzt ableiten? Begründung!
  - ° Über welche Ziffern läßt sich jetzt etwas aussagen?

[ Über N und S sind jetzt Aussagen möglich, wobei man zu unterscheiden hat, ob S + S einen Übertrag liefert oder nicht. ]

- Ich erfasse alle möglichen Fälle übersichtlich in einer Tabelle und überprüfe, ob sie die gegebenen Bedingungen erfüllen.

Eine vollständige *Fallunterscheidung* sieht wie folgt aus:

Wenn $E = 1$, dann $(N = 0$ oder $N = 5)$ und $S \geq 5$;
wenn $E = 2$, dann $(N = 1$ oder $N = 6)$ und $S < 5$;
wenn $E = 3$, dann $(N = 1$ oder $N = 6)$ und $S \geq 5$;
wenn $E = 4$, dann $(N = 2$ oder $N = 7)$ und $S < 5$.

Begründung:
Wenn $E = 1$ und $S < 5$, dann entsteht bei S + S kein Übertrag; dann müßte $N + N = 1$ oder $N + N = 11$ gelten, was für keine Ziffer N erfüllbar ist; also muß für $E = 1$ stets $S \in \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$ gelten.
Wenn $E = 1$ und $S = 5$, dann muß $N + N + 1 = 1$ oder $N + N + 1 = 11$ gelten, was nur für $N = 0$ oder $N = 5$ möglich ist.
Aus $E = 1$, $N = 0$, $S = 5$ folgt eindeutig $I = 0$, also $N = 1$, was der Bedingung widerspricht, daß für verschiedene Variable auch verschiedene Ziffern einzusetzen sind. Dieser Fall liefert daher keine Lösung.
Aus $E = 1$, $N = 0$, $S = 6$ folgt eindeutig $I = 2$, $W = 4$, $Z = 2$, also $I = Z$, im Widerspruch zu einer gegebenen Bedingung.
Aus $E = 1$, $N = 0$, $S = 7$ folgt eindeutig $I = 4$, $W = 8$, $Z = 2$. Wie man durch eine Probe leicht bestätigt, liefert dieser Fall eine Lösung der Aufgabe.
Auf diese Weise hat man die in den ersten 3 Zeilen der folgenden *Tabelle* festgehaltenen Fälle ermittelt. In der beschriebenen Weise fortfahrend gelangt man zu den in der Tabelle aufgeführten 11 Lösungen und hat gleichzeitig nachgewiesen, daß es keine weiteren Lösungen geben kann.
Man sollte bei dieser Aufgabe nicht zu viel Zeit verlieren. Es muß nur klar werden, wie man zu einer günstigen Fallunterscheidung gelangt. U.U. kann man die vier Hauptfälle durch vier Schülergruppen bearbeiten lassen.

| E | N | S | I | W | Z | Lösung? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5 | 0 ↯ | - | - | nein |
| | | 6 | 2 | 4 | 2 ↯ | nein |
| | | 7 | 4 | 8 | 2 | ja |
| | | 8 | 6 | 2 | 3 | ja |
| | | 9 | 8 | 6 | 3 | ja |
| | 5 | 6 | 2 | 5 ↯ | - | nein |
| | | 7 | 4 | 9 | 2 | ja |
| | | 8 | 6 | 3 | 3 ↯ | nein |
| | | 9 | 8 | 7 | 3 | ja |

| E | N | S | I | W | Z | Lösung? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 ↯ | - | - | nein |
| | | 3 | 6 | 2 ↯ | - | nein |
| | | 4 | 8 | 6 | 5 | ja |
| | 6 | 0 | 0 ↯ | - | - | nein |
| | | 1 | 2 ↯ | - | - | nein |
| | | 3 | 6 | 3 ↯ | - | nein |
| | | 4 | 8 | 7 | 5 | ja |

| E | N | S | I | W | Z | Lösung? |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 5 | 0 | 0 ↯ | - | nein |
| | | 6 | 2 | 4 | 6 ↯ | nein |
| | | 7 | 4 | 8 | 6 | ja |
| | | 8 | 6 | 2 | 7 | ja |
| | | 9 | 8 | 6 | 7 | ja |
| | 6 | 5 | 0 | 1 | 6 ↯ | nein |
| | | 7 | 4 | 9 | 6 ↯ | nein |
| | | 8 | 6 ↯ | - | - | nein |
| | | 9 | 8 | 7 | 7 ↯ | nein |
| 4 | 2 | 0 | 0 ↯ | - | - | nein |
| | | 1 | 2 ↯ | - | - | nein |
| | | 3 | 6 | 2 ↯ | - | nein |
| | 7 | 0 | 0 ↯ | - | - | nein |
| | | 1 | 2 | 5 | 8 | ja |
| | | 2 | 4 ↯ | - | - | nein |
| | | 3 | 6 | 3 ↯ | - | nein |

Folglich können für **EINS** folgende 11 Zahlen stehen:
1407 , 1608 , 1809 , 1457 , 1859 , 2814 , 2864 , 3417 , 3618 , 3819 , 4271 .

Bei ***Aufgabe 3f)*** erhält man zunächst relativ leicht nacheinander P = 1 , U = 9 und E = 0 und damit das nebenstehende Kryptogramm.
Nun liegt es nahe, für den am häufigsten vorkommenden Buchstaben S eine Fallunterscheidung mit S∈{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 } durchzuführen.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 9 | S | A | |
| + | 9 | S | S | R | |
| 1 | 0 | A | C | 0 | |

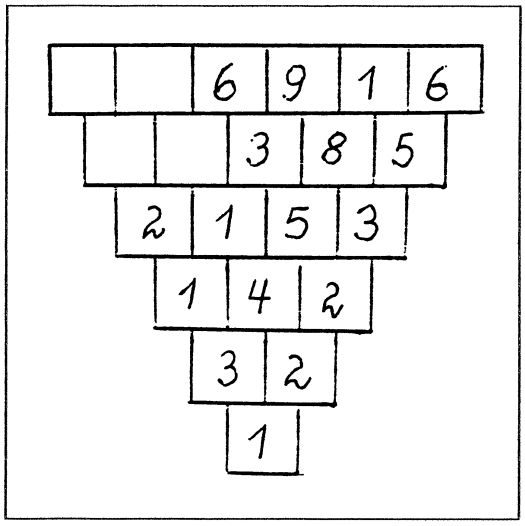
Nachträglich kann man erkennen, daß sich dieser Lösungsweg noch vereinfachen läßt. Wegen A + R = 10 muß S + S + 1 = C oder S + S + 1 = C + 10 gelten.
Der letztgenannte Fall läßt sich jedoch ausschließen, weil dann S + 9 + 1 = A + 10 gelten müßte, was zum Widerspruch S = A führen würde.
Folglich ist nur noch eine Fallunterscheidung bezüglich S∈{ 2, 3, 4 } erforderlich.
S = 2 führt zum Widerspruch A = 1 = P ; S = 4 führt zum Widerspruch C = 9 = U .
S = 3 führt zu C = 7 , A = 2 , R = 8 , und man erkennt, daß 932 + 9338 = 10270 die einzige Lösung des Kryptogramms USA + USSR = PEACE ist.

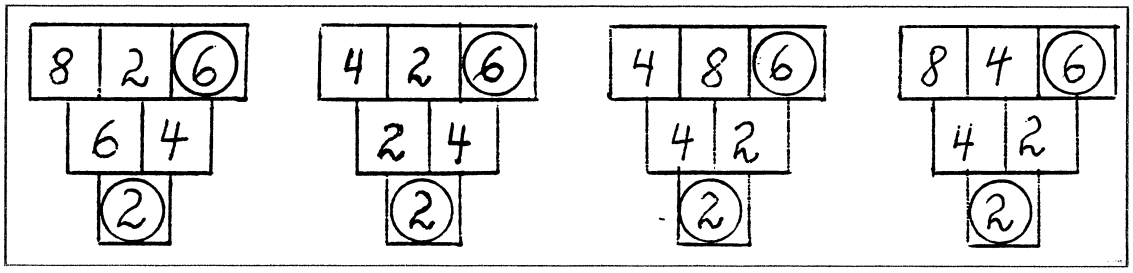
Bei ***Aufgabe 3g)*** ist zu beachten, daß auch hier für die Buchstaben nur einstellige Zahlen ("Ziffern") eingesetzt werden dürfen.
Die meiste Information liefern die Bedingungen A·A = B , C·D = E und A·D = G , weil man hieraus recht leicht erkennt, daß nur A∈{ 2, 3 } und C,D∈{ 2,3,4 } gelten kann.
Aus A = 2 würde der Widerspruch C·D = 12 folgen.

Aus A = 3 folgt zunächst D = 2 und C = 4 , weil D = 4 und C = 2 zum Widerspruch A·D = 12 führen würde.
Hieraus folgt dann sofort B = 9 , E = 8 , G = 6 , F = 7 und H = 1 .
Folglich lauten die gesuchten 3 Zeilen 3·3 = 9 , 4·2 = 8 , 7 - 6 = 1 , und man kann sich leicht überzeugen, daß hierbei auch die in den 3 Spalten vorgegebenen Bedingungen erfüllt sind.
Daher ist die angegebene Belegung die einzige Lösung unserer Aufgabe.

Beim Lösen der ***Aufgabe 4)*** sollen die Schüler folgendes entdecken:
Zu zwei nebeneinanderstehenden Zahlen (z.B. 6 und 9) gibt es stets genau eine Zahl als Differenz (z.B. 9 - 6 = 3), die in das darunterliegende Feld eingetragen wird.
Zu zwei untereinanderstehenden Zahlen, deren Felder sich berühren (z.B. 9 und 8) *kann* es genau eine Zahl x von 1 bis 9 geben, so daß die unten stehende Zahl die Differenz der oben stehenden Zahl und x ist (z.B. x = 1 , so daß 9 - 1 = 8 ).
Es kann aber auch genau zwei Zahlen x geben, die diese Bedingung erfüllen (z.B. gehört zu 6 und 4 sowohl x = 2 als auch x = 8 ), und schließlich kann auch noch der Fall eintreten, daß es keine derartige Zahl x gibt, nämlich stets dann, wenn die untere Zahl größer oder gleich der oberen Zahl ist.
Mit der letztgenannten Feststellung hat man die allgemeine Lösung der ***Aufgabe 4c)*** gefunden.

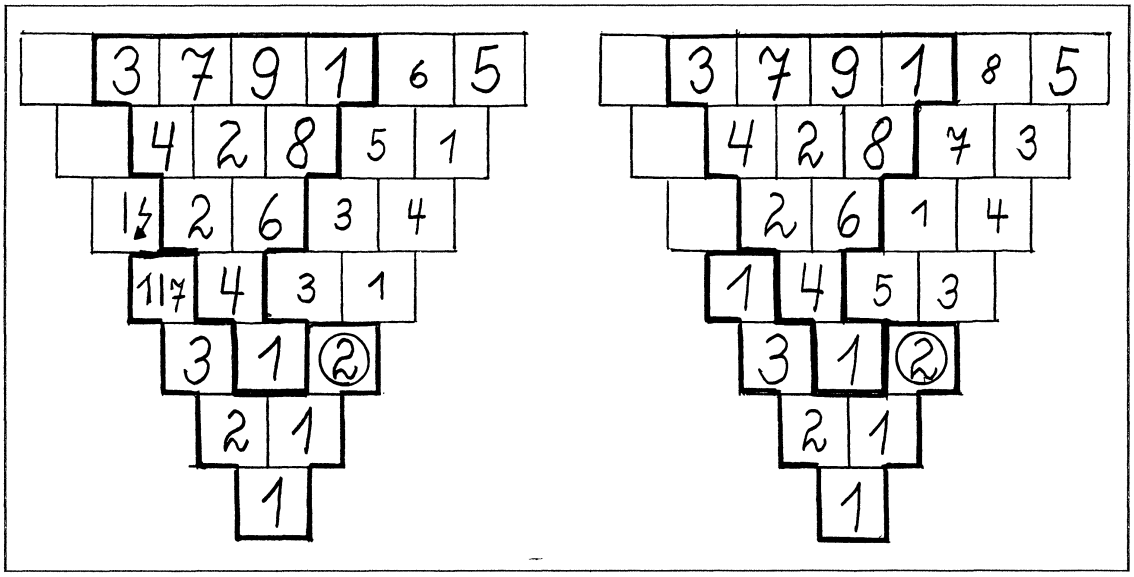
Auf diese Weise lassen sich bei ***Aufgabe 4a)*** die nebenstehend angegebenen Felder eindeutig füllen, während sich das 2. Feld der 2. Zeile dann entweder mit der 4 oder der 2 füllen läßt
Im erstgenannten Fall läßt sich dann das 1. Feld der 2. Zeile entweder mit der 6 oder mit der 2 füllen, die beiden letzten Felder in der 1. Zeile sind dann eindeutig füllbar.
Im zweitgenannten Fall läßt sich das 1. Feld der 2. Zeile eindeutig mit der 4 füllen, und für das Füllen der beiden letzten Felder in der 1. Zeile gibt es zwei Möglichkeiten.
Foglich besitzt die Aufgabe 4a) genau 4 Lösungen.



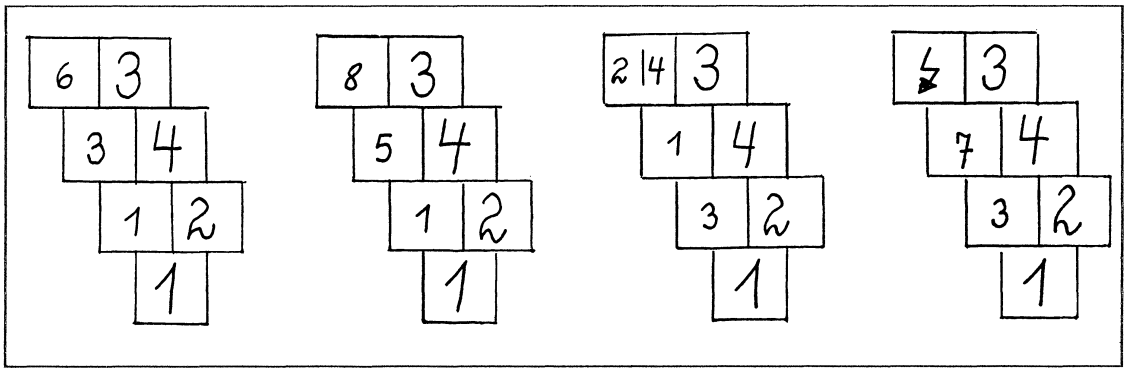




Bei ***Aufgabe 4b)*** lassen sich zunächst die Felder im oberen stark umrandeten Teil eindeutig füllen.
Dann ist eine erste Fallunterscheidung erforderlich. Zur 4 in der 4. Zeile und der 1 in der 5. Zeile gehört entweder die 3 oder die 5 in der 4. Zeile.

In beiden Fällen lassen sich dann in Zeile 1 bis 5 die rechts liegenden Felder eindeutig füllen, und man erkennt, daß in beiden Fällen das 3. Feld der 5. Zeile mit der (umrandeten) 2 gefüllt wird (was als "Zufall" anzusehen ist).



Dann lassen sich die Felder des unteren stark umrahmten Teils eindeutig füllen, wenn man folgendes beachtet:
Das 1. Feld der 4. Zeile könnte zwar sowohl mit der 1 als auch mit der 7 gefüllt werden, da jedoch die 7 größer ist als die über ihr stehende 2 im 2. Feld der 3. Zeile, führt das Füllen mit der 7 zu einem Widerspruch.
Die restlichen drei leeren Felder lassen sich - wie nachfolgend angegeben - auf genau 4 verschiedene Weisen füllen.
Folglich hat die Aufgabe 4b) genau 8 Lösungen.



***Aufgabe 5a):***
Wie bei den magischen Quadraten wird man festlegen, wann zwei Lösungen dieser Aufgabe verschieden genannt werden sollen und in welcher "genormten Schreibweise" eine Lösung festgehalten werden soll.
Um sich das Aufschreiben der Schemata zu sparen, wird man eine *abkürzende Schreibweise* einführen:
In (a b c d e f ) bezeichnen die unterstrichenen Buchstaben die "Eckenzahlen" in der Reihenfolge " oben - links unten - rechts unten " und man kann o.B.d.A stets a < c < e fordern.

Das in Aufgabe 1a) angegebene Schema mit den Eckenzahlen 4 , 5 , 6 und der Seitensumme S = 12 wird daher abkürzend als ( 4 3 5 1 6 2 ) geschrieben.
Man kann leicht zeigen, daß dies zu S = 12 die einzige Lösung in genormter Schreibweise ist.
Zu S = 9 gehört ( 1 6 2 4 3 5 ) , zu S = 10 gehört ( 1 6 3 2 5 4 ) und zu S = 11 gehört ( 2 5 4 1 6 3 ) jeweils als einzige Lösung in genormter Schreibweise.

***Aufgabe 5b):***
Die Lösung dieser Aufgabe wird man in der Form ( a b c d e f g h i ) schreiben, wobei a < d < g gelten soll.
Für die "Eckensumme" gilt E = a + d + g .
Für die "Seitensummen" gilt S = a + b + c + d = d + e + f + g = g + h + i + a .

- Was läßt sich aus den gegebenen Zahlen und Bedingungen unmittelbar ableiten? Begründung!
  - ° Was läßt sich über die Summen (b+c), (e+f), (h+i) aussagen?
- Was läßt sich nun ableiten? Begründung!
  - ° Welche Zahlen kommen für b und c in Frage? Welche für e und f ? Welche für h und i ?
  - ° Ich erfasse systematisch alle Fälle!
  - ° Wie lassen sich aus den ermittelten Paaren Lösungen erzeugen?
  - ° Ich schreibe die gefundenen Lösungen heraus.
- Habe ich bereits alle verschiedenen Lösungen gefunden?
  - ° Wann werden zwei Lösungen verschieden genannt?

Es gilt
b + c = 19 - (1 + 4) = 14 ,
e + f = 19 - (4 + 7) = 18 ,
h + i = 19 - (7 + 1) = 11 ;
das folgt aus der Definition der konstanten Seitensumme S = 19 und den gegebenen Eckenzahlen.
Es muß b,c,e,f∈{ 2, 3, 5, 6, 8, 9 } gelten, da die Eckenzahlen 1 , 4 , 7 lauten.
Es gibt genau folgende Möglichkeiten
für b , c : 14 = 5 + 9 = *6 + 8* ,
für e , f : 8 = 2 + 6 = *3 + 5* ,
für h , i : 11 = 2 + *9* = 3 + 8 = 5 + 6 ,
wobei sich jeweils die unterstrichenen bzw. kursiv geschriebenen Paare zu einer Lösung zusammenstellen lassen.
Dies liefert zunächst folgende Lösungen:
( 1 5 9 4 2 6 7 3 8 ) und
( 1 6 8 4 3 5 7 2 9 ) .

Wenn ich zwei der so gefundenen "Seitenzahlen" vertausche, erhalte ich eine neue Lösung.
Ich ermittle systematisch die Anzahl der verschiedenen Lösungen meiner Aufgabe.

| | |
|---|---|
| Ausgangslösung: | 1 Möglichkeit |
| Vertauschen der beiden Seitenzahlen auf genau einer Seite: | 3 Möglichkeiten |
| Vertauschen der beiden Seitenzahlen auf genau zwei Seiten: | 3 Möglichkeiten |
| Vertauschen der beiden Seitenzahlen auf allen drei Seiten: | 1 Möglichkeit |
| insgesamt: | 8 Möglichkeiten |

Natürlich sind hier auch andere Zählmöglichkeiten verwendbar (vgl. Abschnitt 3.4.) .
Da es insgesamt genau zwei Ausgangslösungen (in genormter Schreibweise) gibt, existieren insgesamt genau 16 verschiedene Lösungen .

***Aufgabe 5c)*** ließe sich *analog* wie Aufgabe 5b) lösen, wenn man außer der Seitensumme S auch noch die in Frage kommenden Eckenzahlen a , d , g kennen würde. Würde ich die Eckensumme E kennen, dann könnte ich alle (a , d , g) mit dieser Eckensumme ermitteln.
Auf diese Weise erkennt man, daß die ***Aufgabe 5d)*** eine *Hilfsaufgabe* für die Aufgabe 5c) ist. Zu diesen Überlegungen sollten die Schüler in einer Diskussion hingeführt werden.
Zunächst muß man erkennen, daß hier folgende "Gesamtsumme" eine Rolle spielt:
$G = \underline{a} + b + c + \underline{d} + e + f + \underline{g} + h + i = 1 + 2 + \ldots + 8 + 9 = 45$ .
Aus der Definition der Eckensumme E und der konstanten Seitensumme S folgt dann die Gleichung $\underline{G + E = 3 \cdot S}$ , aus der man bei gegebenem S und berechnetem G dann die Eckensumme E berechnen kann, was dann das Ermitteln aller möglichen Eckenzahlen ermöglicht.
Mit leistungsstarken Schülern kann man sich nochmals der Aufgabe 5b zuwenden. Wegen G = 45 und S = 19 wird hier $E = 3 \cdot 19 - 45 = 12$ und man kann sich überzeugen, daß tatsächlich für die gegebenen Eckenzahlen 1 + 4 + 7 = 12 gilt.
Nun läßt sich die 12 aber auch noch auf andere Weise als Summe dreier Zahlen von 1 bis 9 darstellen. Es gilt
$12 = 1 + 2 + 9 = 1 + 3 + 8 = \underline{1 + 4 + 7} = 1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5$ .
Die Frage liegt nahe, ob es auch zu den 6 anderen Eckenzahlen mit der Eckensumme 12 Lösungen unserer Aufgabe gibt.
Nun ist leicht zu erkennen, daß z.B. 1 , 2 , 9 keine Eckenzahlen sein können, weil dann $1 + b + c + 2 = 19$ mit $b,c \neq 9$ gelten müßte, woraus b = c = 8 folgen würde, was den gegebenen Voraussetzungen widerspricht.
Dies wirft die Frage auf, welche der oben angegebenen Summanden tatsächlich Ekkenzahlen sein können.
Wie man durch systematisches Probieren erkennt, trifft dies außer für 1 , 4 , 7 nur noch für 2 , 3 , 7 zu.

Die ***Aufgabe 5c)*** ist gelöst, wenn man für jede der Seitensummen 17 , 20 , 21 und 23 jeweils eine Lösung angibt.
Mit leistungsstarken Schülern kann man sich auch die Aufgabe stellen, in Gruppenarbeit alle Lösungen zu ermitteln. Dabei wird man sich jeweils auf die Angabe der "Grundvariante" beschränken, aus der sich dann durch Vertauschen von Seitenzahlen 7 weitere Lösungen bilden lassen.
Dabei erhält man folgendes Resultat:

S = 17 ; E = 6 ; ( $\underline{1}$ 5 9 $\underline{2}$ 4 8 $\underline{3}$ 6 7 ) , ( $\underline{1}$ 6 8 $\underline{2}$ 5 7 $\underline{3}$ 4 9 ) .

S = 19 ; E = 12 ; ( $\underline{1}$ 5 9 $\underline{4}$ 2 6 $\underline{7}$ 3 8 ) , ( $\underline{1}$ 6 8 $\underline{4}$ 3 5 $\underline{7}$ 2 9 ) ,
( $\underline{2}$ 5 9 $\underline{3}$ 1 8 $\underline{7}$ 4 6 ) , ( $\underline{2}$ 6 8 $\underline{3}$ 4 5 $\underline{7}$ 1 9 ) .

S = 20 ; E = 15 ; ( $\underline{1}$ 6 8 $\underline{5}$ 2 4 $\underline{9}$ 3 7 ) ,
( $\underline{2}$ 4 9 $\underline{5}$ 1 6 $\underline{8}$ 3 7 ) , ( $\underline{2}$ 6 7 $\underline{5}$ 3 4 $\underline{8}$ 1 9 ) ,
( $\underline{4}$ 2 9 $\underline{5}$ 1 8 $\underline{6}$ 3 7 ) , ( $\underline{4}$ 3 8 $\underline{5}$ 2 7 $\underline{6}$ 1 9 ) .

S = 21 ; E = 18 ; ( $\underline{3}$ 4 8 $\underline{6}$ 1 5 9 2 7 ) , ( $\underline{3}$ 5 7 $\underline{6}$ 2 4 $\underline{9}$ 1 8 ) .

S = 23 ; E = 24 ; ( $\underline{7}$ 2 6 $\underline{8}$ 1 5 $\underline{9}$ 4 3 ) , ( $\underline{7}$ 3 5 $\underline{8}$ 4 7 $\underline{9}$ 1 6 ) .

## 3.10. Hier können Skizzen helfen

***Ziele:***

- Skizzen zum *Abspeichern der Aufgabenstellung* bei Bewegungsaufgaben.
- Skizzen als Hilfsmittel zur *Lösungsfindung* bei Bewegungsaufgaben.
- *Vorwärtsarbeiten* und *Rückwärtsarbeiten.*
- Formulieren von *Lösungsplänen.*
- Festigen des Schließens über die Einheit.

Neben Tabellen sind es vor allem Skizzen, die bei *Bewegungsaufgaben* den Sachverhalt zu veranschaulichen gestatten. Einige *Impulse*, die beim Anfertigen von Skizzen helfen können, wurden bereits auf Seite 12 angegeben.
Es sei jedoch nochmals betont: Wenn ein Schüler beim Lösen einer derartigen Aufgabe ohne dieses Hilfsmittel auskommt, dann wird man ihn gewähren lassen! Auch hier sollte kein Zwang ausgeübt werden, jedes schematische Vorgehen ist zu vermeiden.

Man kann folgendes vereinbaren: In die Skizzen (oder auch Tabellen) werden gegebene Größen "grün", berechnete Hilfsgrößen "blau" eingetragen und die gesuchten Größen (etwa durch Umrahmen) "rot" gekennzeichnet. Wir wollen hier gegebene Größen durch eine Umrahmung mit ◯, gesuchte Größen durch eine Umrahmung mit □ zu berechnende Hilfsgrößen durch eine Umrahmung mit ⬭ kennzeichnen.

Die sehr leichten Aufgaben 1) und 2) lasse man selbständig lösen und beobachte, welche Schüler ohne Hilfe ans Ziel gelangen und ob sie dabei Skizzen verwenden. Nur bei leistungsschwachen AGn, bei denen die meisten Schüler diese Aufgaben nicht selbständig lösen können, wird man schon hier die unten angegebenen Skizzen einführen. In der Auswertung wird man vor allem den *Lösungsplan* explizit formulieren lassen.
Die beim mathematischen Spiel "Hundert gewinnt" eingeführten Impulse für das *Rückwärtsarbeiten* sowie das Merkschema ? $\xrightarrow{?}$ □ werden wiederholt und auf das Lösen von Sachaufgaben übertragen: *"Woraus ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Begründe!"*

Auch bei Aufgabe 3) sollten die Schüler zunächst versuchen, selbständig ans Ziel zu gelangen. In der Auswertung sollte der AG-Leiter zeigen, wie man Skizzen geschickt anlegen kann (für jeden wichtigen Zeipunkt eine eigene Skizze, in der neben Strekkenlängen auch der Ort, die Fahrtrichtung und die Fahrgeschwindigkeit der bewegten Objekte festgehalten werden).

Bei der sehr leichten Aufgabe 4) sollen die Schüler das Anfertigen derartiger Skizzen üben.

In Aufgabe 5) wird gezeigt, durch welche Impulse man die Lösungsfindung unterstützen kann.

Aufgabe 6) lasse man zunächst selbständig lösen. In der Auswertung lasse man die unter "Einige Musterlösungen" in der Aufgabensammlung auf S.32 festgehaltene Skizze erläutern und den zugehörigen Lösungsplan formulieren. Anschließend wird man die auf S.31 festgehaltene Musterlösung durcharbeiten.

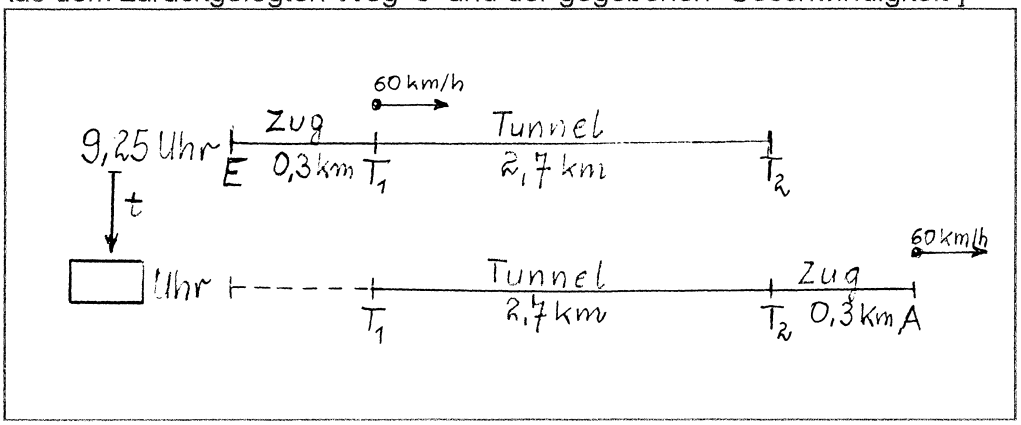
Vor allem mit leistungsstarken Schülern, denen das Lösen derartiger Aufgaben keine Schwierigkeiten bereitet, wird man dabei auf Anforderungen an eine vollständige und korrekte Lösungsdarstellung eingehen.

Aufgabe 7) ist sehr leicht, Aufgabe 8) dagegen relativ schwierig, was man für eine differenzierte Aufgabenstellung ausnützen kann.

Man beachte, daß die Schüler die Formel $s = v \cdot t$ im Unterricht noch nicht kennengelernt haben. Es empfiehlt sich daher, Wege oder Zeiten durch "Schließen über die Einheit" u.U. unter Verwendung von Tabellen berechnen zu lassen (vgl. Abschnitt 3.2.) .

***Aufgabe 1)***

- Woraus ließe sich die gesuchte Uhrzeit unmittelbar berechnen?
  [ Aus der benötigten Fahrzeit t und der gegebenen Uhrzeit ]
- Woraus ließe sich diese Fahrzeit unmittelbar berechnen?
  [ Aus dem zurückgelegten Weg s und der gegebenen Geschwindigkeit ]



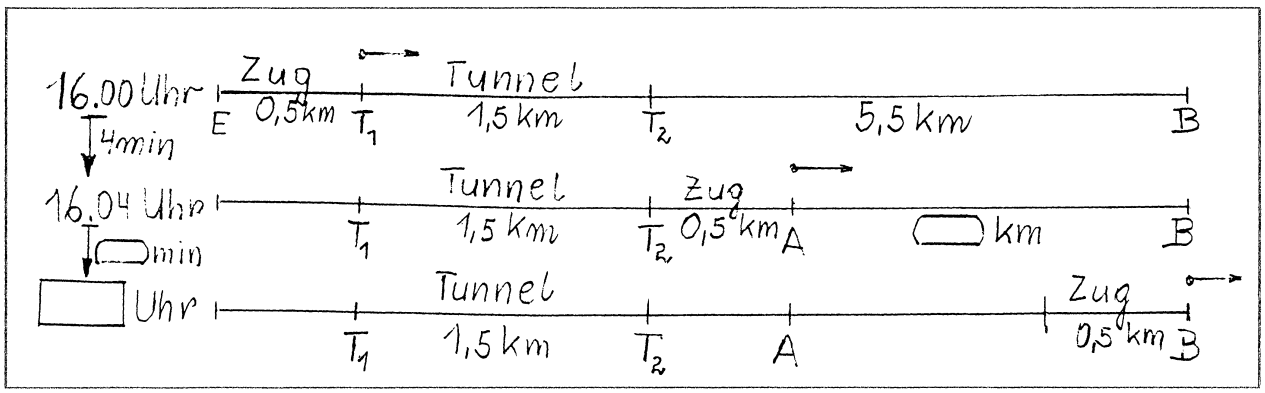

*Lösungplan:*

1) Berechnung des zurückgelegten Weges $\overline{T_1A}$ (= $\overline{ET_2}$) ; [ 3 km ] .
2) Berechnung der benötigten Zeit; [$\frac{1}{20}$ h = 3 min ]
3) Berechnung der gesuchten Uhrzeit; [9.25 + 3 min = 9.28 Uhr]

| km | Stunden |
|---|---|
| 60 | 1 |
| (1) | $(\frac{1}{60})$ |
| 3 | $\frac{3}{60} = \frac{1}{20}$ |

Lösung: Der letzte Wagen verläßt den Tunnel um 9.28 Uhr .

***Aufgabe 2)*** wird analog gelöst. Es gibt *2 Lösungswege*.



*Lösungsplan:*

1) Weg der Lok von $T_1$ bis $T_2$ ; [ 2 km ] .

2.1) Weg der Lok von $T_2$ bis B ; [ 5 km ]

2.2) Weg der Lok von $T_1$ bis B ; [ 7 km ]

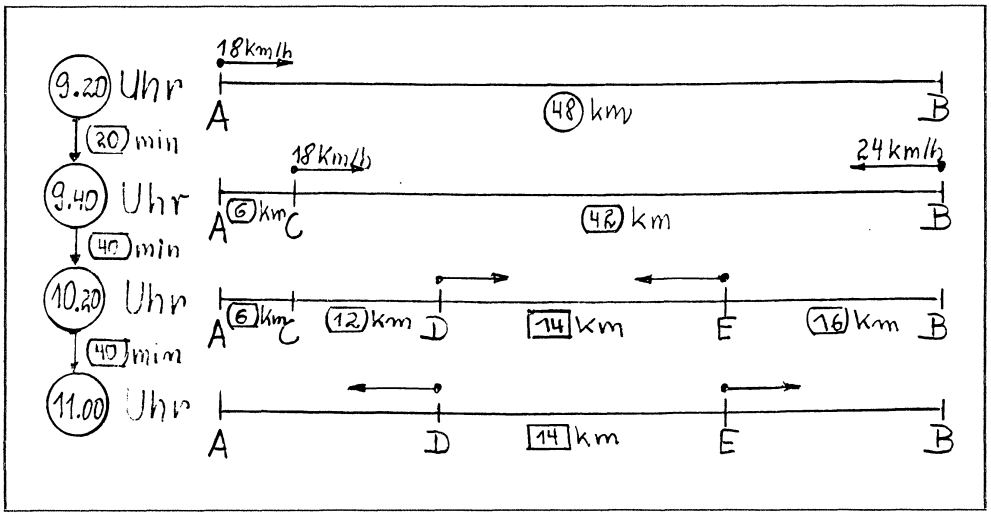
3.1) Fahrzeit der Lok von $T_2$ bis B ; [ 10 min ]

3.2) Fahrzeit der Lok von $T_1$ bis B ; [ 14 min ]

4) Uhrzeit, zu der die Lok in B ankommt; [ 16.14 Uhr ]

Wenn man die berechneten Hilfsgrößen und die gesuchte Größe mit in die Skizze einträgt, dann hat man den Lösungsweg in groben Zügen festgehalten.

Zu ***Aufgabe 3a)*** gehören nur die ersten drei Teilskizzen.




*Lösungsplan:*

1) Weg $\overline{AC}$ , den Jens (von 9.20 bis 9.40 , also) in 20 min zurücklegte; [ 6 km ]

2) Weg $\overline{CD}$ , den Jens (von 9.40 bis 10.20 , also) in 40 min zurücklegte; [ 12 km ]

3) Weg $\overline{AC}$ , den Martin (von 9.40 bis 10.20 , also) in 40 min zurücklegte; [ 16 km ]

4) Abstand von Jens und Martin um 10.20 Uhr; [ 48 km - ( 6 + 12 + 16) km = 14 km ]

Zu ***Aufgabe 3b)*** gehört noch die vierte der oben angegebenen Skizzen. In den zwischen 10.20 Uhr und 11.00 Uhr verstrichenen (ebenfalls) 40 Minuten sind Jens und Martin aneinander vorbeigefahren und sind um 11.00 Uhr wiederum 14 km voneinander entfernt.

In ***Aufgabe 3c)*** sollen die Schüler selbst weitere Fragen stellen. Folgende Fragen sollten beantwortet werden:

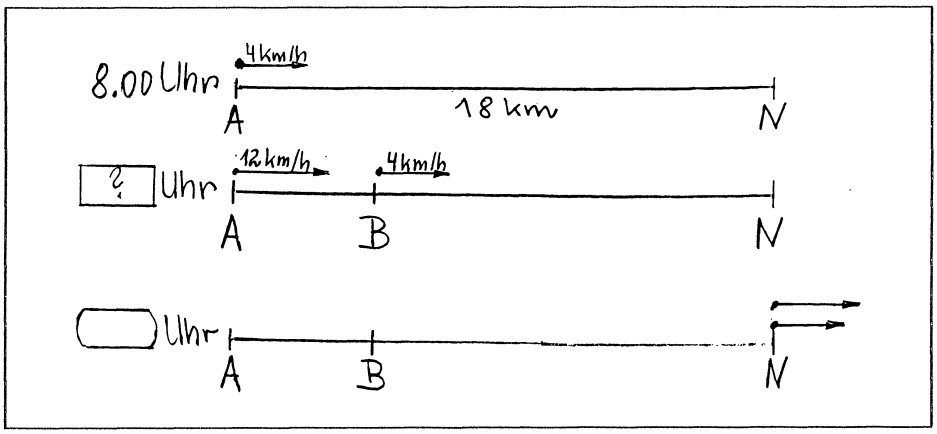
Wann kommt Jens in B an? [ 12.00 Uhr ]

Wann kommt Martin in A an? [ 11.40 Uhr ]

Wann treffen Jens und Martin einander? [ 10.40 Uhr ]

In welcher Entfernung von A treffen Jens und Martin einander? [ 24 km ]

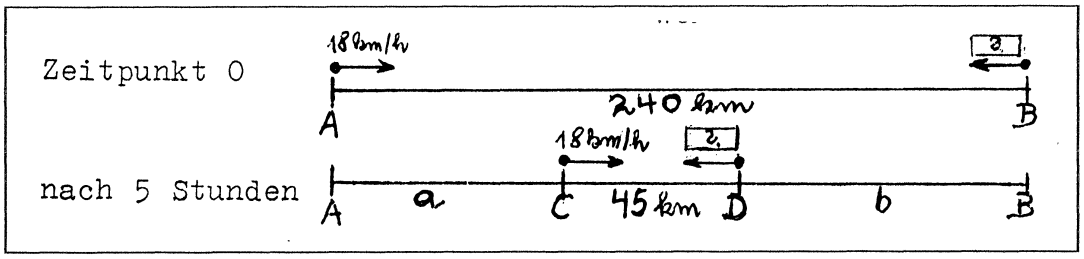
Die in ***Aufgabe 4)*** geforderten Skizzen sehen wie folgt aus:




*Rückwärtsarbeiten:*
Um die gesuchte Startzeit der 2. Gruppe ermitteln zu können, benötigt man außer der gegebenen Startzeit 8.00 Uhr der 1. Gruppe noch die Differenz $t_1 - t_2$ der beiden Gruppen auf der Strecke $\overline{AN}$ .
Durch *Vorwärtsarbeiten* gelangt man dann zur Fahrzeit $t_1$ der 1. Gruppe auf der Strecke $\overline{AN}$ [ 4 h 30 min ] , zur Fahrzeit $t_2$ der 2. Gruppe auf $\overline{AN}$ [ 1 h 30 min ] und damit zur benötigten Differenz $(t_1 - t_2)$ von 3 Stunden, woraus man dann die gesuchte Abfahrtzeit 11.00 Uhr der 2. Gruppe erhält.
Abschließend sollten die Schüler noch weitere Fragen nach der gemeinsamen Ankunftzeit in B und den Streckenlängen von $\overline{AB}$ sowie $\overline{BN}$ stellen und beantworten.

***Aufgabe 5)***

| | |
|---|---|
| - Günstige *Veranschaulichung*?<br>° Wichtige Situationen? | Ich halte die Situation zum Zeitpunkt der Abfahrt und nach 5 Stunden jeweils in einer *Skizze* fest. |
| - Günstige *Bezeichnungen* einführen! | Die Standorte der Schiffe nach 5 Stunden bezeichne ich mit C und D . |
| - *Gegebenes* festhalten!<br>*Gesuchtes* kennzeichnen! | Ich trage die gegebenen Streckenlängen und Geschwindigkeiten ein, kennzeichne die gesuchte Geschwindigkeit. |
| - Woraus ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Begründung! | Würde ich die Fahrstrecke $\overline{DB}$ = b des 2. Schiffes kennen, dann könnte ich mit Hilfe der bekannten Fahrzeit die gesuchte Geschwindigkeit berechnen. |
| - Was läßt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründung! | Aus der gegebenen Geschwindigkeit und der Fahrzeit des 1. Schiffes läßt sich dessen Fahrstrecke $\overline{AC}$ = a berechnen. |
| - Was läßt sich nun berechnen? Begründung! | Aus der gegebenen Streckenlänge $\overline{CD}$ und der berechneten Streckenlänge $\overline{AC}$ läßt sich $\overline{DB}$ = b berechnen; damit bin ich am Ziel. |




Zur weiteren Veranschaulichung verwende ich noch eine *Tabelle*.

Geschwindigkeit

| Weg | Zeit | Gesamtweg | Gesamtzeit | |
|---|---|---|---|---|
| 18 km | 1 h | a = 90 km | 5 h | b = 240 km - 90 km - 45 km |
| 21 km | 1 h | b = 105 km | 5 h | b = 105 km ; 105 : 5 = 21 |

Lösung: Das Schifft legt 21 Kilometer in jeder Stunde zurück.

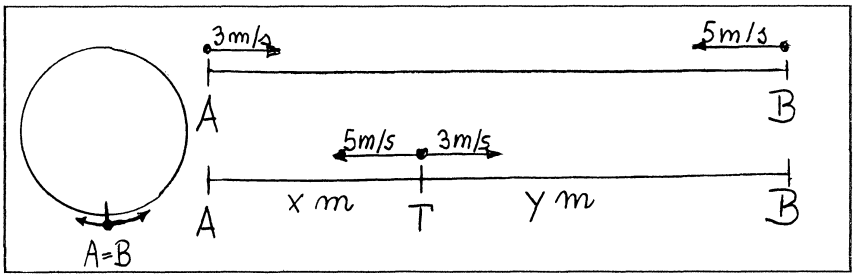
Zu ***Aufgabe 6)*** findet man in der Aufgabensammlung eine Musterlösung, wo auch eine zugehörige Skizze festgehalten ist.

a) Der Zug erreicht um 8.03 Uhr die Blockstelle.

b) Der Bahnhof ist 15,6 km von der Blockstelle entfernt.

Bei ***Aufgabe 7)*** ist es günstig, zuerst die 2. Frage zu beantworten. Anstelle des "Rundkurses" kann man hier auch eine Fahrstrecke $\overline{AB}$ betrachten, auf der Fritz und Struppi einander entgegen laufen.
Hier ist es günstig, hervorzuheben, daß die zurückgelegten Strecken im gleichen Verhältnis stehen wie die zugehörigen Geschwindigkeiten. Laut Aufgabenstellung gilt daher $x : y = 3 : 5$ und $x + y = 400$ m , woraus dann $x = 150$ m und $y = 250$ m folgt. Folglich ist Fritz 150 Meter gelaufen.

Da Fritz pro Sekunde 3 m zurücklegt, ist er 50 Sekunden gelaufen.
Also begegnen sich die beiden nach 50 Sekunden.




***Aufgabe 8)*** fällt erfahrungsgemäß vielen Schülern recht schwer, sie kann als "Differenzierungsaufgabe" eingesetzt werden.
Eine Skizze ist hier entbehrlich. Die entscheidende Lösungsidee besteht in folgender "Umstrukturierung" : Die Situation wäre die gleiche, wenn der 2. Zug stehen würde und der 1. Zug eine Geschwindigkeit von (45 + 36) km je Stunde, also von 81 km je Stunde hätte.
Nun ist nur noch die vom 1. Zug in 6 Sekunden zurückgelegte Strecke zu berechnen, wobei eine Umrechnung in Meter und Sekunden nützlich ist.
Da in 3600 Sekunden 81000 Meter zurückgelegt werden, werden wegen
81000 : 600 = 135 in 6 Sekunden 135 Meter zurückgelegt.
Also war der 1. Zug 135 Meter lang.

***Aufgabe 9)***

Hier sollte der AG-Leiter nicht sofort auf das Anfertigen einer Skizze drängen, sondern abwarten, welche Schüler die Teilaufgaben 9a) und 9b) auch ohne dieses Hilfsmittel lösen können.

Aus der gebenen Fahrzeit von 3 Stunden und der gegebenen Fahrstrecke von 135 km läßt sich die gesuchte Geschwindigkeit des LKW sofort berechnen.

Aus der so berechneten Geschwindigkeit von 45 km/h und der Fahrzeit von 40 min läßt sich ebenfalls die Streckenlänge von $\overline{AP}$ = 30 km unmittelbar berechnen.

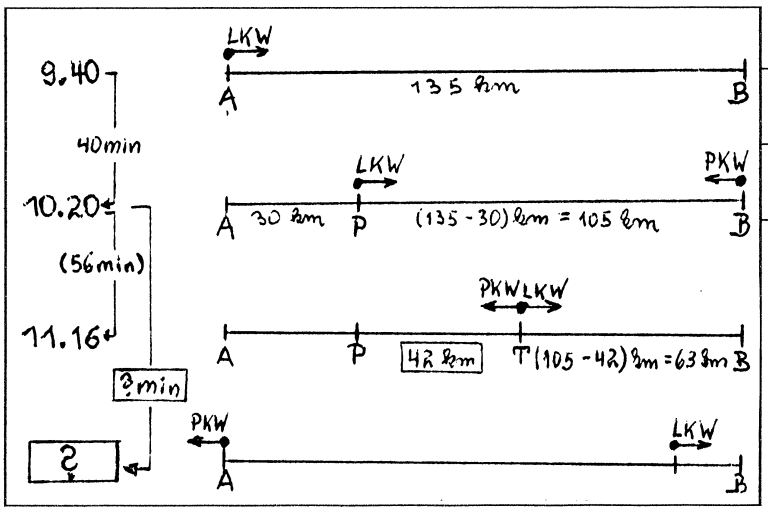
Teilaufgabe 9a) ist also durch reines *Vorwärtsarbeiten* auch ohne Skizze lösbar.

Wer erkennt, daß der LKW von A nach T mit 1,5 h genau die Hälfte der Gesamtfahrzeit von 3 h benötigte, kann sofort schlußfolgern, daß T der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist, daß daher auch der PKW für die Strecke $\overline{AT}$ genau die gleiche Fahrzeit wie für die Strecke $\overline{BT}$ benötigt, nämlich 50 min .

Hieraus läßt sich die Ankunftszeit des PKW in Adorf sofort berechnen, es ist dies 12.00 Uhr.

Es fällt auf, daß man zum Lösen der Teilaufgabe 9b) die gegebene Entfernung $\overline{AB}$ = 135 km gar nicht benötigt. Auf diesen kurzen und eleganten Lösungsweg wird man die Schüler auf jeden Fall nachträglich hinweisen, wenn er von keinem Schüler gefunden wurde. Durch *Rückwärtsarbeiten* stößt man dabei auf die Fahrzeit des PKW als hinreichende Hilfsgröße.

Beim Lösen der Teilaufgabe 9c) dürfte der Einsatz einer *Skizze* und das Verwenden von *Tabellen* nützlich sein, wobei man keineswegs darauf bestehen muß, daß für jede der angegebenen Situationen eine eigene Skizze angefertigt wird. Leistungsstarke Schüler kommen wahrscheinlich mit einer einzigen Skizze auch schon ans Ziel. Die nachfolgend angegebenen Skizzen sind vorwiegend als Hilfe für die leistungsschwächeren Schüler gedacht.




| | Zeit (in min) | Weg (in km |
|---|---|---|
| LKW auf $\overline{AB}$ | 180 | 135 |
| LKW auf $\overline{PT}$ | 56 | [42] |
| PKW auf $\overline{BT}$ | 56 | 63 |
| PKW auf $\overline{BA}$ | [120] | 135 |

NR:

$\frac{135}{180} = \frac{3}{4}$

$\frac{56}{63} = \frac{8}{9}$

$\frac{3}{4} \cdot 135 = 42$

$\frac{8}{9} \cdot 135 = 120$

Da der PKW um 10.20 Uhr von B abfährt und für die Strecke $\overline{BA}$ 120 min benötigt,, wäre er um 12.20 Uhr in A angekommen.

Abschließend kann man den Schülern die Frage stellen: Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen und Größen noch berechnen?

## 3.11. Mengendiagramme helfen beim Lösen von Aufgaben

***Ziele:***

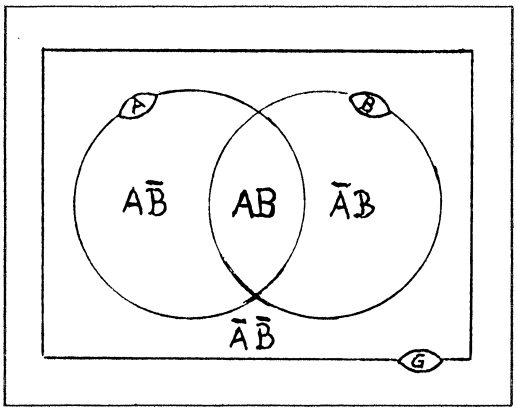
- Mengendiagramme zum Abspeichern der Aufgabenstellung und als Hilfe bei der Lösungsfindung.
- Einführen günstiger *Bezeichnungen.*
- *Vorwärtsarbeiten* und *Rückwärtsarbeiten.*

Es gibt folgenden speziellen Aufgabentyp:
In einer vorgegebenen Menge sind Eigenschaften definiert, die die Elemente besitzen oder nicht besitzen können. Aus gegebenen Anzahlen von Elementen gewisser Teilmengen ist die Anzahl der Elemente anderer Teilmengen zu ermitteln.
Alle Aufgaben dieses Abschnitts gehören zu diesem Aufgabentyp, bei dem Mengendiagramme sehr gut zur Veranschaulichung geeignet sind.

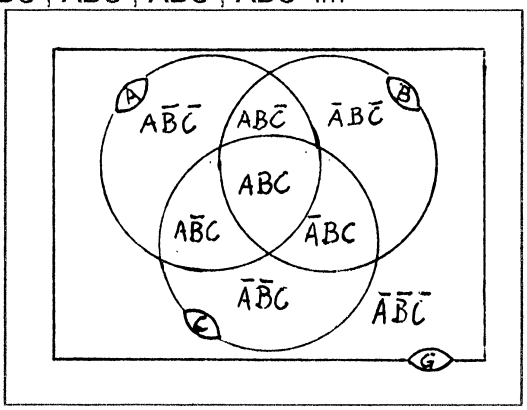
Wir führen folgende *Bezeichnungen* ein:

G: Anzahl der Elemente der "Gesamtmenge";
A Anzahl der Elemente, die die Eigenschaft a besitzen.
AB Anzahl der Elemente, die die Eigenschaft a und die Eigenschaft b besitzen;
$A\bar{B}$: Anzahl der Elemente, die die Eigenschaft a besitzen und die Eigenschaft b nicht besitzen;
$\bar{A}\bar{B}$: Anzahl der Elemente, die die Eignschaft a nicht besitzen und die Eigenschaft b nicht besitzen.

Kommen mehr als 2 Eigenschaften vor, dann wird analog bezeichnet.
Kommen nur 2 Eigenschaften a , b vor, dann kann man über folgende 9 Anzahlen Aussagen machen: G , A , B , AB , $A\bar{B}$ , $\bar{A}B$ , $\bar{A}\bar{B}$ , $\bar{A} = G - A$ , $\bar{B} = G - B$ (und $\bar{G} = 0$ ). Man kann eine Vereinbarung treffen, die es gestattet, die ersten 7 Anzahlen übersichtlich in einem Mengendiagramm abzuspeichern (vgl. nebenstehende Abbildung).




Bei 3 Eigenschaften kann man dieser Vereinbarung folgend zwar noch die 12 Anzahlen G , A , B , C , ABC , $AB\bar{C}$ , $A\bar{B}C$ , $\bar{A}BC$ , $A\bar{B}\bar{C}$ , $\bar{A}B\bar{C}$ , $\bar{A}\bar{B}C$ , $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ im Mengendiagramm abspeichern (vgl. nebenstehende Abbildung), Angaben über die Anzahlen AB , AC , BC , $A\bar{B}$ , ... , $\bar{B}\bar{C}$ muß man dagegen gesondert festhalten.

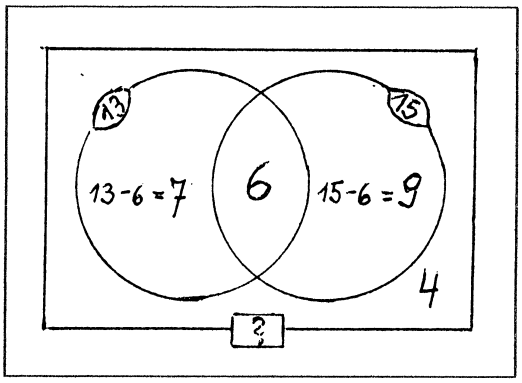



Derartige Diagramme lassen sich zum Abspeichern der Aufgabenstellung und als Hilfsmittel bei der Lösungsfindung verwenden, eine exakte Lösungsdarstellung können sie jedoch nicht ersetzen. Die Schüler müssen lernen, eine dem Mengendiagramm entnommene Beziehung (z.B. $A - AB = A\bar{B}$ ) auch in Worten zu formulieren und zu begründen.

***Aufgabe 1)***

Ges.: G .

Geg.: $\overline{O} = 13$ ;
$\overline{H} = 15$ ;
$O\overline{H} = 6$ ;
$\overline{O}\,\overline{H} = 4$ .




$G = OH + O\overline{H} + \overline{O}H + \overline{O}\,\overline{H}$ ;

$G = 6 + 7 + 9 + 4$ ;

$\underline{G = 26}$ : Anzahl der Schüler der Klasse .

***Aufgabe 2)***

- Günstige Veranschaulichung?

Ich verwende ein Mengendiagramm, in dem ich das Gegebene und das Gesuchte festhalte. Ausserdem schreibe ich das Gegebene und das Gesuchte noch heraus.

- Günstige Bezeichnungen?

Mit F bezeichne ich die Anzahl der Schüler, die Fußball spielen, usw.

Ges.: Gesamtanzahl G der Schüler

Geg.: $F = 12$ , $S = 18$ , $C = 14$ ,
$FSC = 2$ , $\overline{F}\overline{S}\overline{C} = 2$ ,
$FS = 8$ , $FC = 5$ , $SC = 7$ .

- Woraus ließe sich das Gesuchte unmittelbar berechnen? Begründung!

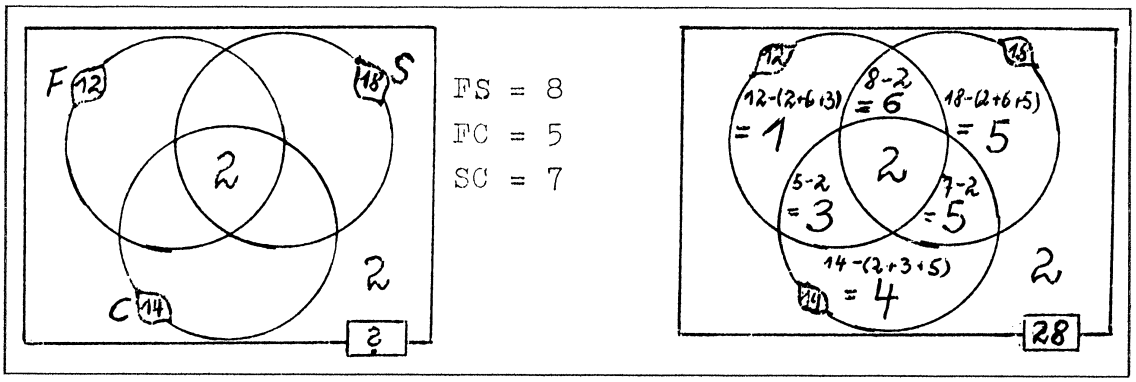
Da
$G = FSC + FS\overline{C} + F\overline{S}C + \overline{F}SC + F\overline{S}\,\overline{C} + \overline{F}S\overline{C} + \overline{F}\overline{S}C + \overline{F}\overline{S}\overline{C}$
gilt, benötige ich noch die Anzahlen $FS\overline{C}$ , $F\overline{S}C$ , ... , $\overline{F}\overline{S}C$ .

- Was läßt sich aus dem Gegebenen unmittelbar berechnen? Begründung!

$FS\overline{C} = FS - FSC = 8 - 2 = 6$ ;
$F\overline{S}C = FC - FSC = 5 - 2 = 3$ ;
$\overline{F}SC = SC - FSC = 7 - 2 = 5$ .
Ich trage diese Zahlen in das Diagramm ein.

- Was läßt sich nun berechnen? Begründung!

$F\overline{S}\,\overline{C} = F - (FSC + FS\overline{C} + F\overline{S}C) = 12 - (2+6+3) = 1$ ;
analog $\overline{F}S\overline{C} = 5$ und $\overline{F}\overline{S}C = 4$ .
Ich trage diese Zahlen in das Diagramm ein.
Damit bin ich am Ziel. Es gilt
$G = 2+6+5+3+1+5+4+2 = \underline{28}$ (Anzahl der Schüler)




Das linke Mengendiagramm hält die Aufgabenstellung, das rechte Mengendiagramm den Lösungsplan fest.

***Aufgabe 3)*** sollten die Schüler etappenweise in selbständiger Arbeit lösen und dabei zeigen, ob sie das in Aufgabe 2) besprochene Verfahren verstanden haben.
Vorweg ist abzusichern, daß alle Schüler die Begriffe *"mindestens"* , *"genau"* und *"höchstens"* richtig verstehen.
Zunächst sollte jeder Schüler die 8 gegebenen Bedingungen bei Wahl günstiger Bezeichnungen in Kurzform festhalten. Dabei ist - analog wie bei Aufgabe 2) - folgende Form anzustreben:

Geg.: (1 ) $G = 28$ ; (2) $L = 8$ ; (3) $F = 15$ ; (4) $E = 20$ ;
(5) $LE = 6$ ; (6) $FE = 13$ ; (7) $LF\overline{E} = 0$ ; (8) $LFE = 5$ .

Dann sollen die Schüler mit Hilfe eines Mengendiagramms nach der Lösung suchen.
Nur die in (8) gegebene Anzahl 5 läßt sich in ein Feld des Diagramms eintragen.
Die in (1), (2), (3), (4) gegebenen Anzahlen lassen sich in "Berandungen" eintragen.
Die in (5), (6) und (7) gegebenen Anzahlen lassen sich nicht eintragen, sie ermöglichen nur das Berechnen weitere Anzahlen, die sich dann in die Felder des Diagramms eintragen lassen.
So folgt aus (8) $LFE = 5$ und (6) $FE = 13$ daß $\overline{L}FE = FE - LFE = 13 - 5 = 8$ gilt, und diese Zahl wird in das betreffende Feldd es Diagramms eingetragen. Dabei ist es sehr wichtig, daß die Schüler die in schriftlicher Kurzform festgehaltenen Aussagen stets ausführlich in Worten wiedergeben und inhaltliche Schlußfolgerungen ziehen.
Abschließend wird man mit den Schülern die in der Aufgabensammlung auf Seite 32 angegebene *Musterlösung* durcharbeiten und an der Wandtafel zeigen lassen, in welcher Reihenfolge die Felder des Diagramms gefüllt werden, wobei jeder dieser Schritte zu begründen ist.
Diese Musterlösung enthält nur die Antwort zu Aufgabe 3a). Die Lösungen zu 3b) bis 3f) müssen die Schüler selbst herleiten.

a) 4 Schüler lernen keine der drei Fremdsprachen.

b) 24 Schüler lernen mindestens eine der drei Fremdsprachen.

c) 10 Schüler lernen genau eine der drei Fremdsprachen.

d) 14 Schüler lernen mindestens zwei Fremdsprachen.

e) 9 Schüler lernen genau zwei dieser Fremdsprachen.

f) 19 Schüler lernen höchstens zwei dieser Fremdsprachen.

***Aufgabe 5)*** kann auch als Hausaufgabe gestellt werden. Es geht hier darum, daß die Schüler selbst Aufgaben formulieren lernen und daß sie geeignete Sachverhalte finden, durch die sich derartige Mengendiagramme interpretieren lassen.
Unter den *"Vermischten Aufgaben"* lassen sich die Aufgaben 32), 37) und 47) mit Hilfe von Mengendiagrammen lösen.

## 3.12. In einem Zug

***Ziele:***
- Entdecken des *Satzes von Euler* über das Durchlaufen von Graphen.
- Begriffe "Graph", "Kante", "Knoten", "Ordnung eines Knotens" .
- *Rückführungsprinzip.*
- Einige historische Fakten (EULER).

Beim selbständigen Lösen der ***Aufgabe 1)*** werden einige Schüler gewiß erkennen, daß Aufgabe 1a) lösbar ist, wenn man den Weg bei A oder B beginnt, wobei dann der Weg in B bzw. A endet, daß Aufgabe 1b) stets lösbar ist, unabhängig davon, bei welchem Knoten man den Weg beginnt, und daß Aufgabe 1c) nicht lösbar ist.

- Warum findet man bei Aufgabe 1a) keinen solchen Weg, wenn man im Knoten E beginnt?
  - ° Versuche, im Knoten E beginnend, den Knoten A voll zu durchlaufen (so daß alle von ihm ausgehenden Kanten durchlaufen werden)! Warum gelingt das nicht?

Nach dem Einführen des Begriffs *"Ordnung eines Knotens"* als Anzahl der von ihm ausgehenden Kanten tragen die Schüler in die Graphen der Aufgabensammlung die Ordnungen der Knoten ein. Dann wird die Erkenntnis formuliert, daß ein Knoten ungerader Ordnung nur Anfangs- oder Endknoten, niemals aber Durchgangsknoten eines solchen Weges sein kann, weil man in einem solchen Knoten stets "steckenbleibt". Hieraus folgt der Satz:
"Wenn ein Graph mehr als 2 Knoten ungerader Ordnung besitzt, dann läßt er sich nicht in einem Zug durchlaufen."
Dann wird man den Schülern folgenden (nicht so einfach zu beweisenden) Satz mitteilen:
"Wenn ein Graph nur Knoten gerader Ordnung oder genau zwei Knoten ungerader Ordnung besitzt, dann läßt er sich in einem Zug durchlaufen."

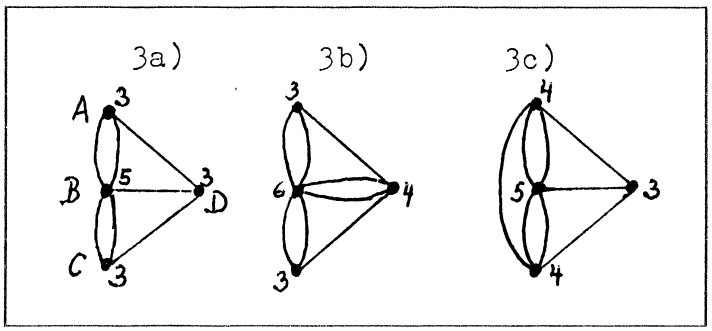
Bei ***Aufgabe 2)*** lasse man die Ordnungen der Knoten in die Graphen eintragen und dann mit Hilfe der angegebenen Sätze zunächst entscheiden, ob diese Graphen in einem Zug durchlaufen werden können oder nicht. Ist dies der Fall, dann ist ein entsprechender Weg anzugeben. Dies führt zu folgenden Resultaten:

a), d), g), h): 4 ungerade Knoten; keine Lösung möglich.

b), c), e), f): lösbar; 2 ungerade Knoten, die als Anfangs- bzw. Endpunkt des Weges gewählt werden müssen.

Ferner kann man die Vermutung gewinnen lassen, daß die Anzahl der Knoten ungerader Ordnung stets gerade sein muß, daß es speziell also keinen Graphen mit genau einem Knoten ungerader Ordnung geben kann.
Schließlich fordere man die Schüler auf, einen Graphen zu zeichnen, der nur Knoten geraden Grades enthält. Dabei sollen sie erkennen, daß - im Unterschied zu den bisher betrachteten Beispielen - Anfangs- und Endpunkt des geschlossenen Weges stets zusammenfallen und daß jeder Knoten eines solchen Eulerschen Graphen als gemeinsamer Anfangs- und Endpunkt eines geschlossenen Weges gewählt werden kann.

Im Zusammenhang mit ***Aufgabe 3)*** wird man den Schülern mitteilen, daß EULER (1707 -1783) auf allen damals existierenden mathematischen Disziplinen wichtige Entdeckungen machte. Er wurde in der Schweiz geboren, lebte jedoch lange Jahre in Paris, Berlin und vor allem in Petersburg.
In Königsberg soll er einmal gefragt worden sein, ob man einen Spaziergang durch die Stadt machen könne, auf dem jede der 7 Brücken über den Fluß Pregel genau einmal überschritten wird. Das in Aufgabe 3a) angegebene Problem heißt daher "Königsberger Brückenproblem".
Die Lösung dieses Problems veranlaßte Euler zu weitergehenden Untersuchungen, die als Beginn der mathematischen Disziplin Topologie und deren Teildisziplin Graphentheorie angesehen werden können.
Es ist wichtig, daß den Schülern bewußt wird, daß die Aufgabe 3) durch *Rückführung* auf die eben gelöste graphentheoretische Aufgabe gelöst wird. Man wird auf den beiden Ufern und den beiden Inseln die "Wirtshäuser" A , B , C , D eintragen und dann jeweils den zugehörigen Graphen zeichnen lassen.




Da der zu Aufgabe 3a) gehörende Graph 4 ungerade Knoten besitzt, ist ein derartiger Spaziergang nicht möglich. Bei den Aufgaben 3b) und 3c) wurde durch die Hinzunahme einer weiteren Kante erreicht, daß nunmehr 2 ungerade Knoten auftreten, so daß ein derartiger Spaziergang möglich wird. Bei Aufgabe 3b) sind A und C der Anfangs- bzw. Endknoten des Weges, bei Aufgabe 3c) sind dies die Knoten B und D .

In der *Phase der Auswertung* wird man auf den unterschiedlich hohen Abstraktionsgrad verschiedener geometrischer Disziplinen eingehen.
Bei Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen sind Original und Bild "deckungsgleich".
Beim "Vergrößern" (oder "Verkleinern") erhält man ein zum Original "ähnliches" Bild, hier bleibt die Länge einer Strecke nicht mehr erhalten. So liefert etwa eine Landkarte ein weitgehend "ähnliches" Abbild des dargestellten Gebiets.
Wesentlich abstrakter sind die üblichen Übersichtskarten der Straßenbahnlinien einer Stadt, denen man weder Entfernungen, noch die Krümmung der Straßen oder die genaue gegenseitige Lage der Stationen entnehmen kann. Hier handelt es sich lediglich um ein *topologisches Abbild* in Form eines Graphen mit Stationen als Knoten und Verbindungslinien als Kanten.

## 3.13 Wir suchen Vermutungen

***Ziele:***
- *Rückführungsprinzip.*
- Ermitteln von Gliedern gewisser Zahlenfolgen durch *systematisches Probieren.*
- Finden des Bildungsgesetzes von Zahlenfolgen durch *unvollständige Induktion;* dabei Verwenden von *Tabellen.*
- Verwenden von *Variablen* beim Festhalten vermuteter Gesetzmäßigkeiten durch *Gleichungen.*
- Einige historische Fakten (PYTHAGOREER, FIBONACCI, PASCAL).

***Aufgabe 1)*** lasse man selbständig lösen und beobachte, welche Schüler am schnellsten ans Ziel gelangen. Zunächst halte man nur die "Angebote" und "Gegenangebote" für die jeweils gesuchten zwei Zahlen fest; abschließend lasse man begründen, wie man jeweils die nächst folgende Zahl aus der (oder den) vorangegangenen Zahl (en) gewinnen kann. Als Hilfe kann man angeben, daß dies stets nur mit Hilfe der Grundrechenoperationen geschehen soll.

Bei Aufgabe 1a) führen die Operationen -4 , +3 ; -4 , +3 ; -4 , +3 ; -4 , +3 zu den gesuchten Zahlen 9 , 12 .

Bei Aufgabe 1b) führen die Operationen ·3 , -2 ; ·3 , -2 ; ·3 , -2 ; ·3 , -2 zu den gesuchten Zahlen 84 , 82 .

Bei Aufgabe 1c) führen die Operationen :3 , -2 ; :3 , -2 ; :3 , -2 ; :3 , -2 zu einer mit den gesuchten Zahlen 2 , 0 abbrechenden Folge.

In Aufgabe 1d) sind die ersten Glieder einer *rekursiven Folge* gegeben, bei der man (mit dem 3. Glied beginnend) jedes Glied als Summe der beiden Vorgänger erhält. Auf diese Folge stieß der um 1200 lebende italienische Mathematiker FIBONACCI beim Lösen der folgenden klassischen "Kaninchenaufgabe": Es ist die Anzahl der Paare geschlechtsreifer Kaninchen zu bestimmen, die aus einem Paar im Laufe der Zeit hervorgehen, wenn man weiß, daß jedes solche Kaninchenpaar im Monat ein neues Paar wirft und die Neugeborenen im Laufe eines Monats geschlechtsreif werden.
Zu Beginn ist also 1 Paar vorhanden, d.h. es gilt $u_1 = 1$ . Nach einem Monat ist ein neugeborenes Paar dazugekommen, aber die Anzahl der geschlechtsreifen Paare ist nach wie vor $u_2 = 1$ . Nach zwei Monaten ist das junge Kaninchenpaar geschlechtsreif, und die Gesamtzahl der fortpflanzungsfähigen Paare hat sich auf 2 erhöht, d.h. $u_3 = 2$ . Für den nächsten Monat gilt dann $u_4 = u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3$ usw.
Wegen $8 + 13 = 21$ und $13 + 21 = 34$ lauten die gesuchten Zahlen 21 , 34 .

Bei ***Aufgabe 2)*** sollen die Schüler zunächst wieder versuchen, selbständig die Leerstellen zu füllen. Man beobachte, welche Schüler bereits in der Lage sind, auch jeweils den allgemeinen Ausdruck für $a_n$ anzugeben.
Anschließend wird man das Festhalten von "gerade Zahl", "ungerade Zahl", "durch 5 teilbare Zahl", "Quadratzahl", "Potenz der Zahl 2" usw. mit Hilfe von *Variablen* ausführlich wiederholen und üben. Derartige Übungen sollte man so lange jeweils am Anfang eines Zirkels fortsetzen, bis alle Schüler diesbezüglich hinreichende Fertigkeiten besitzen.

***Aufgabe 3)***

Um das "systematische Arbeiten" zu üben und zu überprüfen, stelle man zunächst die Aufgabe, die Anzahl der Paare (a;b) zu ermitteln, die die Ungleichung $a + b < 5$ erfüllen, und dabei festzustellen, welche dieser Paare das größte Produkt $a \cdot b$ liefern und wie groß dieses Produkt ist.

Der lexikographisch geordneten Erfüllungsmenge

(0;0), (0;1),..., (0;4), (1;0), (1;1),..., (1;3), (2;0),...,(2;2), (3;0), (3;1), (4;0)

ist die Anzahl $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ der Paare leicht zu entnehmen, und es gibt offensichtlich genau das Paar (2;2) mit dem maximalen Produkt $4 = 2^2$.

Die Übertragung dieser Überlegungen auf die Ungleichungen $a + b < 7$ und $a + b < 9$ dürfte nicht schwerfallen. Die erzielten Resultate werden wie unten angegeben in den ersten drei Zeilen einer *Tabelle* festgehalten.

Analoges Vorgehen bei der Ungleichung $a + b < 6$ zeigt, daß es hier die beiden Paare (2;3) und (3;2) mit dem maximalen Produkt $6 = 2 \cdot 3$ gibt. Das Füllen der nächsten zwei Zeilen der unten angegebenen zugehörigen Tabelle dürfte nicht schwerfallen.

| $a + b <$ | $a \cdot b \leq$ | $a + b <$ | $a \cdot b \leq$ |
|---|---|---|---|
| $2 \cdot 2 + 1 = 5$ | $4 = 2^2$ | $2 \cdot 3 = 6$ | $6 = 2 \cdot 3$ |
| $2 \cdot 3 + 1 = 7$ | $9 = 3^2$ | $2 \cdot 4 = 8$ | $12 = 3 \cdot 4$ |
| $2 \cdot 4 + 1 = 9$ | $16 = 4^2$ | $2 \cdot 5 = 10$ | $20 = 4 \cdot 5$ |
| ..... ..... | .... ..... | ..... ..... | ..... ..... |
| $2 \cdot n + 1 = u$ | $n^2 = ?$ | $2 \cdot n = g$ | $(n - 1) \cdot n = ?$ |
| $n = \frac{u-1}{2}$ | $n^2 = (\frac{u-1}{2})^2$ | $n = \frac{g}{2}$ | $(n - 1) \cdot n = (\frac{g}{2} - 1) \cdot \frac{g}{2}$ |

Es ist leicht zu vermuten, daß in der 1. Tabelle eine Folge von Quadratzahlen und in der 2. Tabelle eine Folge von Produkten aufeinanderfolgender Zahlen vorliegt.

Wesentlich schwieriger ist das Entdecken eines allgemeinen Bildungsgesetzes. Dies sollte zweckmäßigerweise in Form eines Unterichtsgesprächs geschehen.

Bei der 1. Tabelle muß man versuchen, die Basis der Quadratzahlen $n^2$ mit Hilfe der Variablen u darzustellen.

Bei der 2. Tabelle ist es wichtig, zu erkennen, daß der 2. Faktor n lautet und der 1. Faktor daher $(n - 1)$.

Folgende allgemeine Impulse können hier helfen:

- Ich formuliere die gefundene Vermutung unter Verwendung von Variablen (als Formel).
- Ich überzeuge mich, daß diese Vermutung (Formel) bei den bereits untersuchten Fällen tatsächlich zutrifft.
- Ich berechne mit Hilfe dieser Vermutung (Formel) das Resultat für einen noch nicht untersuchten Fall und untersuche, ob das so "vorhergesagte" Resultat tatsächlich stimmt.

In der 1. Tabelle könnte eine solche "Vorhersage" etwa lauten:

Wenn $a + b < 17$, dann $a \cdot b \leq (\frac{17-1}{2})^2 = 8^2 = 64$.

In der 2. Tabelle könnte eine solche "Vorhersage" etwa lauten:

Wenn $a + b < 18$, dann $a \cdot b \leq (\frac{18}{2} - 1) \cdot \frac{18}{2} = 8 \cdot 9 = 72$.

Schüler der Klasse 5 müssen an den Umgang mit solchen Formeln erst gewöhnt werden, indem sie in zahlreichen Fällen zu vorgegebenem u bzw. g die zugehörigen Terme im Kopf berechnen.

***Aufgabe 4)***
Zunächst sollen die Schüler die "geometrische Definition" der figurierten Zahlen erfassen und überprüfen, ob die bereits angegebenen Zahlen tatsächlich dieser Definition entsprechen. Man kann sie auch auffordern, das erste noch nicht angegebene Glied der Folge mit Hilfe dieser Definition zu ermitteln.
Bei der Suche nach den Bildungsgesetzen werden die zugehörigen Differenzenfolgen mit verwendet. Bei den Dreieckszahlen entdeckt man die Formel
$d_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, wobei nochmals das "Vorgehen von Gauß" wiederholt wird.

Bei den Viereckszahlen ist $v_n = n^2$ sofort zu erkennen. Beim Betrachten der Differenzenfolge kommt man zur Vermutung $1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot n + 1) = (n+1)^2$.
Daß diese Summen ungerader Zahlen stets eine Quadratzahl ergeben, ist auch der geometrischen Veranschaulichung der Viereckszahlen zu entnehmen.
Dieser Veranschaulichung werden auch nebenstehende Gleichungen entnommen.
Die aus der geometrischen Veranschaulichung auf diese Weise abgeleitete Formel wurde durch Anwenden des Distributivgesetzes in Aufgabe 4d) von "3. Gleichungen" auf rechnerischem Wege gewonnen. Auf diesen Zusammenhang sind die Schüler hinzuweisen.

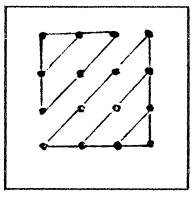
$$1^2 + 3 = 2^2$$
$$2^2 + 5 = 3^2$$
$$3^2 + 7 = 4^2$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$n^2 + 2 \cdot n + 1 =: (n+1)^2$$

Um die gesuchte Vermutung über den Zusammenhang zwischen Dreiecks-, Vierecks- und Fünfeckszahlen formulieren zu können, müssen die Schüler die Bedeutung des Symbols $d_{n-1}$ verstehen. Folgende Übersicht kann dieses Verständnis erleichtern:

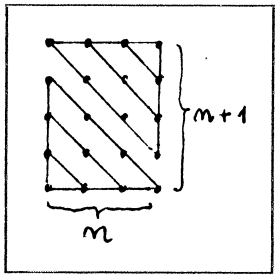
$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & , & 3 & , & 6 & , & 10 & , \ldots , & d_{n-1} & , & d_n & , & \ldots \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
1 & , & 4 & , & 9 & , & 16, & 25 & , \ldots , & v_n & , & v_{n+1} & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & , \ldots , & \downarrow & , & \downarrow & \\
1 & , & 5 & , & 12, & & 22, & 35 & , \ldots , & f_n & , & f_{n+1} &
\end{array}$$

Es gilt $1 + 4 = 5$, $3 + 9 = 12$, $6 + 16 = 22$, ... , vermutlich also $f_n = d_{n-1} + v_n$.
Wegen $d_{n-1} = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$ und $v_n = n^2$ folgt hieraus $f_n = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n^2 = \ldots = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$.
Man beachte, daß das Aufstellen der Formel für $d_{n-1}$ aus der Formel für $d_n$ Schülern der Klasse 5 keineswegs leicht fällt und daher ausführlich besprochen werden muß! Dies trifft erst recht auf die durchgeführte Termumformung zu, auf die man auch verzichten kann. Wichtig ist allein das Üben im Umgang mit solchen Formeln, das Berechnen von $f_n$ zu konkret vorgegebenem $n$.

Bei ***Aufgabe 5)*** wird man die gefundene Vermutung $v_n = d_{n-1} + d_n$ etwa für den konkreten Fall $v_4 = d_3 + d_4$, also $4^2 = 6 + 10$ geometrisch veranschaulichen lassen und darauf hinweisen, daß eine derartige Veranschaulichung für beliebiges $n$ möglich ist, was einem exakten Beweis schon sehr nahe kommt.



Auch bei ***Aufgabe 6)*** ist eine derartige Veranschaulichung möglich. Der Abbildung ist zu entnehmen:




Allgemein: $2 \cdot d_n = n \cdot (n + 1)$ ;

für $n = 4$ $2 \cdot d_4 = 4 \cdot 5$ ,

also $2 \cdot 10 = 20$ .

Zusätzlich kann man noch folgenden Beweis führen:

Aus der Definition von $d_n$ folgt $d_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ .

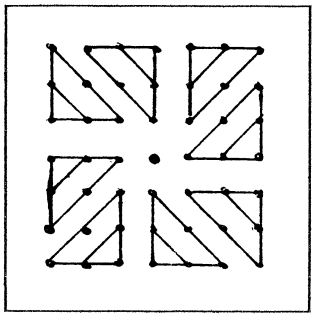
Hieraus folgt (Gaußsches Vorgehen!) $d_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ .

Hieraus folgt dann durch Umformung $\underline{2 \cdot d_n = n \cdot (n + 1)}$ .

Auf diese Weise kann man die Schüler erstmals auf den Unterschied zwischen einer Veranschaulichung und einem exakten Beweis hinweisen und dabei ankündigen, daß Beweise im Unterricht der Klasse 6 erstmals behandelt werden.

***Aufgabe 7)*** dient vorwiegend dem Üben im Umgang mit Formeln. Zur Veranschaulichung eignet sich besonders gut der Fall $n = 3$ , d.h. es ist $v_3 = 8 \cdot d_3 + 1$ durch Verwenden der geometrischen Deutung figurierter Zahlen nachzuweisen.

Als "Differenzierungsaufgabe" kann man verlangen, diese Gesetzmäßigkeit mit Hilfe der Formeln für $d_n$ und $v_n$ zu beweisen.



Abschließend wird man den Schülern mitteilen, daß Untersuchungen zu figurierten Zahlen bereits von den PYTHAGOREERN ( etwa 500 Jahre v.d.Ztr.) durchgeführt wurden.

PYTHAGORAS war der Leiter eines religiösen Geheimbundes im antiken Griechenland, der die Beschäftigung mit Mathematik in den Mittelpunkt seiner Tätigkeit stellte. In einem altgriechischen "Mathematikerverzeichnis" wird festgestellt: Nach THALES verwandelte PYTHAGORAS die Beschäftigung mit Mathematik in eine wirkliche Wissenschaft, indem er die Grundlagen dieser Wissenschaft von höherem Standpunkt aus betrachtete und ihre Theorien immaterieller und intellektueller erforschte. Vor den alten Griechen hatten sich bereits die Ägypter und die Babylonier mit mathematischen Problemen beschäftigt, und es ist sehr wahrscheinlich, daß sich PYTHAGORAS längere Zeit in Ägypten, vielleicht auch in Babylonien aufgehalten hat und daß er von dort entscheidende Anregungen heimbrachte.

In ***Aufgabe 8)*** gelangt man zur Vermutung

$$\underline{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2}\right)^2} .$$

Beim Ausfüllen der Tabelle in ***Aufgabe 9)*** stellen die Schüler zunächst fest, daß diese Tabelle als "Multiplikationstabelle" verwendet werden kann. Beim Ermitteln der Summen in den "Streifen" wird man darauf achten, daß "geschickt" vorgegangen wird: Man erkennt, daß die Summe im n-ten Streifen stets $n^3$ beträgt.

$$\begin{aligned}
1 &= 1^3 \\
2 \cdot 2 + 4 &= 8 = 2^3 \\
2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 9 &= 27 = 3^3 \\
2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 12 + 16 &= 64 = 4^3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= n^3
\end{aligned}$$

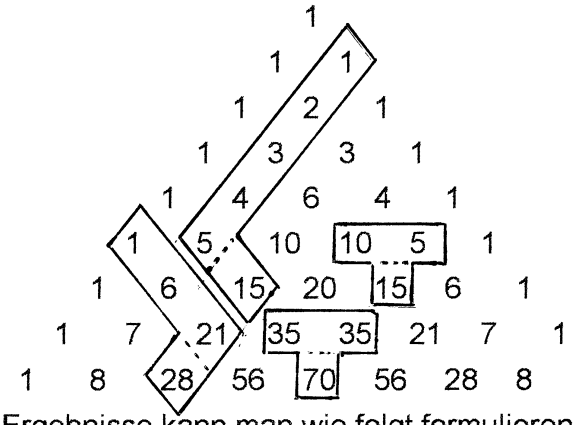
Da jedes der "Quadrate" sich aus "Streifen" aufbauen läßt, erhält man die "Quadratsumme" als Summe von "Streifensummen":

$$1^3 = 1 = 1^2 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

Man vergleiche das erhaltene Resultat mit dem der Aufgabe 8) !

***Aufgabe 10)***

Nach dem Ausfüllen der Leerfelder kann man das entdeckte Bildungsgesetz und weitere entdeckte Gesetzmäßigkeiten im PASCALschen Dreieck anhand von Spezialfällen festhalten.




Zeilensumme s :

2
$4 = 2^2$
$8 = 2^3$
$16 = 2^4$
$32 = 2^5$
$64 = 2^6$

$s = 2^n$

Die Ergebnisse kann man wie folgt formulieren:

- Jede Zahl ist gleich der Summe der beiden unmittelbar darüberstehenden Zahlen.
- Die Summe der Zahlen der n-ten Zeile beträgt stets $2^n$.
- Die Summe aufeinanderfolgender Zahlen einer Diagonalreihe ist stets diejenige Zahl des Pascalschen Dreiecks, die (rechts bzw. links) unterhalb des letzten Summanden steht.

Die Schüler sollen erkennen, daß zwar in der 3. Schrägreihe die Dreieckszahlen, in der 4. bzw. 5. Schrägreihe aber nicht die Vierecks- oder Fünfeckszahlen stehen.
Durch Vergleich mit der Lösung von Aufgabe 4d,e,f) aus "8. Gleichungen" sollen die Schüler vermuten, daß die Zahlen in der (n+1)-ten Zeile des PASCALschen Zahlendreiecks die Koeffizienten von $(x + 1)^n = x^n + n \cdot x^{n+1} + \ldots + n \cdot x + 1$ sind.
Durch Vergleich mit der Lösung der Aufgabe 13) aus "4. Systematisch arbeiten" ist ein Zusammenhang zu den dort ermittelten Anzahlen "kürzester Wege" herzustellen.
Der Franzose PASCAL lebte von 1623 - 1662 . Er konstruierte 1642 eine mechanische Rechenmaschine und ist Mitbegründer der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechung.

***Aufgabe 11)***

Die maximale Anzahl von $a_3 = 7$ Teilen, in die 3 Geraden eine Ebene zerlegen können, läßt sich durch Abzählen noch leicht ermitteln. Eine derartige Ermittlung von $a_4 = 11$ bereitet bereits mehr Mühe, für das Ermitteln von $a_5$ , $a_6$ , $a_7$ führt Abzählen nicht mehr ans Ziel.

Folgende *speziellen Impulse* können die Lösungsfindung unterstützen:

- Wie läßt sich $a_4$ aus $a_3 = 7$ berechnen? Begründung!
  - ° Wieviel Ebenenteile werden höchstens geteilt, wenn man eine 4. Gerade einzeichnet?
    - : In wieviel Teile wird die 4. Gerade $g_4$ durch die bereits eingezeichneten drei Geraden $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ höchstens zerlegt?
      - °: Wieviel Schnittpunkte kann die 4. Gerade $g_4$ mit den bereits eingezeichneten drei Geraden $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ höchstens haben?

Diese *Unterimpulse*, die schließlich auch die leistungsschwächeren Schüler zum Erfolg führen, sollten natürlich nicht vom AG-Leiter, sondern von denjenigen Schülern formuliert werden, die die Lösung bereits gefunden haben, diese aber nicht verraten dürfen.
Man lasse die in der Aufgabensammlung enthaltene Figur folgendermaßen ergänzen:
Die 3 Schnittpunkte von $g_4$ mit den Geraden $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ werden deutlich gekennzeichnet, die so entstandenen 4 Geradenabschnitte werden verschiedenfarbig gezeichnet. Einer der beiden Teile, in die ein "alter" Ebenenteil durch einen solchen Geradenabschnitt geteilt wurde, wird mit der entsprechenden Farbe gekennzeichnet.
Dann wird die gefundene Beziehung $a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11$ formuliert und begründet.
Man überzeugt sich, daß auch $a_3 = a_2 + 3$ und $a_2 = a_1 + 2$ gilt.
Nach dem Formulieren der allgemeinen Gesetzmäßigkeit $a_n = a_{n-1} + n$ (auch in Worten!) lasse man $a_5$ , $a_6$ , $a_7$ in die Tabelle eintragen:

| n | $a_n$ | |
|---|---|---|
| 0 | 1 = 1 | = 1 |
| 1 | 2 = 1 + 1 | = 1 + 1 |
| 2 | 4 = 2 + 2 | = 1 + (1+2) |
| 3 | 7 = 4 + 3 | = 1 + (1+2+3) |
| 4 | 11 = 7 + 4 | = 1 + (1+2+3+4) |
| 5 | 16 = 11 + 5 | = 1 + (1+2+3+4+5) |
| 6 | 22 = 16 + 6 | = 1 + (1+2+3+4+5+6) |
| 7 | 29 = 22 + 7 | = 1 + (1+2+3+4+5+6+7) |

Schließlich lasse man noch entdecken, daß $a_n = 1 + (1+2+3+...+n)$ gilt, woraus man dann die allgemeine Formel

$$a_n = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

ableiten kann.
Diese Formel wird anhand bereits ermittelter $a_n$ getestet und zur Berechnung weiterer $a_n$ verwendet.

## 3.14. Aufgaben über Flächen und Körper

***Ziele:***

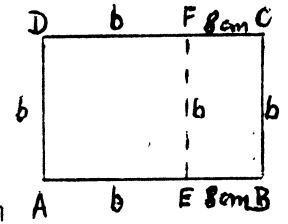
- *Skizzen (informative Figuren)* zum Abspeichern von geometrischen Aufgabenstellungen und von Lösungsplänen (gefundenen Hilfslinien).
- Finden von günstigen *Hilfslinien.*
- Verwenden von *Lösungsgraphen* zum Festhalten von Lösungsplänen.
- *Rückwärtsarbeiten* und *Vorwärtsarbeiten.*
- *"Suche nach Gleichungen".*
- *Existenz- und Einzigkeitsnachweis*; überbestimmte und unterbestimmte Aufgaben.

In diesem abschließenden Stoffabschnitt kommt es vor allem darauf an, daß die Schüler lernen, durch bewußten Einsatz der Strategien *"Vorwärtsarbeiten"*, *"Rückwärtsarbeiten"* und *"Suche nach Gleichungen"* nach verschiedenen Lösungswegen zu einer Aufgabe zu suchen. Sie sollen sich die zugehörigen Fragen und Impulse einprägen und diese beim Suchen nach einem Lösungsweg selbst stellen.
Wie bereits bei den Skizzen in Abschnitt 3.10. vereinbart, schreiben wir bei den Figuren die gegebenen Größen "grün", die gesuchten Größen "rot" und die Hilfsgrössen "blau". Das erspart in manchen Fällen das explizite Herausschreiben von Gegebenem und Gesuchtem.
*Lösungsgraphen* wurden bereits im Abschnitt "1. Wer ist wer" zum Festhalten von Lösungsplänen verwendet. Dort wurden die Knoten des Graphen mit Aussageformen (Bedingungen, Gleichungen, Ungleichungen) belegt, seine Kanten mit den zugehörigen "Begründungen" (z.B. Umformungsregeln). In diesem Abschnitt belegen wir die Knoten des Lösungsgraphen in der Regel mit Größen, seine Kanten mit Formeln oder anderen Beziehungen (als "Begründungen").
Wenn sich eine Aufgabe durch Vorwärtsarbeiten lösen läßt, dann werden die Schüler in der Regel die abgeleiteten Hilfsgrößen sofort konkret ausrechnen. In diesem Abschnitt wollen wir die Schüler dazu anhalten, erst einen kompletten *Lösungsplan* zu entwickeln und festzuhalten, und erst dann die nötigen Rechnungen durchzuführen. Dabei ist es notwendig, den Schülern die Vorteile dieses Vorgehens zu zeigen.

***Aufgabe 1)***

<u>*1. Lösungsweg:*</u>

- Günstige Veranschaulichung?
- Günstige Bezeichnungen einführen!
- Gegebenes, Gesuchtes kennzeichnen!
- Günstige Hilfslinien?
- Woraus ließe sich das Gesuchte sofort berechnen? Begründung!
- Was läßt sich aus dem Gegebenen sofort berechnen? Begründung!
- Was läßt sich nun berechnen?
- Was läßt sich nun berechnen?
- Was läßt sich nun berechnen?




Ges.: A

Geg.: u = 76 cm

a = b + 8cm

Es ist günstig, die Strecke $\overline{EF}$ als Hilfslinie einzuzeichnen, so daß AEFD ein Quadrat mit der Seitenlänge b wird.

(a), (b) → [A] ; weil A = a·b

u(AEFD) = 76 cm - 2·8 cm = 60 cm

4·b = 60 cm , weil u(AEFD) = 4·b

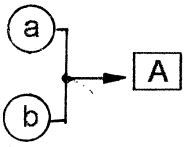
b = 15 cm

a = b + 8 cm = 23 cm

<u>A =</u> 15cm · 23cm = <u>345 cm²</u>

*2. Lösungsweg:*

- Keine Hilfslinie;
- ein Schritt *Rückwärtsarbeiten*, dann




- *Suche nach einer Gleichung* zwischen den gesuchten Hilfsgrößen und den gegebenen Größen!
- Weiter wie beim 1. Lösungsweg.

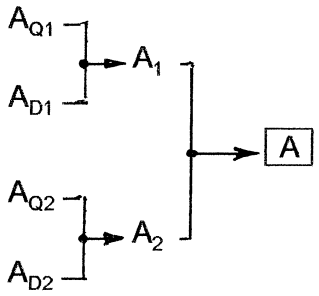
$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

$76\ cm = 2 \cdot (b + 8cm) + 2 \cdot 8cm$

$b = 15\ cm$

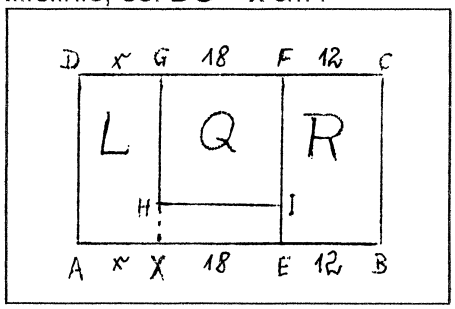
*3. Lösungsweg:*
In der Hoffnung, daß die Lösung aus natürlichen Zahlen gewonnen werden kann, versucht man die Lösung durch *systematisches Probieren* zu ermitteln. Man untersucht, für welche Paare (a;b) , die die Gleichung $a - b = 8cm$ erfüllen, $u = 76cm$ gilt. Dieser Lösungsweg ist sehr ungeschickt.

***Aufgabe 2)***
Hier sollte man den Lösungsweg durch konsequentes *Rückwärtsarbeiten* gewinnen lassen.
Der gesuchte Inhalt A ließe sich aus den Inhalten $A_1$ und $A_2$ der großen und der kleinen Achtecksflächen berechnen.
Die Frage, woraus sich $A_1$ berechnen ließe, führt zu dem "Ergänzungsquadrat" mit dem Inhalt $A_{Q1}$ und den vier "Ergänzungsdreiecken" mit dem Inhalt $A_{D1}$ als wichtigen Hilfsfiguren.
$A_2$ läßt sich analog berechnen.

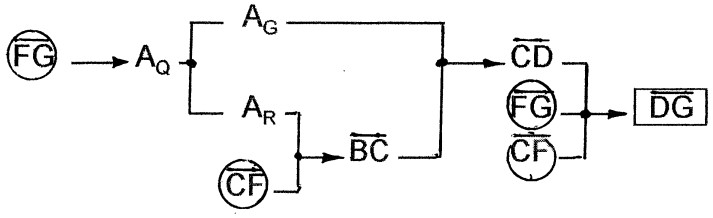



Die vier hinreichenden Hilfsgrößen lassen sich leicht aus dem Gegebenen berechnen.
Man erhält $A_{Q1} = 64\ cm^2$ , $4 \cdot A_{D1} = 4{,}5\ cm^2$ , $A_1 = 59{,}5\ cm^2$ , $A_{Q2} = 25\ cm^2$ , $4 \cdot A_{D2} = 8\ cm^2$ , $A_2 = 17\ cm^2$ , $\underline{A = 42{,}5\ cm^2}$ .

***Aufgabe 3)***
*1. Lösungsweg:* *"Suche nach Gleichungen"*; keine Hilfslinie; sei $\overline{DG} = x$ cm .
Sei $A_G$ der Inhalt des "Gesamtrechtecks" ABCD.
Nach Voraussetzung gilt $A_R = A_Q = A_L$ , woraus dann $A_R = \frac{1}{3} \cdot A_G$ folgt.
Da die beiden Rechtecke EBCF und ABCD die Seite $\overline{BC}$ gemeinsam haben, folgt für die Länge der Seite $\overline{FC}$ die Gleichung $12 = \frac{1}{3}(x + 18 + 12)$ und hieraus $x = 6$ , also $\underline{\overline{DG} = 6\ cm}$ .




*2. Lösungsweg:* *Vorwärtsarbeiten* oder *Rückwärtsarbeiten*; keine Hilfslinie.

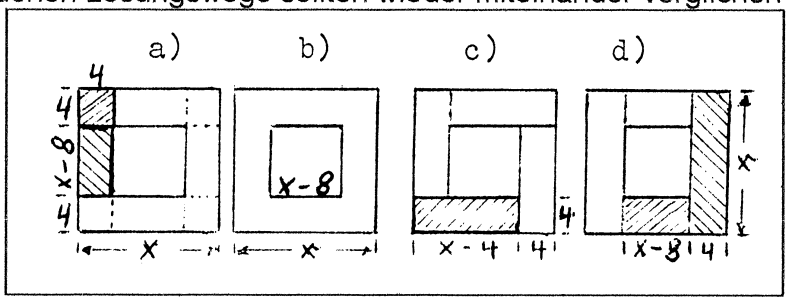


Man erhält $A_Q = 324\ cm^2$ , $A_G = 972\ cm^2$ , $A_R = 324\ cm^2$ , $\overline{BC} = 27\ cm$ , $\underline{\overline{DG} = 6\ cm}$.

*3. Lösungsweg: Rückwärts- und Vorwärtsarbeiten*; *Hilfslinie* $\overline{HX}$ mit $\overline{AX} = \overline{DG}$ .
$\overline{DG} = x$ cm ließe sich aus dem Inhalt $A_{II}$ und der Seitenlänge $\overline{AD}$ des Hilfsvierecks AXGD berechnen.
$A_{II}$ ließe sich aus $A_L$ und dem Inhalt $A_I$ des Rechtecks XEIH berechnen.
$A_I$ ließe sich berechnen, wenn man außer dem gegebenen $\overline{HI} = \overline{FG}$ noch $\overline{EI}$ kennen würde.
Aus $\overline{FG}$ läßt sich (wie beim 2. Lösungsweg) $\overline{BC} = \overline{AD}$ und außerdem auch noch $A_L$ $(= A_Q)$ berechnen.
Aus $\overline{BC}$ und $\overline{FI}$ $(= \overline{FG})$ läßt sich $\overline{EI}$ berechnen.
Damit ist ein Lösungsplan gefunden, der jedoch vergleichsweise sehr umständlich ist.

Diese Aufgabe ließe sich auch durch "Erraten" bzw. *systematisches Probieren* lösen. Diese Lösungsmethode würde jedoch versagen, wenn anstelle von natürlichen Zahlen in den gegebenen Größen gebrochene Zahlen auftreten würden. Daher wollen wir diese Lösungsmethode hier als "unangemessen" ablehnen.
Wenn die Schüler sofort den eleganten 1. Lösungsweg finden, dann wird es schwierig sein, die Suche nach weiteren Lösungwegen zu motivieren. Daher sollte der AG-Leiter keinesfalls durch von ihm gegebenene Impulse sofort diesen Lösungsweg ansteuern! Dies sollte erst ganz zum Schluß geschehen, wenn kein Schüler diesen Lösungsweg selbständig findet.

***Aufgabe 4)***
Hier führt der Impuls *"Suche nach Gleichungen zwischen der gesuchten und den gegebenen Größen"* zum Ziel.
Durch verschiedenartige Zerlegung der gegebenen Fläche in Teilflächen kann man zu vier verschiedenen Ansatzgleichungen gelangen.
Die verschiedenen Lösungswege sollten wieder miteinander verglichen werden.




a) $A_R = 4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot (x - 8) = 256$ b) $A_R = x^2 - (x - 8)^2 = 256$

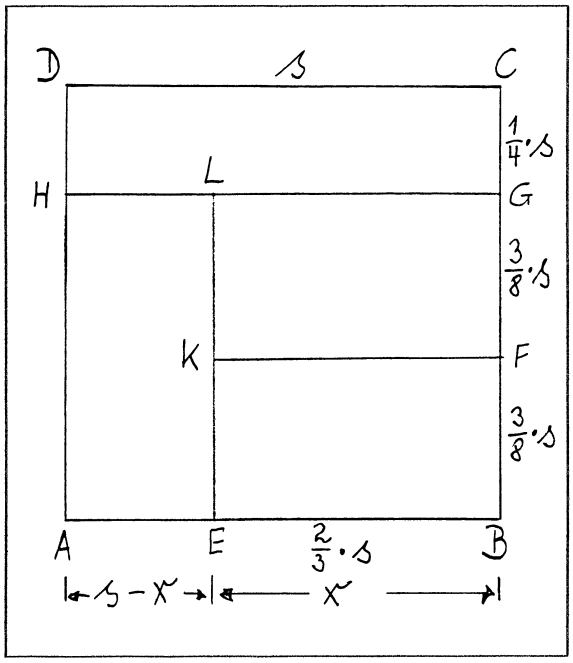
c) $A_R = 4 \cdot 4 \cdot (x - 4) = 256$ d) $A_R = 2 \cdot 4 \cdot x + 2 \cdot 4 \cdot (x - 8) = 256$

Man erhält stets $\underline{x = 20}$ .

Die recht leichte ***Aufgabe 5)*** sollten die Schüler selbständig lösen.
Gelte $\overline{DE} = x$ cm .
Dann hat das Gesamtrechteck ADFG wegen $\overline{AD} = 5cm + 2cm + 5cm = 12$ cm und $\overline{EF} = 2$ cm den Inhalt $A_G = 12 \cdot (x + 2)\ cm^2$ .
Da die drei Teilflächen inhaltsgleich sind, hat das Teilrechteck CDEH den Inhalt $A_R = 4 \cdot (x + 2)\ cm^2$ . Wegen $\overline{CD} = 5$ cm gilt aber auch $A_R = 5 \cdot x$ .
Also gilt $4 \cdot (x + 2) = 5 \cdot x$ , woraus $x = 8$ und damit $\underline{\overline{DE} = 8\ cm}$ folgt.

***Aufgabe 6)*** läßt sich für s = 24 cm auch durch *systematisches Probieren* lösen. Um den Schülern zu zeigen, daß diese Methode für diesen Aufgabentyp unangemessen ist, wähle man für die gegebene Seitenlänge auch eine gebrochene Zahl und fordere die leistungsstärksten Schüler auf, diese Aufgabe für beliebig vorgegebene Seitenlänge s zu lösen. Die Schüler sollen erkennen, daß man mit einer solchen *parameterhaltigen Aufgabe* sogar eine Klasse von unendlich vielen konkreten Aufgaben löst.

Es empfiehlt sich, die Planfigur durch Bezeichnungen für die vorkommenden Eckpunkte zu ergänzen und auf die in der Aufgabe verwendeten Bezeichnungen A , B , C , D für die vorkommenden Rechtecke zu verzichten.




Man kann hier durch *Vorwärtsarbeiten* ans Ziel gelangen.

Von $\overline{AB} = s$ ausgehend gelangt man über $J(ABCD) = s^2$ zu $J(HGCD) = \frac{1}{4}s^2$ .

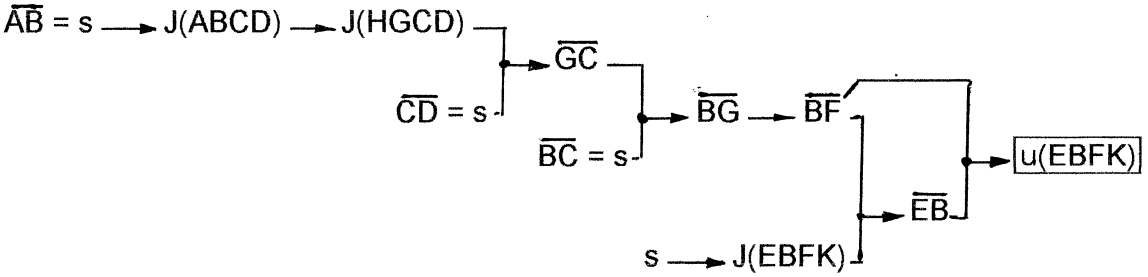
Wegen $\overline{DC} = s$ folgt hieraus $\overline{GC} = \frac{1}{4}s$ ,

und wegen $\overline{BC} = s$ folgt hieraus $\overline{BG} = \frac{3}{4}s$ , woraus man wegen $J(EBFK) = J(KFGL)$ dann $\overline{BF} = \frac{3}{8}s$ erhält.

Wegen $J(EBFK) = \frac{1}{4}s^2$ folgt hieraus dann $\overline{EB} = \frac{2}{3}s$ und man gelangt schließlich zum Ziel : $\underline{u(EBFK) = 2\cdot(\frac{2}{3}s + \frac{3}{8}s)}$ .

Für s = 24 cm erhält man speziell $\underline{u = 50\ cm}$ .

Der zugehörige *Lösungsplan* läßt sich wie folgt festhalten:




Dieser Lösungsplan kann sowohl für das Lösen einer konkreten Aufgabe als auch für das Lösen der zugehörigen parameterhaltigen Aufgabe verwendet werden.

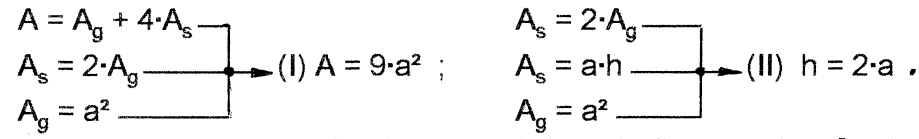
Ein etwas *anderer Lösungsweg* besteht darin, $\overline{EB} = x$ zu setzen, woraus dann $\overline{AE} = s - x$ folgt.

Wegen $J(AELH) = J(EBFK)$ und $\overline{AH} = \frac{3}{4}s$ sowie $\overline{BF} = \frac{3}{8}s$ gelangt man zur Ansatzgleichung $\frac{3}{4}s\cdot(s - x) = \frac{3}{8}s\cdot x$ , woraus dann $x = \frac{2}{3}s$ folgt.

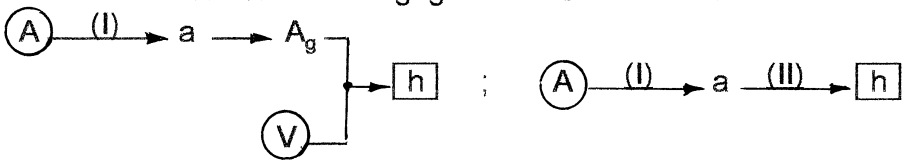
Die recht leichte ***Aufgabe 7)*** läßt sich durch *Rückwärtsarbeiten* bewältigen.
Die gesuchte Anzahl n der Eimer läßt sich aus dem gegebenen Fassungvermögen f = 9 Liter und dem (quaderförmigen) Volumen $V_W$ des Wassers berechnen.
$V_W$ läßt sich aus der gegebenen Länge a = 90 cm , der gegebenen Breite b = 60 cm des Aquariums und der Wasserhöhe h berechnen.

Die Wasserhöhe h läßt sich aus der gegebenen Höhe c = 60 cm des Aquariums und dem gegebenen d = 10 cm berechnen.
Leistungsschwächere Schüler sollten zur Veranschaulichung eine *Skizze* anfertigen.
Der so gewonnene Lösungsplan ist in Form eines *Lösungsgraphen* festzuhalten.
Bei den gegebenen Größen erhält man h = 50 cm , $V_W$ = 270000 cm³ = 270 Liter , n = 30 .

Bei ***Aufgabe 8a)*** lassen sich aus den gegebenen Bedingungen folgendermaßen zwei Bedingungen (I) und (II) ableiten:




Mit Hilfe dieser gefundenen Beziehungen läßt sich die gesuchte Größe h auf zwei verschiedene Weisen aus der gegebenen Größe A berechnen:




Für A = 900 cm² und V = 2000 cm³ erhält man bei beiden Lösungswegen
h = 20 cm .
Beim 1. Lösungsweg erhält man allgemein $h = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{A}$ , beim 2. Lösungsweg $h = 9\cdot\frac{V}{A}$ .

Beim 2. Lösungsweg wurde die gegebene Größe V nicht verwendet; damit ist ***Aufgabe 8b)*** gelöst: Die Antwort lautet ja.
Unsere Aufgabe erweist sich als *überbestimmt* : Aus dem gegebenen A und den gegebenen Bedingungen läßt sich das gesuchte V eindeutig ermitteln, wobei V = 2 Liter (wie gegeben) gilt.

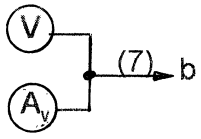
Ist - wie in ***Aufgabe 8c)*** - dagegen V = 3 Liter gegeben, dann würde das der Angabe A = 900 cm² widersprechen, die Aufgabe wäre nicht lösbar. Die Antwort lautet daher nein.
Beim Beschreiten des 1. Lösungsweges kann man diesen Widerspruch nur entdekken, wenn man eine *Probe* macht. Dies unterstreicht die Notwendigkeit eines *Existenznachweises* auch bei derartigen Aufgaben.

Bei ***Aufgabe 9)*** soll vor allem das Aufstellen von *Lösungsplänen* (ohne Ausführen der Rechnungen) geübt werden. Ferner spielt die Problematik *"Existenz- und Einzigkeitsnachweis"* sowie *"überbestimmte und unterbestimmte Aufgaben"* eine wichtige Rolle.
Zunächst wird man alle einschlägigen Formeln aus dem Unterricht wiederholen und - mit Nummern versehen - festhalten:

(1) $V = a\cdot b\cdot c$ ; (2) $A_g = a\cdot b$ ; (3) $A_s = b\cdot c$ ; (4) $A_v = a\cdot c$ ;
(5) $A = 2\cdot(A_g + A_v + A_s)$ ; (6) $V = A_g\cdot c$ ; (7) $V = A_v\cdot b$ ; (8) $V = A_s\cdot a$ .

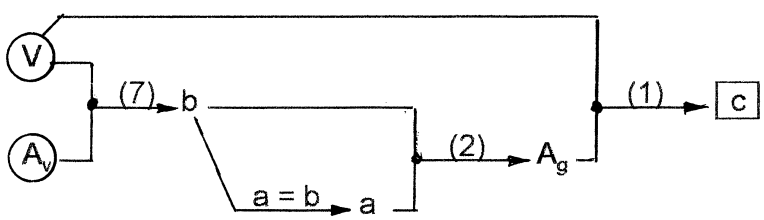
Die Lösungspläne zu den einzelnen Teilaufgaben lassen sich dann wie folgt festhalten:

a)



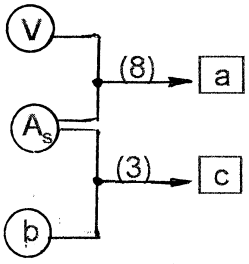

b = 5 cm ; sonst nichts berechenbar;
der Quader ist nicht eindeutig bestimmt

b)




Mit a , b , c ist der Quader eindeutig bestimmt; die restlichen Größen sind eindeutig berechenbar.
Man erhält $a = b = 5$ cm ; $A_g = 25$ cm² ; $c = 6$ cm ; $A_s = 30$ cm² ; $A = 170$ cm² .

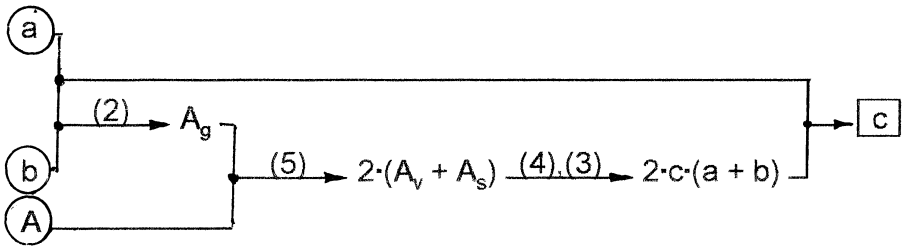
c)




Mit a , b , c ist der Quader eindeutig bestimmt, die restlichen Größen sind eindeutig berechenbar.

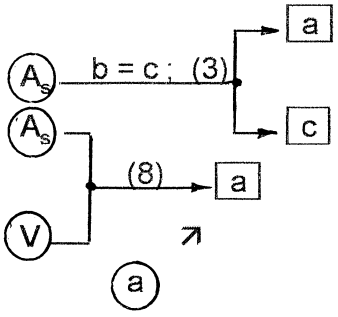
Man erhält $a = 6$ cm ; $A_g = 30$ cm² ; $c = 6$ cm ; $A_v = 24$ cm² ; $A = 148$ cm² .

d)




Daß $A_g$ aus den Daten eindeutig zu ermitteln ist, kann man leicht erkennen. Nicht mehr ganz so einfach ist das Ermitteln von $(A_v + A_s)$ aus A und $A_g$ .
Bei den gegebenen Größen wird $A_g > A$ , was heißt, daß kein Quader mit den gegebenen Größen existiert.
Würde dagegen $A_g < A$ gelten, dann könnte man - was wiederum nicht ganz einfach zu erkennen ist - aus den Daten die Größe c eindeutig ermitteln, d.h. ein solcher Quader wäre dann eindeutig bestimmt.

e)

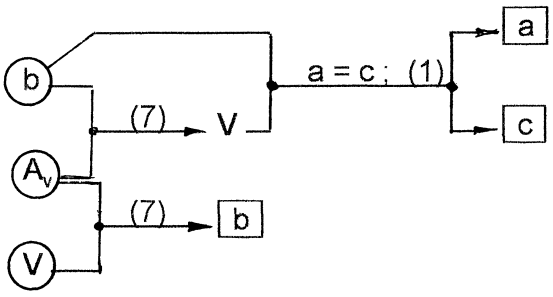



Diese Aufgabe ist überbestimmt, da sich das gegebene a aus dem gegebenen $A_s$ und V berechnen läßt.

Stimmt das berechnete a mit dem gegebenen a überein, dann ist der Quader eindeutig bestimmt; trifft dies nicht zu, dann existiert kein solcher Quader.

Bei den gegebenen Daten wird $V:A_s = a = 10$ cm , also ist der Quader eindeutig bestimmt. Man erhält $b = c = 5$ cm , $A_g = 50$ cm² ; $A_v = 50$ cm² ; $A = 250$ cm² .

f)

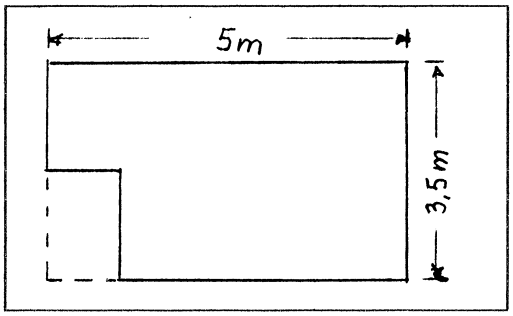



Die Aufgabe ist *überbestimmt*. Sowohl aus b und $A_v$ als auch aus $A_v$ und V liessen sich alle anderen Größen eindeutig ermitteln, wenn die Beziehung a = c gegeben ist.
Wenn die gegebenen Größen b und V "verträglich" sind, dann ist der Quader eindeutig bestimmt, sonst existiert kein solcher Quader.
Bei den gegebenen Daten gilt $V = b \cdot A_v = 96\ cm^3$ im Widerspruch zu dem gegebenen $V = 100\ cm^3$ . Daher existiert in diesem Fall kein derartiger Quader.

***Aufgabe 10a)*** ist leicht durch *Vorwärtsarbeiten* zu lösen. Man erhält:

| | |
|---|---|
| Flächeninhalt der Wände: | 28,60 m² ; |
| Flächeninhalt der Decke: | 7,00 m² ; |
| Summe: | 35,60 m² ; |
| Abzug für Fenster und Türen: | 7,12 m² ; |
| Insgesamt zu streichende Fläche: | 28,48 m² . |

Bei ***Aufgabe 10b)*** besteht die Schwierigkeit darin, daß sich die Längen der 6 Teilwände des Wohnzimmers nicht explizit berechnen lassen.
*Rückwärtsarbeiten* führt auf den Umfang u des Wohnzimmers als hinreichende Hilfsgröße.
Entscheidend ist das Finden geschickter *Hilfslinien*, die ein Hilfsrechteck erzeugen, von dem man zeigen kann, daß sein leicht berechenbarer Umfang u = 17 m gleich dem gesuchten Umfang des Wohnzimmers ist.
Da das Wohnzimmer eine Höhe von 2,6 m besitzt, sind im Wohnzimmer 44,2 m² Fläche zu streichen.




Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 2.1. des ARW war.

Bei der sehr leichten ***Aufgabe 11)*** erhält man den gesuchten Abstand von 6 cm als Höhe des Quaders mit dem Volumen $V = 150\ cm^3$ und der Grundfläche $A_g = 25\ cm^2$ .

Bei ***Aufgabe 12)*** entnimmt man der Abbildung durch (*systematisch* durchgeführtes) Abzählen, daß der Körper aus 13 Würfeln besteht und daß 14 Seitenflächen mit Leim bestrichen wurden.
Es wäre ungeschickt, auch die Anzahl der Quadrate, die die Oberfläche des Körpers bilden, durch Abzählen ermitteln zu wollen, weil man sich dabei sehr leicht verzählen

kann. Es ist wichtig, daß die Schüler erkennen, daß sich diese Anzahl berechnen läßt.
Wenn 14 Seitenflächen mit Leim bestrichen wurden, dann wurden 28 Seitenflächen zusammengeklebt (da nach Voraussetzung immer nur eine von zwei zusammengeklebten Seitenflächen mit Leim bestrichen wurde).
Wegen 13·6 = 78 besitzen die 13 Würfel insgesamt 78 Seitenflächen.
Wegen 78 - 28 = 50 muß die Oberfläche des Körpers aus 50 solchen quadratischen Seitenflächen bestehen.

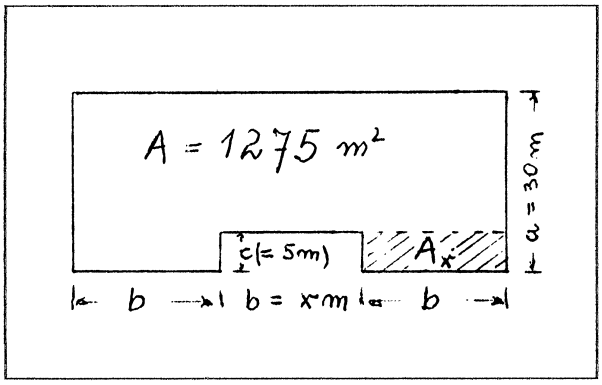
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 8.1b. des ARW war.

***Aufgabe 13)*** knüpft bezüglich des Ermittelns der Anzahl von Quadraten, aus denen die Oberfläche besteht, an die Aufgabe 12) an.
Würde ein solcher Körper aus 20 Würfeln bestehen, dann hätten diese Würfel insgesamt 120 Seitenflächen.
Wenn 25 dieser Seitenflächen mit Leim bestrichen wurden, dann wurden nach Voraussetzung 50 dieser Seitenflächen zusammengeklebt.
Also bleiben wegen 120 - 50 = 70 für die Oberfläche des Körpers noch 70 Seitenflächen übrig und nicht, wie von Horst behauptet, 68 Seitenflächen.

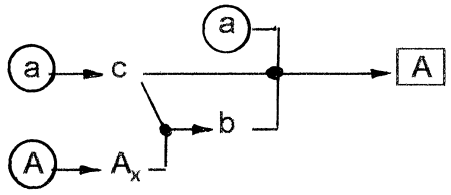
Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 8.1c. des ARW war.

***Aufgabe 14)***

*1. Lösungsweg:*
Durch *Vorwärtsarbeiten* gelangt man von dem gegebenen a zu c.
Durch *Rückwärtsarbeiten* erkennt man, daß nun noch b benötigt wird.
Nach Einführen der Variablen x durch b = x m läßt sich x mit Hilfe der *Gleichung* 3·x·30 - 5·x = 1275 berechnen.
Man erhält b = 160 m.



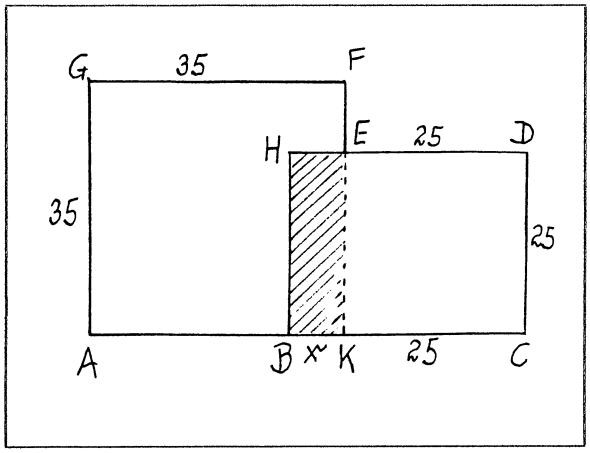

*2. Lösungsweg:*
Im zweiten Schritt *RA* kann man auf den Inhalt $A_x$ der schraffierten Fläche als hinreichende Hilfsgröße stoßen und dann erkennen, daß sich $A_x$ aus A leicht berechnen läßt, weil $A = 17 \cdot A_x$ gilt.




Die recht leichte ***Aufgabe 15)*** sollten die Schüler selbständig lösen.
Da es hier mehrere Lösungswege gibt, sollte man in der Auswertung die beschrittenen Lösungswege einschätzen lassen.

Das Resultat lautet: Es werden 656 Platten benötigt.

Bei ***Aufgabe 16)*** liegt es nahe, die Figur durch die *Hilfslinie* $\overline{EK}$ zu ergänzen, so daß die Quadrate AKFG und KCDE sichtbar werden.




Wie man leicht sieht, gilt dann u(ABHEFG) = u(AKFG) = 4·35 cm , also u(ABHEFG) =140 cm .

Um u(BCDH) berechnen zu können, benötigt man die *Hilfsgröße*

$\overline{BK} = \overline{HE} = x$ cm .

Aus der Inhaltsgleichheit der Teilfiguren folgt dann

J(AKFG) - J(BKEH) = J(ABHEFG) = J(BCDH) = J(KCDE) + J(BKEH) ,

wegen $\overline{FG} = 35$ cm und $\overline{CD} = 25$ cm also

$35^2$ cm² - 25·x cm² = $25^2$ cm² + 25·x cm²,

woraus dann x = 12 folgt.

Folglich gilt u(BCDH) = u(KCDE) + 2·x cm = 4·25 cm + 24 cm = 124 cm .

Man kann den Schülern mitteilen, daß dies die Aufgabe 9.3b. des ARW war.

## 3.15. Vermischte Aufgaben

***Ziele:***
- *Analogieprinzip.*
- Bewußtes Einsetzen *heuristischer Vorgehensweisen* beim selbständigen Lösen von Aufgaben.
- Exakte *Lösungsdarstellung.*

Es sei nochmals auf die vorgeschlagene *Reihenfolge der Zirkel* verwiesen:
Nach dem 6. Zirkel wird die Behandlung des Komplexes "4. Wir lernen systematisch arbeiten" unterbrochen, im 7. und 8. Zirkel behandelt man "5. Zahlen werden gesucht", dann folgt im 9. und 10. Zirkel Komplex I der "Vermischten Aufgaben". Es folgen die restlichen drei Zirkel zu "Wir lernen systematisch arbeiten" sowie "6. Magische Quadrate" und die Komplexe 7. bis 9. . Nach "10. Hier können Skizzen helfen" kommen zwei Zirkel von Komplex II der "Vermischten Aufgaben" sowie die Komplexe 11. bis 13. . Nach "14. Aufgaben über Flächen und Körper" kommen die letzten beiden Zirkel von Komplex III der "Vermischten Aufgaben".
Um hinreichend Zeit zur Verfügung zu haben, wird man in den Zirkeln mit den "Vermischten Aufgaben" auf Teil C (Mathematische Spiele) verzichten.

In Anwendung des *Analogieprinzips* sollen sich die Schüler folgende Fragen stellen:
- Habe ich eine *ähnliche Aufgabe* bereits gelöst?
- Wie bin ich beim Lösen dieser Aufgabe vorgegangen (welche *Hilfsmittel*, welche *Strategien* habe ich verwendet)?

Bei Komplex I und Komplex II der "Vermischten Aufgaben" wird man die Schüler auffordern, zunächst nur den Aufgabentext zu lesen, eine Zuordnung zu den bislang besprochenen Aufgabenarten zu versuchen sowie durch ein Stichwort in der Aufgabensammlung festzuhalten, und schließlich sollen sie auf Grund dieser Zuordnung entscheiden, welche Hilfsmittel oder Verfahren sie beim Suchen nach einem Lösungsweg einsetzen wollen. Man mache die Schüler darauf aufmerksam, daß eine solche Zuordnung nicht immer eindeutig möglich ist, und daß auch Aufgaben vorkommen können, die keiner der besprochenen Aufgabenarten angehören. Anschließend werden die entsprechenden Vorschläge der Schüler gemeinsam diskutiert, erst dann beginnt die selbständige Arbeit der Schüler zum Finden eines Lösungsplans bzw. auch einer exakten Lösungsdarstellung.
Bei Komplex III sollte eine vorherige Diskussion über die anzuwendenden Hilfsmittel oder Verfahren entfallen, hier sollten die Schüler sofort mit der selbständigen Suche nach einem Lösungsplan beginnen.

Im Mittelpunkt dieser Zirkel soll das *selbständige Lösen* von Aufgaben stehen, wobei der AG-Leiter die Gelegenheit nutzen sollte, die Schüler zu beobachten und sich dabei ein Urteil über deren Leistungsfähigkeit zu verschaffen. Drei *Varianten der Aufgabenstellung* bieten sich an:
1. Der AG-Leiter nennt etwa 4 bis 6 Aufgaben, die die Schüler in vorgeschriebener Reihenfolge im Zeitraum von etwa 30 Minuten lösen sollen. Dabei gehören die schwierigsten Aufgaben jeweils ans Ende, sonst sollte die Reihenfolge von der Wichtigkeit der anzueignenden Hilfsmittel und Verfahren abhängen.
2. Die Schüler haben genau eine Aufgabe in beschränkter Zeit (etwa 10 bis 15 Minuten) zu lösen, dann beginnt die gemeinsame Besprechung.
3. Die Schüler haben etwa 4 bis 6 vorgegebene Aufgaben in selbstgewählter Reihenfolge im Zeitraum von etwa 30 Minuten zu lösen.

Es empfiehlt sich, dies stets mit einem *"Wettbewerb"* zu verbinden. An der Tafel steht eine Tabelle mit den Namen der AG-Mitglieder sowie den Nummern der gestellten Aufgaben. Wenn ein Schüler eine Aufgabe gelöst zu haben glaubt, dann meldet er sich und nennt sein Resultat als "Angebot". Der AG-Leiter notiert den Lösungserfolg "richtig" oder "falsch" in seinen persönlichen Aufzeichnungen, teilt dies den Schüler jedoch zunächst noch nicht mit, sondern wartet auf eine Bestätigung dieses "Angebots" oder ein "Gegenangebot" von den anderen Schülern. Ein jeder Schüler kann sein "Angebot" wieder zurückziehen, wenn er es als falsch erkannt hat. Auf diese Weise werden die Schüler dazu angehalten, ihre gewonnenen Resultate selbst zu überprüfen und u.U. zu korrigieren.

Während der selbständigen Schülerarbeit sollte der AG-Leiter die Schüler sorgfältig beobachten und leistungsschwächeren Schülern möglichst unauffällig auch individuelle Hilfe geben. Für die leistungsstärksten Schüler sind stets *"Differenzierungsaufgaben"* bereitzuhalten, so daß auch diese Schüler während der gesamten Zeit an der oberen Grenze ihrer Leistungsfähigkeit gefordert werden.

Nach jeder Phase selbständiger Schülertätigkeit kommt eine gemeinsame *Auswertung*. Bei leichten Aufgaben genügt ein Vergleich der Resultate. Wird das Finden eines Lösungsplans zu einer schwierigeren Aufgabe besprochen, dann sollte der AG-Leiter möglichst darauf verzichten, selbst Impulse zu geben, er sollte nur als "Dirigent" auftreten und bestimmen, welcher Schüler Fragen stellen oder Impulse geben darf. Den Schülern muß von vornherein klar sein: Wer eine Lösung gefunden hat, der darf sie nicht verraten, er darf lediglich Lösungshilfen in Form von Fragen oder Impulsen geben. Die Praxis lehrt, daß ein solches methodisches Vorgehen auf große Schwierigkeiten stößt; dennoch sollte sich ein AG-Leiter stets darum bemühen.

Es folgt ein *Überblick über die* in den 3 Komplexen zu behandelnden *Aufgaben* nebst Hinweis auf den *Aufgabentyp*.

| Komplex I | Komplex II | Komplex III |
|---|---|---|
| 1) Zahl (5.) | 13) V/Tab./Gl. (7.) | 31) Sonstige/Tab. |
| 2) Einheit (2.) | 14) Skizze (10.) /Tab | 32) Diagramme (11.) |
| 3) Finster (3.) | 15) Syst. | 33) V/Tab./Gl. |
| 4) Wer? (1.) | 16) Einheit | 34) V/Tab./Gl. |
| 5) Zahl/Syst | 17) MQ (6.) | 35) Flächen/Körper (14.) |
| 6) Syst. (4.) | 18) Krypt. (9.) | 36) Flächen/Körper |
| 7) Finster | 19) Einheit/Tab. | 37) Diagramme |
| 8) Zahl | 20) Syst. | 38) Einheit |
| 9) Einheit | 21) Zahl/Sonstige | 39) Zug (12.) |
| 10) Sonstige | 22) Sonstige/Syst. | 40) Zug |
| 11) Syst. | 23) Syst. | 41) Einheit/Tab. |
| 12) Sonstige | 24) Syst. | 42) Zahlen |
| | 25) V/Tab./Gl. | 43) MQ |
| Aufgaben aus früheren Kreis-Olympiaden | 26) Skizze | 44) Zug |
| | 27) Syst. | 45) Flächen/Körper |
| | 28) V/Tab./Gl. | 46) Logik |
| | 29) MQ | 47) Diagramme |
| | 30) V/Tab./Gl. | 48) Sonstige |

Es sei nochmals betont: Die Zuordnung zu den einzelnen Aufgabengruppen ist nicht immer eindeutig möglich und soll nur helfen, sich auf die Hilfsmittel oder Verfahren zu besinnen, deren Einsatz bei der vorliegende Aufgabe gewisse Erfolgsaussichten bietet. Besonders der leistungsstarke Schüler sollte in der Wahl der Mittel nicht beeinflußt werden, man sollte ihm vielmehr angewöhnen, daß er immer *"auch mal ganz anders als gewohnt"* vorzugehen versucht.

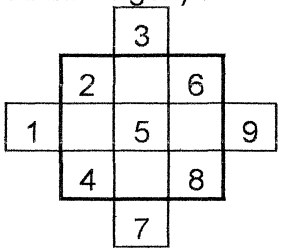
Die *Lösungen* zu den "Vermischten Aufgaben" findet man in Abschnitt 5. ; zu einigen dieser Aufgaben wollen wir noch Bemerkungen anfügen.

Bei ***Aufgabe 6)*** wäre es ungeschickt, alle Paare (a;b) aus natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die $a + b < 13$ gilt und dann für alle diese Paare nachzuweisen, daß $a \cdot b \leq 36$ gilt. Offensichtlich reicht es aus, alle Paare (a;b) mit $a + b = 12$ zu betrachten, wenn man vermerkt, daß ein Produkt kleiner wird, wenn einer seiner Faktoren verkleinert wird. Das Gleichheitszeichen wird nur für $a = b = 6$ angenommen. Wenn man außerdem noch nachweist, daß stets $n \cdot n > (n + 1)(n - 1)$ gilt, dann braucht man sogar nur den "Grenzfall" $a = b = 6$ zu betrachten.

***Aufgabe 10)*** gehört zu keiner der besprochenen Aufgabenarten. Diese *Knobelaufgabe* ist durch einen *indirekten Schluß* zu lösen:
Ein Schüler muß Lutz Schulze heißen. Würde nämlich keiner der vier "Lutz" zu keinem der vier "Schulze" gehören, dann säßen nicht nur 7 , sondern mindestens 8 Schüler am Tisch.
Man merke sich die Schüler, die diese ungewohnte Aufgabe auf Anhieb lösen!

Bei ***Aufgabe 15)*** achte man darauf, welche Schüler besonders geschickt vorgehen.
Zunächst kann man sich darauf beschränken, die Anzahl der möglichen Verteilungen der 6 Kugeln in die Schachteln A und B zu ermitteln, da damit die Belegung der Schachtel C eindeutig festgelegt ist.
Da jeweils 2 weiße, rote bzw. grüne Kugeln zu verteilen sind, reicht es aus Symmetriegründen aus, alle Möglichkeiten zu ermitteln, in denen in Schachtel A z.B. eine weiße Kugel liegt, und die gefundene Anzahl dann mit 3 zu multiplizieren.
Man braucht also nur zu ermitteln, wieviel Möglichkeiten es gibt, aus der Menge
M = { w , b , b , g , g } zwei verschiedene Elemente auszuwählen (die dann in Schachtel B unterzubringen sind). Es sind dies die 5 Möglichkeiten (w;b) , (w;g) , (b;b) , (b;g) , (g;g) . Folglich gibt es insgesamt <u>15 verschiedene Verteilungen</u> .

***Aufgabe 17)***
Ausgangspunkt ist das MQ(3) aus den Zahlen 1 , 2 , ... , 9 mit $S = 45$ und $s = 15$ , für dessen Gewinnung man den "Trick" zum Finden eines MQ ungerader Ordnung ("Spiegeln am Zentralfeld"; vgl. die ersten beiden der nachfolgend angegebenen Abbildungen) verwenden kann.




| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 15 | 13 |
| 19 | 11 | 13 |
| 9 | 7 | 17 |

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 13 | 12 |
| 15 | 11 | 7 |
| 10 | 9 | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 11 | 11 |
| 11 | 11 | 11 |
| 11 | 11 | 11 |

Aus dem gegebenen $S = 99$ folgt $s = 99:3 = 33$ .

Um ein MQ(3) mit s = 33 zu bilden, gehen wir von dem angegebenen MQ(3) mit s = 15 aus und wenden die Additions- und die Multiplikationsregel an.
Wenn 33 = 15·a + 3·b , dann multiplizieren wir jede Zahl dieses MQ(3) mit a und addieren dann noch b .
Wegen 33 = 15·2 + 3·1 = 15·1 + 3·6 = 15·0 + 3·11 erhalten wir mit den drei letzten der oben angegebenen MQ drei MQ(3) mit S = 99 .

Bei der sehr leichten ***Aufgabe 19)***, die alle Schüler selbständig lösen müßten, achte man auf zwei verschiedene Lösungswege, einen über Zeitvergleich, den anderen über Wegvergleich, wobei in jedem Fall eine *Tabelle* ein angemessenes Hilfsmittel ist.

| Weg | Zeit |
|---|---|
| 30 km | 1h = 60 min |
| 2 km | 4 min |

4 min > 3 min

| Weg | Zeit |
|---|---|
| 2 km | 3 min |
| 40 km | 60 min |

40 km > 30 km

Natürlich können die Schüler auch die zugelassene Geschwindigkeit von 30 km/h sowie die Geschwindigkeit von 40 km/h des Herrn Meyer berechnen und vergleichen, wenn sie mit dem Geschwindigkeitsbegriff vertraut sind.

Bei ***Aufgabe 20)*** beobachte man, welche Schüler besonders geschickt vorgehen. Bei dreistelligen Zahlen der Gestalt $\overline{aba}$ muß $a \neq 0$ gelten. Daher gibt es 9 Möglichkeiten, für a eine Ziffer einzusetzen, und in jedem dieser Falle kann man für b eine der 10 Ziffern einsetzen.
Daher gibt es insgesamt (9·10 =) 90 derartige Zahlen.

***Aufgabe 21)***
Bei schematischem Vorgehen wird man hier an die üblichen Zahlenrätsel denken, eine Variable einführen, die zugehörige Gleichung aufschreiben und lösen:
{[(x + 107):10]·11} - 15 = 7 mit x = 93 .
Hier kommt man jedoch ohne Verwenden einer Variablen viel einfacher ans Ziel, indem man *"in umgekehrter Richtung"* jeweils die Umkehroperation anwendet :
7 ← 22 ← 2 ← 200 ← 93 .

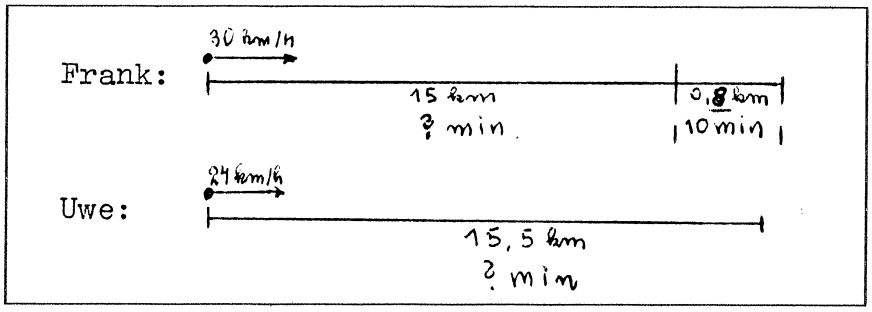
Bei ***Aufgabe 24)*** lasse man erläutern, wie man (möglichst geschickt) die gesuchte Anzahl ermittelt.
Der 1. Schüler begrüßt die 6 anderen Schüler.
Der 2. Schüler (hat den 1. Schüler bereits begrüßt und) begrüßt nur noch die 5 restlichen Schüler; usw.
Die gesuchte Anzahl der Handschläge beträgt daher 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 .

***Aufgabe 26)***
Man beobachte, welche Schüler Skizzen oder Tabellen einsetzen und welche Schüler u.U. ohne diese Hilfsmittel schnell ans Ziel gelangen. Es gibt wie bei Aufgabe 19) zwei Lösungswege.

| | Weg | Zeit | Gesamtweg | Gesamtzeit | |
|---|---|---|---|---|---|
| Frank | 30 km | 60 min | 15 km | 30 min + 10 min = 40 min | |
| Uwe | 24 km | 60 min | 15,5 km | 38,75 min | 1. Lösungsweg |
| | | | 16 km | 40 min | 2. Lösungsweg |

Also hatte Uwe mit seiner Meinung recht.

Folgende *Skizze* kann die Aufgabenstellung veranschaulichen:




***Aufgabe 36)*** kann in zwei Etappen gelöst werden. Man formuliere zunächst die *Ansatzgleichung* $x^2 = (18 + x)\cdot(12 - x)$ und löse dann diese Gleichung durch *systematisches Probieren*.
Es ist festzuhalten: Für $x = 8$ gilt $26\cdot4 = 104 > 64 = 8^2$, für $x = 9$ gilt $27\cdot3 = 81 = 9^2$, für $x = 10$ gilt $28\cdot2 = 56 < 100 = 10^2$.
Folglich beträgt die Länge der Quadratseite $\underline{x = 9}$.

***Aufgabe 37)***
Wenn 78 der Befragten Tee trinken und 48 von ihnen Kaffee oder Tee, dann trinken (78 - 48 =) 30 von ihnen nur Tee.
Wenn 71 der Befragten Kaffee trinken und 48 von ihnen Kaffee oder Tee, dann trinken (71 - 48 =) 23 von ihnen nur Kaffee.
Folglich wurden (48 + 30 + 23 =) 101 Personen befragt und nicht, wie angegeben, 100 Personen.

***Aufgabe 45)***
Man beobachte, ob es Schüler gibt, die den in Teil b) gesuchten Oberflächeninhalt A fälschlicherweise als Summe der in Teil a) berechneten Oberflächeninhalte $A_1 = 312\ cm^2$ und $A_2 = 448\ cm^2$ mit $A = 760\ cm^2$ angeben, was bei gedankenlosem Vorwärtsarbeiten passieren kann. Sollte dies der Fall sein, dann lasse man diese Schüler erkennen, daß dieser Fehler beim *Rückwärtsarbeiten* nicht vorkommen kann:

- Woraus ließe sich A unmittelbar berechnen? Begründung!
  [ Aus dem gegebenen c und aus a, weil $A = 2\cdot(a^2 + ac + ac)$ wegen $a = b$ ]
- Woraus ließe sich a unmittelbar berechnen? [ ??? ].
  ° In welcher (noch nicht verwendeten) Formel kommt a vor? [ In $V = a^2\cdot c$ ).
- Also: Woraus ließe sich a unmittelbar berechnen?
  [ Aus dem Volumen V und dem gegebenen c ].
- Woraus ließe sich V unmittelbar berechnen? Begründung!
  [ aus $V_1$ und $V_2$, wegen $V = V_1 + V_2$ ].

Da sich $V_1$ und $V_2$ aus den gegebenen Größen $a_1$, $a_2$, $c_1$, $c_2$ unmittelbar berechnen läßt, hat man einen Lösungplan gefunden.
So erhält man $\underline{A = 600\ cm}$; wegen $a = b = c = 10\ cm$ ist der neue Quader speziell ein Würfel.

Mit den Aufgaben 46), 47) und 48) werden drei Aufgaben gestellt, die auf den ersten Blick zum selben Aufgabentyp zu gehören scheinen: Es geht stets um Schüler in der außerunterrichtlichen Tätigkeit, wobei in zwei Fällen nach Schüleranzahlen, in der

dritten nach einer Zuordnung gefragt wird. Erst bei näherem Hinsehen erkennt man, daß sich die Aufgaben in Hinblick auf die einzusetzenden heuristischen Vorgehensweisen stark unterscheiden.

***Aufgabe 46)*** läßt sich recht einfach mit Hilfe einer *Zuordnungstabelle* lösen, bei ***Aufgabe 47)*** bietet sich ein *Mengendiagramm* zur Veranschaulichung an.
Bei der wesentlich schwierigeren Aufgabe 48) dagegen führen diese beiden Hilfsmittel nicht sofort zum Ziel. Diese Aufgabe eignet sich als *"Differenzierungsaufgabe"*.

***Aufgabe 48)***
Diese Aufgabe gehört zu dem in "11. Mengendiagramme" besprochenen Aufgabentyp, die Schwierigkeit besteht jedoch darin, daß nicht nur - wie bei allen derartigen bisher behandelten Aufgaben - 2 oder 3 , sondern 4 Eigenschaften vorkommen. Hier lohnt das Anfertigen eines Mengendiagramms nicht mehr. Auch lohnt es nicht, die in Abschnitt "3.11. Mengendiagramme" eingeführte Bezeichnungsweise zu verwenden.
Aus Bedingung (1) und der Aufgabenstellung folgt, daß jeder der 28 Schüler entweder an genau einer oder an genau zwei der vier Sportarten teilnimmt. Folglich sind nur die in unterstehender *Tabelle* festgehaltenen Anzahlen von Interesse. Dabei bezeichne F die Anzahl der Schüler, die nur Fußball betreiben; FL bezeichnet die Anzahl der Schüler, die Fußball und Leichtathletik betreiben, usw.
Unter Verwendung dieser *günstigen Bezeichnungen* kann man die gegebenen Bedingungen wie folgt übersichtlich festhalten:

(0) Summe: $F + L + S + T + FL + FS + FT + LS + LT + ST = 28$ ;

(2) $F + L + S + T = 18$ ;

(3) $L + FL + LS + LT = 2 \cdot LT$ ;

(4) $FS = LS = ST =: \text{´S`}$ und $S = 0$ ;

(5) $T = F$ ;

(6) $FT = 0$ ;

(7) $LT = FL + FS + FT + LS + ST$ .

Der Lösungsfindungsprozeß läßt sich durch folgende Impulse steuern:

- Was läßt sich aus den gegebenen Bedingungen ableiten? Begründung!
  - ° Mit welchen Bedingungen werde ich beginnen?
  - ° Ich halte die gewonnenen Resultate in der Tabelle fest.

Auf diese Weise kann man zu folgender Lösung gelangen:

(0),(2) $\Rightarrow$ (8) $FL + FS + FT + LS + LT + ST = 10$ ; [ Einsetzen ] .

(8).(7) $\Rightarrow$ (9) $LT = 10 - LT$ , also $LT = 5$ ; [ Einsetzen, Umformen ] .

(8),(4),(6) $\Rightarrow$ (10) $FL + 3 \cdot \text{´S`} + 0 + LT = 10$ ; [ Einsetzen ] .

(4) $\Rightarrow$ (11) $\text{´S`} \neq 0$ ;
[ da sonst kein Schüler am Schwimmen teilnehmen würde ] .

(9),(10) $\Rightarrow$ (12) $FL + 3 \cdot \text{´S`} = 5$ ; [ Einsetzen ] .

(11),(12) $\Rightarrow$ (13) $FL = 2$ und $\text{´S`} = 1$ ; [ einzige verbleibende Möglichkeit ] .

(3),(13),(9) $\Rightarrow$ (14) $2 + 1 + 5 + L = 2 \cdot 5$ , also $L = 2$ ; [ Einsetzen, Umformen ] .

(2),(5),(14),(4) $\Rightarrow$ (15) $F = T = 8$ ; [ Einsetzen, Umformen ]

| F | L | S | T | FL | 'S' FS | FT | 'S' LS | LT | 'S' ST | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 2 | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 1 | 5 | 1 | 28 |

Damit ist der *Einzigkeitsnachweis* erbracht.

Um den *Existenznachweis* zu liefern, muß man noch überprüfen, ob die angegebenen Zahlen tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllen. Dies ist der Fall.

Nun lassen sich die gestellten Fragen leicht beantworten:

a) F + FL + FS + FT = 8 + 2 + 1 + 0 = 11 , also spielen 11 Schüler Fußball .

b) L + FL + LS + LT = 2 + 2 + 1 + 5 = 10 , also betreiben 10 Schüler Leichtathletik .

c) S + FS + LS + ST = 0 + 1 + 1 + 1 = 3 , also gehen 3 Schüler zum Schwimmen .

d) T + FT + LT + ST = 8 + 0 + 5 + 1 = 14 , also gehen 14 Schüler zum Turnen .

Würde man in Bedingung (3) die Worte "die Hälfte" ersetzen durch (3a) "ein Drittel" bzw. (3b) "ein Viertel", dann würde man F = T = 5,5 (keine Lösung) bzw. F = T = 3 erhalten.
Würde man in Bedingung (5) "gleich der Anzahl" ersetzen durch (5a) "kleiner als die Anzahl", dann wäre die Lösung nicht mehr eindeutig bestimmt.
Man kann besonders leistungsfähige Schüler auffordern, derartige Untersuchungen selbst vorzunehmen.

# 4. MATHEMATISCHE SPIELE

Die in Teil C eines jeden Zirkels (vgl. hierzu Abschnitt 2.) durchzuführenden mathematischen Spiele dienen einerseits der Auflockerung der Zirkel, andererseits aber auch dem bewußten Vermitteln von *heuristischen Vorgehensweisen* bei der Suche nach *Gewinnstrategien.* Dabei wird die Möglichkeit genutzt, gewisse *Begabungspotenzen* bei den Schülern zu entdecken bzw. einzuschätzen. Wir haben uns diesbezüglich vor allem an den Ausführungen von Gericke / Rautenberg / Sprengel in /19/ orientiert. Einige Spiele wurden auch der Schülerzeitschrift "Alpha" entnommen.

In der Regel wird jeder Spielkomplex (Spiel nebst zugehörigen Varianten) in zwei aufeinanderfolgenden Zirkeln behandelt, wobei der zweite Zirkel meist der Untersuchung verschiedener Varianten und dem Abheben einer gemeinsamen Gewinnstrategie dient. Dies gibt interessierten Schülern die Möglichkeit, zu Hause nach etwa vorhandenen Gewinnstrategien zu suchen.

Wir haben die Spiele in folgender *Reihenfolge* behandelt:
"Drei (bzw. vier) in einer Reihe" ; "Hundert gewinnt (bzw. verliert)" ; "Nimmspiel I" ; "Nimmspiel II" ; "Nur kein Rechteck" ; "Groschenspiel" ; "Turm von Hanoi" ; "h8 gewinnt (bzw. verliert)" ; "Knack" ; "Klein-Trlenka" ; "2 Haufen-Spiel" ; "Rip von Winkle-Spiel" ; "Schieberei" .
So wird etwa bei "Hundert gewinnt" das *Rückwärtsarbeiten* beim Suchen nach einer Gewinnstrategie eingeführt, bei "Nimm-Spiel I" gleich anschließend geübt und bei "h8 gewinnt" sehr viel später wieder eingesetzt. Dabei sollen die Schüler selbst erkennen, daß der Einsatz dieser Strategie hier zweckmäßig ist, und es soll ihnen bewußt werden, daß es sich um dieselbe Vorgehensweise handelt, die man beim Lösen von Aufgaben aus "10. Skizzen" , "11. Mengendiagramme" und "14. Flächen/Körper" einsetzt.
Analog wird eine spezielle Form des *Symmetrieprinzips* beim "Nimm-Spiel II" eingeführt, in "Nur kein Rechteck", in "Groschenspiel" und später bei "Knack" wieder verwendet.

Bei den meisten Spielen treten jeweils 2 Spieler (Anziehender A und Nachziehender B) gegeneinander an. Bei ungerader Schüleranzahl muß der AG-Leiter mitspielen.
Nach dem Erläutern der Spielregeln wird an der Tafel ein Musterspiel vorgeführt, um abzusichern, daß wirklich alle Schüler die Spielregeln voll verstanden haben.
Den Schülern wird mitgeteilt, daß es stets um das Beantworten folgender *Fragen* geht:

- Kann bei diesem Spiel einer der beiden Spieler den Sieg stets erzwingen (ohne dabei auf Fehler des Gegners angewiesen zu sein)?
- Kann der Anziehende A oder der Nachziehende B stets gewinnen?
- Wie lautet die Gewinnstrategie, falls eine solche existiert?

In einer *ersten Phase* "freien" Spiels sollen die Schüler mit dem Spiel hinreichend vertraut werden und zu einer Vermutung gelangen, ob ein "Spiel mit Gewinnstrategie" vorliegt oder nicht. Notfalls teilt der AG-Leiter am Ende einer entsprechenden Diskussion mit, welcher der beiden Spieler stets gewinnen kann.
In einer *zweiten Spielphase* sollen möglichst viele Schüler die entsprechende Gewinnstrategie selbst entdecken. Wer der Meinung ist, das geschafft zu haben, darf gegen den AG-Leiter antreten.

In der dann folgenden *Auswertung* werden wiederum Musterspiele an der Tafel vorgeführt mit dem Ziel, daß nunmehr alle Schüler die Gewinnstrategie entdecken. Notfalls tritt hier der AG-Leiter als "unschlagbarer Spieler" auf und lenkt den Entdekkungsprozeß.
Abschließend wird (durch Abwandeln der Spielregeln) eine andere *Variante* des Spiels betrachtet, und die Schüler werden aufgefordert, durch analoges Vorgehen die entsprechende Gewinnstrategie zu entdecken und zu formulieren. Dies wird in der Regel im zweiten der beiden Zirkel erfolgen, in dem die Schüler auch aufgefordert werden, selbst neue Varianten des Spiels zu erfinden.

Eine nachträgliche *Analyse* eines Spiels in Hinblick auf Fehlzüge ist nur möglich, wenn dieses Spiel anhand eines "Spielprotokolls" reproduzierbar ist. Viele Schüler dürften eine solche Notation vom Schachspiel her kennen. Man sollte sie auffordern, für das jeweilige Spiel selbst günstige *Notationen* zu erfinden, wobei ihnen bewußt werden sollte, daß es hierbei wieder um das *"Einführen günstiger Bezeichnungen"* geht, das auch beim Lösen vieler mathematischer Aufgaben eine sehr wichtige Rolle spielt.

Es ist durchaus möglich, daß einige Schüler die zu behandelnden Spiele aus Arbeitsgemeinschaften der Klasse 3 oder 4 bereits kennen. In diesem Fall gilt auch hier die Regel: Wer die "Lösung" kennt, darf sie nicht verraten; er darf lediglich Impulse geben oder Fragen stellen. Man kann solche Schüler als "Schiedsrichter" einsetzen, die darüber wachen, daß korrekt gespielt wird, oder man kann sie als Mitspieler solchen Schülern zuteilen, die die Gewinnstrategie noch nicht kennen.

Wir wollen nun jeweils solche Spiele zu einer Gruppe zusammenfassen, deren Gewinnstrategie sich durch dieselbe heuristische Vorgehensweise gewinnen läßt.

## 4.1. Zum Rückwärtsarbeiten

"HUNDERT GEWINNT"

*Regeln:*
A nennt eine der Zahlen von 1 bis 7 .
B addiert zu der genannten Zahl eine der Zahlen von 1 bis 7 und nennt die entsprechende Summe.
A addiert zu dieser Summe eine der Zahlen von 1 bis 7 und nennt die neue Summe; usw.
Gewonnen hat derjenige Spieler, der die Zahl 100 als Summe nennt.

Auszug aus dem *Protokoll* eines regelgerecht abgelaufenen Spiels:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 15 | 26 | .... | 72 | 82 | 89? | 95 | |
| B | 8 | 21 | 28 | .... | 76! | 87? | 92! | 100 | gewinnt |

(Dabei wurden nachträglich "gute" Züge durch "!" , "schlechte" Züge durch "?" gekennzeichnet.)

*Impulse:*

- Welche Zahl müßte ich (im vorletzten Zug) nennen, um dann (im letzten Zug) mit Sicherheit "100" sagen zu können? Begründung!
  [ Wenn ich 92 nenne, dann muß mein Gegner nach Spielregel eine der Zahlen von 93 bis 99 nennen, und ich kann dann mit Sicherheit gewinnen] .
- Welche Zahl müßte ich nennen, um dann im nächsten Zug die Gewinnzahl 92 nennen zu können? Begründung! usw.

*Gewinnstrategie für A :*
Nenne als erste Zahl die 4 und dann stets folgende "Gewinnzahlen" (die jeweils den Abstand 7 + 1 = 8 voneinander haben):

4 → 12 → 20 → 28 → 36 → ... → 68 → 76 → 84 → 92 → $\boxed{100}$

*Varianten:*

Summanden von 1 bis 10 ; 100 gewinnt; [ A beginne mit 1 ] .
Summanden von 1 bis 6 ; 50 gewinnt; [ A beginne mit 1 ] .
Summanden von 1 bis 7 ; 40 gewinnt;
[ B kann im 1. Zug 8 sagen und so gewinnen] .

*Allgemein:*
Summanden von 1 bis k ; n gewinnt, wobei $1 < k < n$ gilt.
Die gewinnbringende Anfangszahl ist gleich dem Rest, den n bei Division durch (k+1) läßt. Ist dieser Rest gleich 0 , kann B gewinnen, sonst kann stets A gewinnen.

Beim Spiel "HUNDERT VERLIERT" sollen analoge Regeln wie beim Spiel "Hundert gewinnt" gelten. Die Schüler sollen selbst merken, daß nach diesen Spielregeln aber kein Spieler gezwungen werden kann, die 100 zu nennen. Daher würde ein derartiges Spiel stets unentschieden enden. Man vereinbart daher, daß derjenige Spieler verloren hat, der die 100 oder eine größere Zahl nennt.

*Impulse:*

- Läßt sich meine Aufgabe (Finden einer Gewinnstrategie) auf eine bereits gelöste Aufgabe zurückführen?
  - ° Läßt sich die für "Hundert gewinnt" gefundene Spielstrategie irgendwie für das neue Spiel verwenden?

Die Schüler müssen erkennen und begründen, daß laut Spielregel das so festgelegte Spiel "Hundert verliert" äquivalent ist zum Spiel "Neunundneunzig gewinnt" .
Abschließend wird der AG-Leiter zu vorgegebenem k und n sowie zu "gewinnt" und "verliert" die Schüler jeweils die gewinnbringende Anfangszahl sowie die konstante Differenz der Gewinnzahlen ermitteln lassen.
Als *"Differenzierungsaufgabe"* für besonders leistungsstarke Schüler kommt der Auftrag in Frage, eine Regel zum Ermitteln solcher k und n zu finden, für die bei " n verliert" der Spieler B gewinnt.

## "N I M M - S P I E L I"

*Regeln:*
Vor den Spielern A und B liegt ein Häufchen von 18 (m) Hölzern.
Die Spieler nehmen abwechselnd Hölzchen weg, und zwar stets mindestens eines und höchstens 3 (k) .
Gewonnen hat derjenige Spieler, der das letzte Hölzchen wegnimmt.

Bei der Suche nach einer Gewinnstrategie kann man *analog* vorgehen wie bei "Hundert gewinnt", d.h. durch *Rückwärtsarbeiten* die "Folge der Gewinnzahlen" und damit auch die "gewinnbringende Anfangszahl" ermitteln.
Für m = 18 und k = 3 kann man die Ermittlung dieser Gewinnzahlen in Form eines "Lösungsgraphen" festhalten, wenn geklärt ist, daß in diesem Fall die Zahl 0 als Ziel gilt:

| Start | | Teilziele | | | | Ziel |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (18) | → | 16 | → 12 | → 8 | → 4 | → [0] |

Durch andere Wahl von m und k lassen sich *Varianten* des Spiels bilden; man kann auch vereinbaren, daß der Spieler verliert, der das letzte Hölzchen wegnimmt.
Besonders hoch ist die Leistung eines Schülers einzuschätzen, der die strukturelle Gleichheit dieses Spiels mit "Hundert gewinnt" erkennt und die von dort bekannte Gewinnstrategie sofort überträgt. Auf jeden Fall sollte der AG-Leiter in einer abschließenden Diskussion derartige "Gemeinsamkeiten" entdecken lassen: Würde man die Regeln so fassen, daß Hölzchen auf das Häufchen gelegt werden und derjenige gewinnt der das n-te Hölzchen legt, dann wären dies genau die Regeln von "Hundert gewinnt".

## "H8 G E W I N N T"

*Regeln:*
Auf einem Schachbrett steht ein Stein auf dem Feld a1 .
Die Spieler A und B schieben diesen Stein abwechselnd auf ein zum Ausgangsfeld benachbartes Feld; dabei sind nur Züge nach rechts, nach oben oder nach rechts oben erlaubt.
Es hat derjenige Spieler gewonnen, der den Stein auf das Feld h8 schiebt.

Das Protokollieren eines solchen Spiels kann wie beim Schachspiel erfolgen, z.B.:
1) a2; b3 2) c3; d4 3) e4; e5 usw.

*Impulse:*

- Welches Feld müßte ich (im vorletzten Zug) erreichen, um dann (im letzten Zug) mit Sicherheit h8 erreichen zu können? Begründung!
  - ° Welche Felder sind "Verlustfelder" (d.h. Felder, auf die ich nicht ziehen darf, weil sonst mein Gegner gewinnt)?

[ Ich darf nicht auf die Verlustfelder g7 , g8 , h7 ziehen, weil sonst mein Gegner im nächsten Zug h8 erreicht und damit gewinnt. Ich kennzeichne diese Verlustfelder mit einem "-" .
f7 ist für mich ebenfalls ein Verlustfeld, weil dann mein Gegner auf f8 zieht und ich anschließend auf das Verlustfeld g8 ziehen muß.
Analog erkenne ich, daß auch g7 ein Verlustfeld ist.
Die Felder f6 , f8 und h6 sind dann jedoch "Gewinnfelder", weil von ihnen ausgehend mein Gegner stets auf ein Verlustfeld ziehen muß. Ich kennzeichne die Gewinnfelder mit "+" .] .

| | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 6 | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 5 | - | - | - | - | - | - | - | |
| 4 | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 3 | - | - | - | - | - | - | - | - |
| 2 | - | + | - | + | - | + | - | + |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | - |

- Welches Feld (welche Felder) müßte ich erreichen, um dann im nächsten Zug mit Sicherheit auf ein Gewinnfeld gelangen zu können?

[ Analog vorgehend finde und kennzeichne ich die weiteren Verlust- und Gewinnfelder. Auf diese Weise erkenne ich, daß A stets gewinnen kann. ] .

*Gewinnstrategie für A:*
Ziehe mit dem ersten Zug nach b2 und ziehe dann jeweils so, wie dein Gegner gezogen hat (nach rechts, nach oben oder nach rechts oben). (Auf diese Weise gelangst du stets auf ein Gewinnfeld und damit schließlich auf h8.)

*Strategie für B:*
B muß auf einen Fehler von A warten, der u.U. in Unkenntnis der Gewinnstrategie auf ein Verlustfeld zieht. In diesem Fall muß B sofort ein Gewinnfeld besetzen (was in jedem Fall möglich ist) und dann die oben angegebene Gewinnstrategie befolgen.
Dem oben angegebenen Spielprotokoll ist zu entnehmen, daß beide Spieler die Gewinnstrategie nicht kennen, weil beide bis zum 3. Zug nur "Fehlzüge" gemacht haben.

Das Spiel " H8 VERLIERT " hat analoge Regeln, die Gewinnstrategie für A läßt sich analog finden. Beim schrittweisen Ermitteln der Verlust- und Gewinnfelder achte man auf korrekte Begründungen:
Wenn h8 Verlustfeld, dann g8 und h7 Gewinnfelder, weil..... ; dann f7 , f8 , g6 , g7, h6 Verlustfelder, weil ... ; usw. .

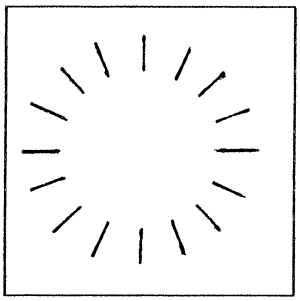
| | a | b | c | d | e | f | g | h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | + | - | + | - | + | - | + | - |
| 7 | - | - | - | - | - | - | - | + |
| 6 | - | + | - | + | - | + | - | - |
| 5 | - | - | - | - | - | - | - | + |
| 4 | - | + | - | + | - | + | - | - |
| 3 | - | - | - | - | - | - | - | + |
| 2 | - | + | - | + | - | + | - | - |
| 1 | - | - | - | - | - | - | - | + |

## 4.2. Zum Symmetrieprinzip

### NIMMSPIEL II

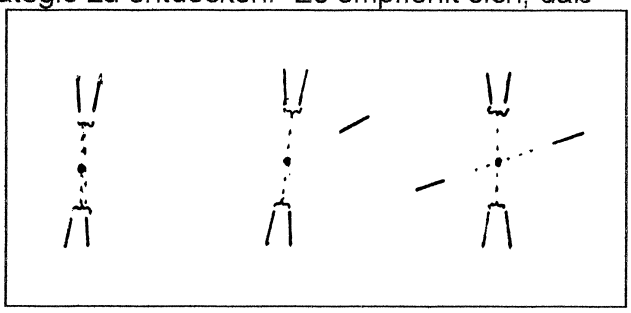
*Regeln:*

Es werden 30 (eine gerade Anzahl) Hölzer so im Kreis angeordnet, wie dies in der Skizze angedeutet ist.



Die Spieler A und B nehmen abwechselnd entweder genau ein Holz oder zwei benachbarte Hölzer weg. (Zwei Hölzer heißen benachbart, wenn sie weder durch andere Hölzer noch durch entstandene Lücken getrennt werden.)
Gewonnen hat derjenige Spieler, der das letzte Hölzchen wegnimmt.

Rückwärtsarbeiten allein führt hier nicht zum Ziel.
Nur wenn man ganz spezielle Gewinn- bzw. Verluststellungen betrachtet, besteht die Wahrscheinlichkeit, die Gewinnstrategie zu entdecken. Es empfiehlt sich, daß der AG-Leiter den Schülern eine Folge von "Endspielstellungen" vorgibt und entscheiden läßt, ob es sich um Gewinn- oder Verluststellungen handelt (vgl. nebenstehende Abbildungen).So können sie erkennen, daß hier die *"Symmetrie"* eine wichtige Rolle spielt.
Abschließend gebe man folgenden



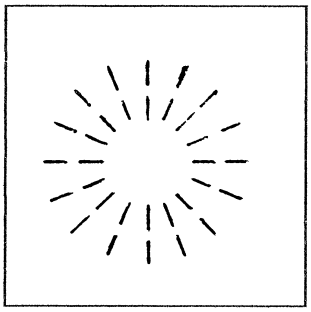
*Impuls:*

- Untersuche, ob sich vorhandene oder erzeugte Symmetrien für das Finden einer Gewinnstrategie ausnützen lassen!

*Gewinnstrategie für B :*

Nimm Hölzer stets so weg, daß eine zentralsymmetrische Figur entsteht.

*Varianten:*



- Anzahl der wegzunehmenden Hölzer ändern.
- Hölzer in mehreren konzentrischen Kreisen anordnen.
- Anzahl der Hölzer ändern.

Man sollte die Schüler auffordern, selbst Varianten vorzuschlagen und dabei nach solchen Varianten zu suchen, wo der Anziehende gewinnt, falls er die Gewinnstrategie beherrscht. (Dies ist z.B. der Fall, wenn auch im Symmteriezentrum ein Holz liegt, das A im ersten Zug nehmen muß, um dadurch für B eine Verluststellung zu erzeugen.) Vor allem sollte auch die Variante mit ungerader Hölzerzahl und keinem Holz im Symmetriezentrum behandelt werden. Natürlich kann auch die Variante betrachtet werden, bei der derjenige Schüler verliert, der das letzte Holz nimmt.

### "NUR KEIN RECHTECK"

*Regeln:*

Jeder der beiden Spieler A und B verwendet ein bestimmtes Symbol (z.B. "+" bzw. "#" ), um die Felder eines 6x6-Spielfeldes zu füllen.
Die Spieler setzen abwechselnd ihr Symbol in ein beliebiges leeres Feld.

Verloren hat derjenige Spieler, der mit seinen Symbolen zuerst die Eckpunkte eines Rechtecks markiert, dessen Seiten parallel zur Spielfeldberandung verlaufen.

Will man Spielverläufe protokollieren, dann bietet sich die beim Schach übliche Notation an. Man muß hier die Schüler anhalten, nach jedem Zug sorgfältig zu prüfen, ob nicht schon ein Rechteck entstanden ist; erfahrungsgemäß besteht die Gefahr, daß dies übersehen wird.

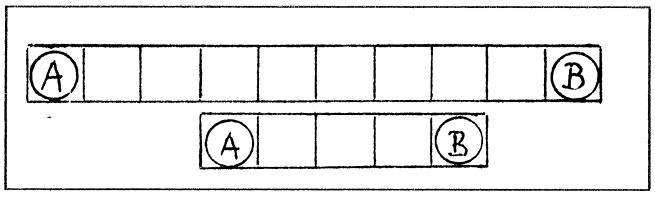
Das Anwenden des *Symmetrieprinzips* führt zu einer *Gewinnstrategie für B :*
Wiederhole alle Züge des Gegners zentralsymmetrisch zum Mittelpunkt des Spielfeldes; denn auf diese Weise kannst du nur dann ein Rechteck bilden, wenn dies der Spieler A im Zug zuvor getan hat.

Hier ist die Frage interessant, ob dieses Spiel auch unentschieden enden kann.
Bisher haben wir lediglich nachgewiesen, daß B nicht verlieren kann, wenn er die angegebene Strategie befolgt. Es ist jedoch nicht von vornherein auszuschließen, daß man alle Felder des 6x6-Spielbretts so mit 18 mal "+" und mit 18 mal "#" füllen kann, daß mit keinem der beiden Symbole ein Rechteck entsteht.
Der Nachweis, daß dies tatsächlich nicht geht, d.h. daß B bei Befolgung der Strategie stets gewinnt, ist zu schwierig, um mit Schülern dieser Klassenstufe behandelt zu werden. Wichtig ist nur, daß die Schüler die Berechtigung einer solchen Frage einsehen.

Als erste *Variante* betrachten wir dieses Spiel auf einem *5x5-Spielfeld* .
Hier liegt die Vermutung nahe, daß A gewinnt, wenn er im 1. Zug das Zentralfeld besetzt und dann die oben beschriebene Strategie befolgt. Daß diese Vermutung falsch ist, wird durch ein Demonstrationsspiel zwischen dem AG-Leiter und einem Schüler nachgewiesen: Bei klugem Spiel kann B - falls A die genannte Strategie konsequent verfolgt - doch gewinnen. Das zeigt folgende Spielverlauf:
1) c3; c5 2) c1; a5 3) e1; a3 . Seiner Strategie folgend müßte jetzt A das zu a3 zentralsymmetrisch gelegene Feld e3 besetzen und hätte verloren, weil er dann das Rechteck c3 , c1 , e1 , e3 gebildet hat. Damit ist gezeigt, daß die genannte Spielstrategie hier keine Gewinnstrategie ist.
Als weitere *Varianten* betrachte man Spiele auf unterschiedlichen mxn-Spielfeldern. Die Schüler sollen erkennen, daß die oben angegebene Strategie genau dann eine Gewinnstrategie ist, wenn das Spielfeld kein zentrales Mittelfeld besitzt, d.h. wenn m oder n eine gerade Zahl ist. Für das Spiel auf quadratischen Spielfeldern mit ungerader Felderanzahl ist keine Gewinnstrategie bekannt.

## GROSCHENSPIEL

*Regeln:*
Jeder der beiden Spieler besitzt zwei gleichartige Spielsteine (z.B. Zahl- bzw. Wappen eines Groschens), die zu Spielbeginn wie nebenstehend angegeben auf den beiden Spielbahnen verteilt sind.




A und B verschieben abwechselnd jeweils einen ihrer Steine in einer der beiden (vom Spieler gewählten) Bahn. Der Stein darf jeweils über beliebig viele leere Felder nach links oder nach rechts verschoben werden (d.h. der gegnerische Stein darf nicht übersprungen werden).
Gewonnen hat derjenige Spieler, der seinen Gegner in jeder der beiden Spielbahnen in die Ecke getrieben hat, so daß dieser keinen erlaubten Zug mehr tun kann.

Um den Schülern die Suche nach einer Gewinnstrategie zu erleichtern, kann man ihnen auch hier günstig gewählte "Endspielsituationen" vorgeben und entscheiden lassen, welcher der beiden Spieler gewinnen kann und wie er dabei vorgehen muß:

- Was würde geschehen, wenn A seinen Gegner sofort im ersten Zug in einer der beiden Bahnen in der Ecke festklemmen würde?
  - ° Warum würde dieser Zug zum Verlust für A führen?
  - ° Wie müßte B spielen, um in diesem Fall zu gewinnen?

Daß auch bei diesem Spiel das Symmetrieprinzip eine entscheidende Rolle spielt, ist wohl nicht auf den ersten Blick zu erkennen.

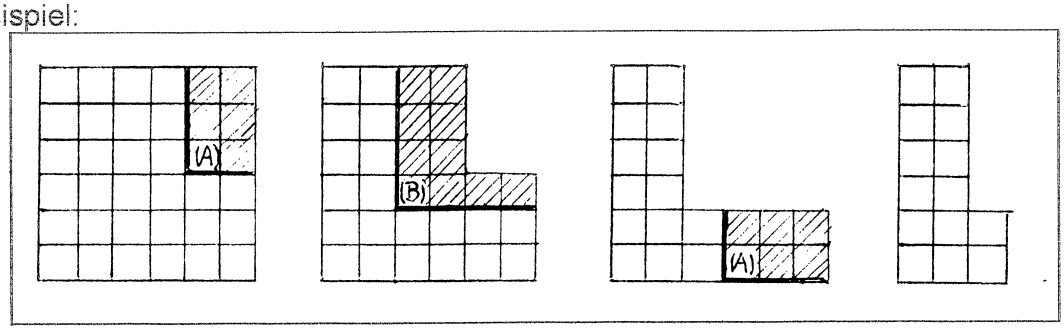
*Gewinnstrategie für A :*
Rücke im 1. Zug in der oberen Bahn deinen Stein um 5 Felder nach rechts (so daß jetzt in beiden Bahnen die gleiche Spielstellung vorliegt).
Rückt B in einer der Bahnen um n Felder nach links, dann rücke in der anderen Bahn um n Felder nach rechts (so daß wieder in beiden Bahnen die gleiche Spielstellung vorliegt).
Rückt B in einer der Bahnen um n Felder nach rechts, dann rücke in derselben Bahn ebenfalls um n Felder nach rechts (womit du deinen Gegner "in die Ecke treibst").

Die Schüler müssen begründen, warum diese Strategie tatsächlich stets für A zum Gewinn führt.
Man könnte die Spielbahnlängen variieren und die Schüler fragen, ob man die beiden Spielbahnlängen so wählen kann, daß für B eine Gewinnstrategie existiert. Das wäre bei gleich langen Bahnen der Fall, was man durch Anwendung des *Rückführungsprinzips* sofort nachweisen kann.

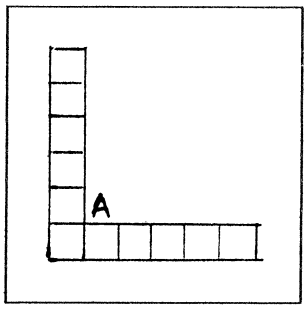
## K N A C K

*Regeln:*
Gegeben ist ein quadratisches nxn-Spielfeld (auf Kästchenpapier).
Spieler A wählt ein beliebiges Kästchen (A) dieses Spielfeldes und "knackt" dieses Kästchen sowie alle Kästchen, die rechts oder oberhalb oder oben rechts von (A) liegen , aus dem Spielfeld heraus (vgl. Abbildung).
Dann wählt B aus dem verbliebenen L-förmigen Spielfeld ein Kästchen (B) und knackt ebenfalls dieses Kästchen sowie alle Kästchen, die rechts oder oberhalb oder oben rechts von (B) liegen, aus dem Spielfeld heraus.
Dann wählt wieder A ein Kästchen des verbliebenen Spielfeldes, usw. .
Gewonnen hat derjenige Spieler, der seinen Gegner zwingt, das "vergiftete" Kästchen in der linken unteren Ecke zu wählen und damit das gesamte verbliebene Spielfeld zu "verschlucken".

Beispiel:



Auch hier hilft das Betrachten einer speziellen *"Endspielsituation"*, um eine Gewinnstrategie zu entdecken:




Wenn A im 1. Zug das Kästchen b2 wählt, dann kann er stets gewinnen. Warum? Könnte auch hier das Symmetrieprinzip helfen?
In der Tat braucht A nur die Züge von B symmetrisch zu parieren, um zu gewinnen; er braucht jeweils nur das gleiche Stück von der anderen Seite abzuknacken. Am Ende bleibt dem Gegner nur noch das vergiftete Kästchen a1 zum Knacken übrig.

*Varianten:*
Zunächst untersuche man das Spiel auf einem 2xn-Spielbrett. Hier sollten die Schüler die Gewinnstrategie für A selbständig entdecken: Im 1. Zug knackt A nur das rechte obere Feld n2 heraus. Dann muß er nach jedem Zug von B wieder eine solche "Treppenform" herstellen, in der die obere Reihe genau ein Kästchen kürzer ist als die untere Reihe.
Aus Symmetriegründen gibt es auf nx2-Spielfeldern für Spieler A eine analoge Gewinnstrategie.
Für allgemeine mxn-Spielfelder ist noch keine Gewinnstrategie bekannt. Man kann zwar für spezielle Situationen spezielle Gewinnzüge finden, dies interessiert uns aber an dieser Stelle nicht.

## RIP-van-WINKLE-SPIEL

Einleitend wird den Schülern folgendes mitgeteilt:
Ein altes dänisches Kugelspiel, von dem das moderne Bowling abstammt, wurde mit 13 Kegeln gespielt, die alle in einer Reihe nebeneinander aufgestellt wurden. Der Abstand war so gering, daß man mit einem geschickten Wurf nicht nur einen, sondern sogar zwei benachbarte Kegel umwerfen konnte. Zwei Spieler kegelten abwechselnd, jeder hatte jeweils einen Wurf, und es kam bei dem Spiel darauf an, wer den letzten Kegel umwarf; der hatte gewonnen.
RIP VAN WINKLE war ein besonders geschickter Spieler, der eine Gewinnstrategie gefunden hatte, die wir jetzt auch entdecken wollen.
Zunächst werden die Schüler aufgefordert, ein mathematisches Spiel zu formulieren, das diesem Sportspiel in Hinblick auf die anzuwendende Strategie *äquivalent* ist. So könnte man etwa die Kegel aufzeichnen und das Umfallen der Kegel durch Durchstreichen kennzeichnen. Anstelle der gezeichneten Kegel würden auch Kästchen oder gar Striche reichen, wichtig wäre nur, daß diese durchnumeriert sind. Daher kann man sogar auf die Striche verzichten und nur mit Zahlen arbeiten. Zu unserem Spiel gehören dann folgende

*Regeln:*
Gegeben ist die Folge der Zahlen 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 .
Die Spieler A und B streichen abwechselnd entweder genau eine oder genau zwei benachbarte Zahlen.
Gewonnen hat derjenige Spieler, der die letzte Zahl streicht.

*Impulse:*
- Welche Strategien habe ich bei der Suche nach Gewinnstrategien bei Spielen bisher angewendet?
  [ Rückwärtsarbeiten, Symmetriestrategie, systematisches Probieren ] .
- Welche dieser Strategien könnte hier nützlich sein? [ Symmetriestrategie ] .
- Wie läßt sich hier eine Symmetrie erzeugen, die mir den Gewinn ermöglicht?

Kann A oder B einen derartigen Gewinn erzwingen?

° Bei welchen Spielen habe ich die Symmetriestrategie bereits erfolgreich eingesetzt? Kann ich hier analog vorgehen?

*Gewinnstrategie für A:*
Streiche im 1. Zug die "7" . (Die übriggebliebenen Zahlen liegen bezüglich der "7" symmetrisch).
Streiche in der folgenden Zügen jeweils diejenigen Zahlen, die zu den von B gestrichenen Zahlen bezüglich der "7" symmetrisch liegen. (Dann kann B niemals die letzte Zahl streichen.)

*Varianten:*
Änderung der Gesamtzahl der Kegel oder der Anzahl der Kegel, die bei einem Wurf getroffen werden können. Eine Übertragung der Gewinnstrategie auf diese Varianten ist leicht möglich.

Man beachte, daß dieses Spiel im vorletzten Zirkel behandelt wird.
Dies ermöglicht eine bewußte Besinnung auf früher erfolgreich eingesetzte Strategien oder Prinzipien bei der Suche nach einer Gewinnstrategie für ein Spiel. Die Schüler sollen merken, daß hier weder das Rückwärtsarbeiten noch das systematische Aufstellen eines Spielbaums erfolgversprechend sind, weil dies sehr rasch zu sehr großen Anzahlen von zu analysierenden Stellungen führt. In diesem Zirkel sollte der AG-Leiter die Schüler zu einem bewußten Einsatz bekannter Strategien auffordern, hinreichend Zeit zum Probieren lassen, nur notfalls hilfreiche Impulse geben, dafür aber die selbständige Tätigkeit der Schüler aufmerksam beobachten, um Aufschlüsse über die von ihnen erworbenen heuristischen Fähigkeiten zu gewinnen.
Bei der Diskussion möglicher *Spielvarianten* sollte man die Schüler fragen, ob sich nicht auch die Art der Aufstellung der Kegel variieren läßt: Die Schüler sollen entdecken, daß bei kreisförmiger Aufstellung der Kegel (wobei die Spieler im Mittelpunkt des Kreises stehen) das Rip-van Winkle-Spiel mit dem Nimm-Spiel II äquivalent ist. U.U. wurde beim Besprechen möglicher Varianten vom Nimm-Spiel II von den Schülern vorgeschlagen, von der kreisförmigen Anordnung der Hölzer zu einer linearen überzugehen. Dies würde das Finden der Gewinnstrategie für das Rip-van-Winkle Spiel natürlich sehr erleichtern.
Die Schüler sollen erkennen, daß es verschiedenartige "Verwandtschaften" zwischen Spielen gibt. Der Unterschied zwischen "Hölzchenspielen" (Nimm-Spiel I, Nimm-Spiel II, u.U. Rip-van Winkle-Spiel) und "Zahlenspielen" (Hundert gewinnt, 2-Haufen-Spiel, u.U. Rip-van-Winkle Spiel) sollte als unwesentlich erkannt werden. Wesentlich wichtiger ist die Verwandtschaft in Hinblick auf die anwendbaren Strategien.

## 4.3. Zum systematischen Probieren

### KLEIN TRLENKA

Zur Erläuterung teile man den Schülern mit:
In der Slowakei liegt das Tal Trlenska dolina. Dort wurde im Juli 1979 ein internationales Spezialistenlager abgehalten, in dem erstmals ein Spiel durchgeführt wurde, das für dieses Lager erdacht und nach dem Gebirgstal benannt wurde. Trlenka wird auf einem 4x4-Felderbrett gespielt. Eine Gewinnstrategie ist recht schwer zu finden. Wir spielen daher als einfachere Variante Klein-Trlenka auf einem 3x3-Felderbrett.

*Regeln:*
Jeder der beiden Spieler A und B verwendet ein bestimmtes Symbol (z.B. "+" und "#"), um die Felder eines 3x3-Felderbretts zu füllen.
Die Spieler kennzeichnen abwechselnd bei jedem Zug entweder 1 , 2 oder 3 freie Felder einer Zeile oder einer Spalte jeweils mit ihrem Zeichen. Man darf dabei auch zwei Felder einer Zeile bzw. Spalte belegen, die zwischen sich ein Leerfeld oder ein gegnerisches Zeichen haben.
Verloren hat derjenige Spieler, der gezwungen ist, das letzte Feld zu kennzeichnen.

*Beispiel* für eine regelgemäß durchgeführte Partie, in der A im 3. Zug verloren hat:

| | | |
|---|---|---|
| | + | |
| | + | |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | + | |
| | + | # |
| | | # |

| | | |
|---|---|---|
| | + | |
| | + | # |
| + | + | # |

| | | |
|---|---|---|
| # | + | |
| # | + | # |
| + | + | # |

| | | |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | + | # |
| # | + | # |

Durch *Rückwärtsarbeiten* erkennt man leicht, daß für den am Zug befindlichen Spieler "8 Felder besetzt" stets eine Verluststellung, "7 Felder besetzt" stets eine Gewinnstellung ist.
Die Untersuchung aller möglichen Spielsituationen zu "6 Felder besetzt" ist bereits wesentlich mühseliger, es besteht die Gefahr, daß nicht alle Situationen analysiert werden. Wir müssen daher eine Möglichkeit finden, *systematisch* alle möglichen Fälle zu erfassen. Dabei brauchen wir von mehreren Stellungen, die sich durch eine Spiegelung oder Drehung oder Vertauschen von Zeilen und/oder Spalten ineinander überführen lassen, offensichtlich immer nur eine zu betrachten. Aus einer Klasse solcher *"äquivalenten"* Stellungen wählen wir als "genormten Vertreter" diejenige Stellung aus, die bei dem Ordnungsprinzip "oben vor unten - dann links vor rechts" am Anfang steht.
Statt alle verschiedenen Möglichkeiten für "7 Felder besetzt" kann man auch alle verschiedenen Möglichkeiten für "2 Felder frei" ermitteln, wobei letzteres offensichtlich weniger Aufwand erfordert.
Nachdem sich die Schüler in der ersten Spielphase mit dem Spiel vertraut gemacht haben, werden sie wohl vermuten, daß A stets gewinnen kann, sie werden aber auch bemerken, daß A leicht Fehler machen und dadurch verlieren kann.
Wir stellen uns das Ziel, durch *systematisches Vorgehen* die Gewinnstrategie zu ermitteln. Das Prinzip des Vorgehens sollte man schon im ersten der beiden Zirkel klären, so daß die Schüler die Möglichkeit haben, zu Hause selbständig weiterzuknobeln.

*Impulse:*

- Wie viele Stellungen "8 Felder besetzt" gibt es?
  - ° Ich untersuche statt dessen den gleichbedeutenden, aber einfacheren Fall "1 Feld frei". [ Dafür gibt es offensichtlich 9 Stellungen ] .

- Wie viele dieser Stellungen sind voneinander verschieden (nicht äquivalent)?
  [ Hier ist offensichtlich, daß man alle Stellungen durch Vertauschen von Zeilen und/oder Spalten in die "erste" (genormte) Stellung umwandeln kann, bei der das Feld links oben frei ist.
  Bei den Stellungen zu "2 Felder frei", "3 Felder frei" usw. ist die Entscheidung nicht mehr so einfach; hier kann ein "Unterimpuls" helfen. ]
  - Ich ordne alle möglichen Stellungen nach dem Prinzip "oben vor unten, dann links vor rechts". Ich streiche die 2. , 3. , ... Stellung, falls sie zur 1. Stellung äquivalent ist. Ich halte die k-te Stellung fest, wenn sie von der 1. Stellung verschieden ist. Die restlichen Stellungen vergleiche ich mit der 1. Stellung und der k-ten Stellung, usw.
- Welche der verschiedenen Stellungen ist eine Gewinnstellung, welche eine Verluststellung? Begründung! Entscheidung festhalten!
  [ Bei "1 Feld frei" ist diese eine Stellung für den am Zug befindlichen Spieler eine Verluststellung, da er gezwungen ist, das letzte Feld zu füllen und damit zu verlieren. Ich bezeichne diese Stellung mit V1. ]
- Wie viele verschiedene Stellungen "7 Felder besetzt" gibt es? [ 2 ] .
- Welche dieser Stellungen ist eine Gewinnstellung, welche eine Verluststellung? Begründung! Entscheidung festhalten!
  [ Beide Stellungen sind Gewinnstellungen, weil man durch Füllen eines der beiden leeren Felder dem Gegner die Verluststellung V1 vorsetzen kann. ]
- Wie viele verschiedene Stellungen "6 Felder besetzt" gibt es? [ 4 ] .

usw.

Man erkennt, daß eine dieser vier Stellungen eine Verluststellung ist und bezeichnet sie mit V2 .

Unter den 5 verschiedenen Stellungen "5 Felder besetzt" gibt es drei Verluststellungen, die mit V3 , V4 , V5 bezeichnet werden. Von den beiden Gewinnstellungen läßt sich die eine in V1 , die andere in V2 umwandeln. Wir notieren dies durch $G \rightarrow V1$ bzw. durch $G \rightarrow V2$ .

Beim Untersuchen der Stellungen zu " 4 , 3 , 2 , 1 Feld besetzt" nutzt man die Ergebnisse, die man bei " 5 , 6 , 7 , 8 Felder besetzt" erzielt hat, indem man die Fälle "4 , 3 , 2 , 1 Feld frei" untersuchte. Auf diese Weise erkennt man, daß nur noch eine einzige weitere Verluststellung V6 existiert, und daß dies die Stellung "1 Feld besetzt" ist.

*Gewinnstrategie für A:*

Fülle im 1. Zug genau ein (beliebiges) Feld, (womit du deinem Gegner die Verluststellung V6 vorsetzt).

Fülle im 2. Zug soviel Felder, daß dann genau 5 Felder besetzt sind und eine der drei Verluststellungen V3 , V4 , V5 entsteht (oder vermeide die beiden zugehörigen Gewinnstellungen).

Fülle im 3. Zug soviel Felder, daß dann genau 8 Felder gefüllt sind, d.h. setze deinem Gegner die Verluststellung V1 vor. (Die Kenntnis der Verluststellung V2 ist für einen Sieg von A nicht nötig!)

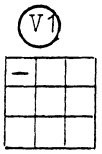
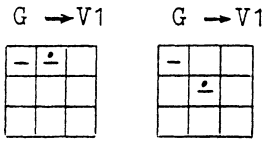
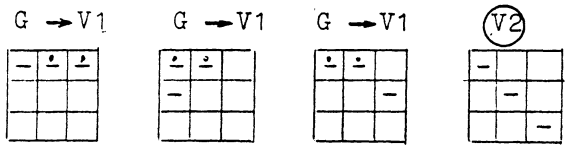
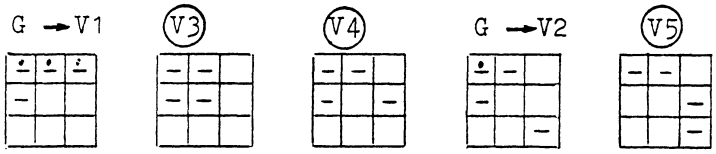
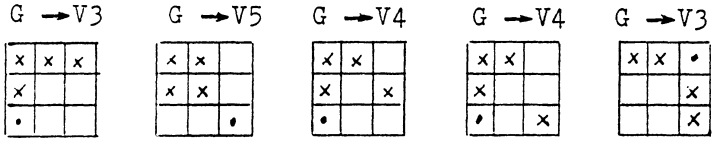
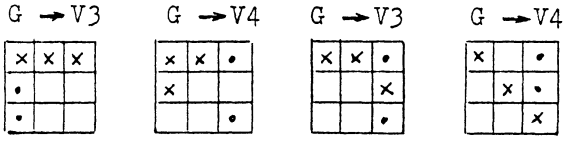
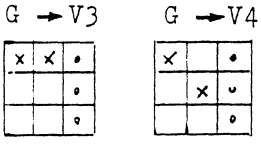
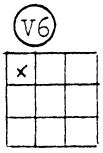
*Strategie für B:*

Versuche, deinem Gegner eine der Verluststellungen V2 , V3 , V4 , V5 vorzusetzen; dann kannst du ihm stets auch V1 vorsetzen und damit sofort gewinnen.

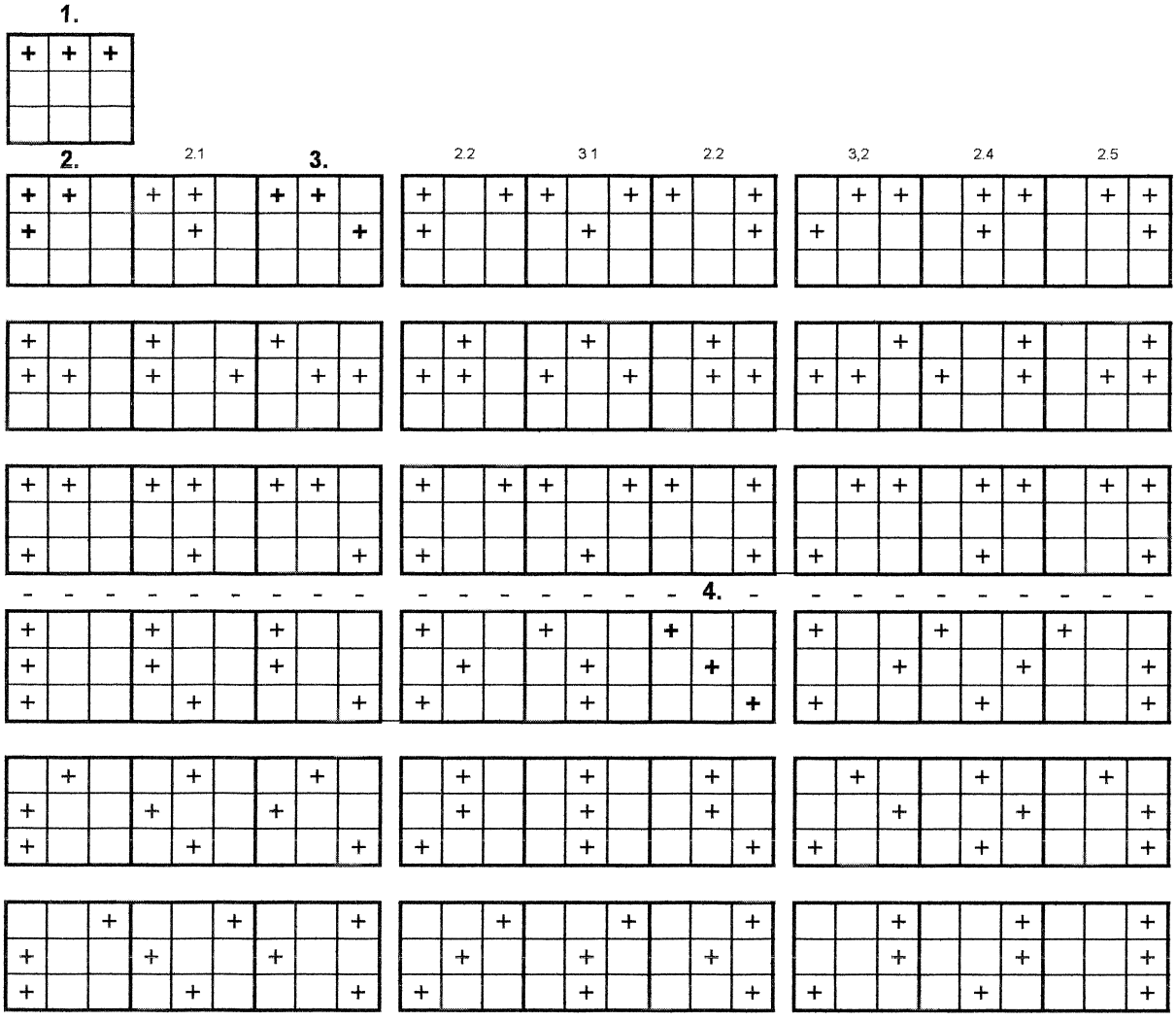
Diese Strategie ist erfolgreich, wenn A im 1. Zug zwei oder drei Felder füllt oder im 2. Zug keine Verluststellung erzeugt.

Das Unterscheiden zwischen *äquivalenten* und *nicht äquivalenten* Stellungen ist für Schüler dieser Altersstufe keineswegs trivial und muß daher genau besprochen und auch geübt werden. Hierfür eignen sich die Stellungen " 3 Felder frei/besetzt".

*Überblick über Gewinnstellungen und Verluststellungen:*

| Anzahl der besetzten Felder | voneinander verschiedene Stellungen<br>G: Gewinnstellung für den Ziehenden<br>V: Verluststellung für den Ziehenden |
|---|---|
| 8 |   |
| 7 |   |
| 6 |   |
| 5 |   |
| 4 |   |
| 3 |   |
| 2 |   |
| 1 |   |

Das geschilderte Vorgehen ist aufwendiger, als auf den ersten Blick zu vermuten ist. Nur mit sehr leistungsstarken AGn und im arbeitsteiligen Verfahren kann es in vertretbarer Zeit bewältigt werden. Wichtig ist nur, daß die Schüler das Prinzip des Vorgehens erkennen. Ist dies der Fall, dann kann man ihnen ohne weiteres einen großen Teil der in der Tabelle auf S.119 festgehaltenen Resultate verraten.
Zunächst ist wichtig, daß die Schüler das genannte Ordnungsprinzip anwenden und das Resultat durch "Gruppenbildung" übersichtlich festhalten können. (Aus diesem Grund wurde in der folgenden Übersicht die 1. Stellung getrennt aufgeführt, während die folgenden 54 Stellungen als 2·[3·(3·3)] Gruppen festgehalten sind.) Dabei sollte man das Aufzählen aller möglichen Stellungen erst dann abbrechen, wenn man ganz sicher sein kann, daß keine "neuen" Stellungen mehr kommen können. (Dies geschieht hier, nachdem in jeder der drei Zeilen genau ein Feld gefüllt ist.)




Dann geht es darum, in der so gewonnenen Folge von Stellungen alle diejenigen herauszustreichen, die zu einer der vorhergehenden Stellungen äquivalent sind. Wenn man nicht sofort eine Bewegung erkennt, die zwei Stellungen ineinander überführt, dann muß man es mit (u.U. mehrfachem) Vertauschen von Zeilen und/oder Spalten versuchen.
So erkennt man, daß die erste und die zweite Stellung dieser Folge nicht äquivalent sind; sie werden (hier durch Fett-Druck) hervorgehoben und erhalten die Nummern

1. und 2. . Die dritte Stellung der Folge geht durch Vertauschen der ersten beiden Spalten auseinander hervor; sie wird "gestrichen" und erhält die Nummer 2.1 . Die vierte Stellung der Folge ist weder zu 1. noch zu 2. äquivalent, wird also hervorgehoben und erhält die Nummer 3. ; usw. . Erst die 35. Stellung der Folge ist weder zu 1. noch zu 2. oder 3. äquivalent und erhält daher die Nummer 4. , und unter den weiteren Stellungen der Folge taucht keine "neue" mehr auf. Auf diese Weise hat man nachgewiesen, daß es genau 4 verschiedene Stellungen mit 3 besetzten Feldern gibt.

Natürlich kann man sich die Frage stellen, ob man dieses Resultat nicht einfacher erhalten kann.
Es ist leicht einzusehen, daß folgende (Klassen von) 3 Stellungen nicht zueinander äquivalent sein können, weil sie sich nicht durch Vertauschen von Reihen (Zeilen oder Spalten) ineinander überführen lassen:
1. In einer Reihe sind alle drei Felder besetzt. [ z.B. Stellung 1. ]
2. In einer Reihe sind 2 Felder, in einer anderen Reihe ist ein Feld besetzt.
3. In jeder der 3 Reihen ist genau ein Feld besetzt. [ z.B.Stellung 4. ]
Es ist keinesfalls selbstverständlich, daß alle Stellungen von Typ 1. oder vom Typ 3. untereinander äquivalent sind, während es unter den Stellungen vom Typ 2. stets Paare von zwei nicht äquivalenten Stellungen gibt [ z.B. die Stellungen 2. und 3. ]

Analog läßt sich zeigen, daß es genau 5 verschiedene Stellungen mit 4 besetzten Feldern, genau 5 verschiedene Stellungen mit 5 besetzten Feldern, genau 4 verschiedene Stellungen mit 6 besetzten Feldern, genau 2 verschiedene Stellungen mit 7 besetzten Feldern und nur eine wesentliche Stellung mit 8 besetzten Feldern gibt.
Diese untereinander nicht äquivalenten Stellungen sind in der Tabelle auf S.119 festgehalten, wobei man vereinbart, daß ein leeres Feld mit "-", ein gefülltes mit "x" gekennzeichnet wird, und daß man stets den genormten Vertreter festhält. Durch "." wird angegeben, welche Felder man besetzen kann, um die jeweils angegebene Verluststellung zu erzeugen.

## 2 HAUFEN-SPIEL

Nach Angabe der ursprünglichen Formulierung der Spielregeln, wo mit durchnumerierten Spielsteinen gespielt wird, die auf zwei Haufen gelegt werden, fordere man die Schüler auf, die Regeln für ein gleichbedeutendes Zahlenspiel zu formulieren.

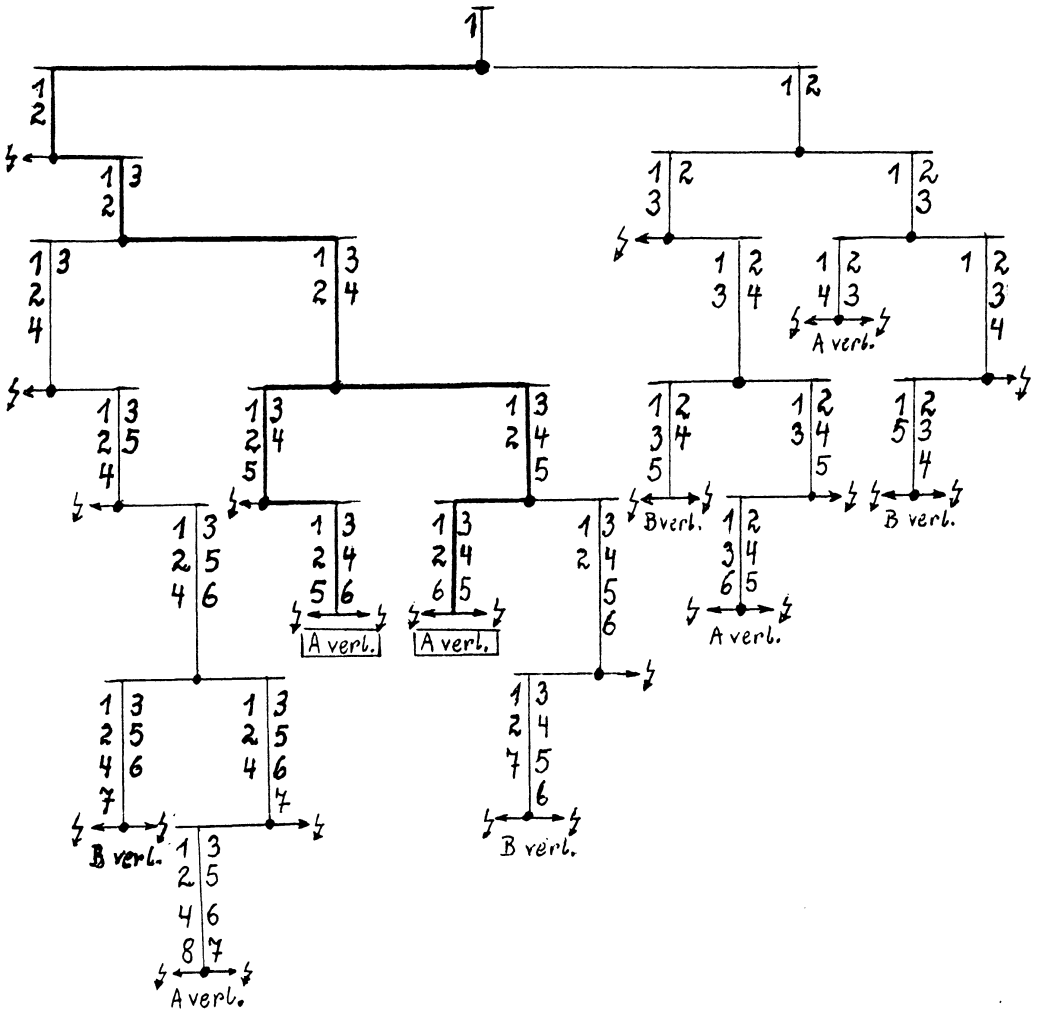
*Regeln:*
Zwei Spieler füllen eine zweispaltige Tabelle mit Zahlen. A trägt die ungeraden Zahlen 1 , 3 , 5 , ... in dieser Reihenfolge ein, B trägt die geraden Zahlen 2 , 4 , 6 , ... in dieser Reihenfolge ein.
A und B tragen abwechselnd genau eine ihrer Zahlen in eine beliebig gewählte Spalte ein. Dabei dürfen in keiner der beiden Spalten drei Zahlen auftreten, bei denen die Summe von zwei Zahlen gleich der dritten Zahl ist.
Verloren hat derjenige Spieler, der gezwungen ist, gegen diese Bedingung zu verstoßen.

*Beispiel:*
Bei dem nebenstehend protokollierten Spiel hat B verloren, weil er im 3. Zug die jetzt von ihm einzutragende Zahl 6 wegen 1 + 5 = 6 nicht in die linke Spalte, wegen 2 + 4 = 6 aber auch nicht in die rechte Spalte eintragen kann.

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 5 | 3 |
| | 4 |

Hier erweist es sich als günstig, vorwärtsarbeitend durch *vollständiges Erfasssen aller möglichen Spielstellungen* nach einer Gewinnstrategie zu suchen.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß A im 1. Zug seine "1" in die linke Spalte eingetragen hat.
Dann kann B seine "2" in die linke oder die rechte Spalte setzen. Im erstgenannten Fall darf A seine "3" nicht in die linke Spalte setzen (wegen 1 + 2 = 3 wäre die Bedingung verletzt), er ist gezwungen, die "3" in die rechte Spalte zu setzen. Im zweitgenannten Fall kann er beide Möglichkeiten nutzen.
An dieser Stelle kann man die Schüler mit dem Begriff "*Spielbaum*" vertrautmachen, der ein übersichtliches Festhalten solcher Fallunterscheidungen gestattet. Dabei verwenden wir zweckmäßigerweise einen reduzierten Spielbaum, in dem die "verbotenen" Fälle nicht festgehalten werden. "Verbotene" Züge halten wir durch "↯" fest.
Dem so entstandenen Spielbaum ist zu entnehmen, daß *B stets gewinnen kann*, wenn er mit seinen Zügen den stark ausgezogenen Weg beschreitet. B muß also in den ersten beiden Zügen seine Zahl in dieselbe Spalte schreiben, wie dies A getan hat, im 3. Zug dagegen in die andere Spalte.
Dem Spielbaum ist auch zu entnehmen, welche Strategie A verfolgen muß, wenn B die Gewinnstrategie nicht kennt.



## 4.4 Zum Rückführungsprinzip

Das Rückführungsprinzip wurde beim Behandeln von Varianten von Spielen bereits des öfteren eingesetzt. Dabei ging es um seine Anwendung beim Übertragen einer bekannten Gewinnstrategie auf ein neuen Spiel. Wenn man erkennt, daß "Hundert verliert" ein zu "Neunundneunzig gewinnt" äquivalentes Spiel ist, und wenn man die Gewinnstrategie zu "Zahl x gewinnt" kennt, dann hat man das Problem durch "Rückführung" gelöst.
Sehr deutlich läßt sich das Rückführungsprinzip demonstrieren beim Lösen der

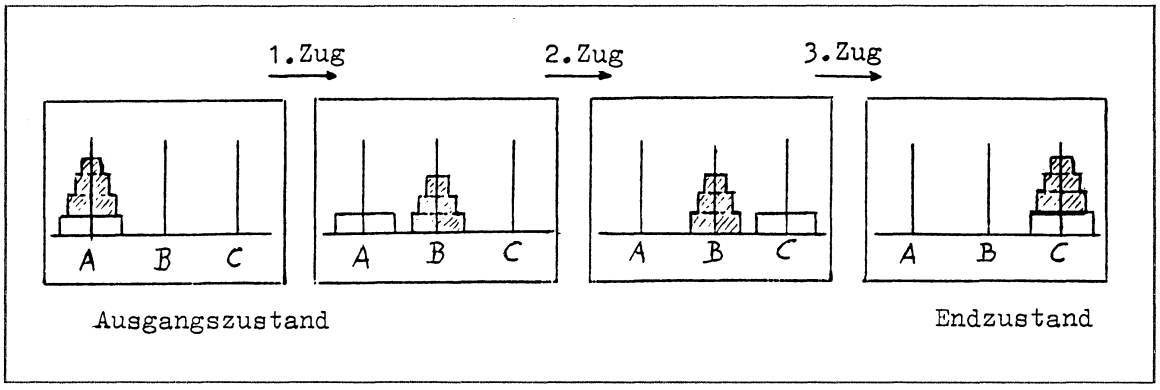
T U R M - V O N - H A N O I - A U F G A B E

Es handelt sich hierbei um ein recht bekanntes Einpersonenspiel. Die n Scheiben eines Turmes sind nach gewissen Regeln umzulegen, so daß ein neuer Turm entsteht, wobei man mit möglichst wenigen Zügen auskommen soll.
Es ist günstig, in der AG mit einem "Dreierturm" (n = 3) zu beginnen, wobei jeder Schüler die benötigte Zuganzahl notiert. Wer das Spiel schon kennt, darf zunächst noch nichts verraten. Wenn kein anderer Schüler die optimale Zugfolge von 7 Zügen findet, dann darf sie so ein "Kenner" vorführen.
Anschließend sollen die Schüler merken, daß man ohne Kenntnis einer übertragbaren Strategie die Aufgabe für n = 4 , n = 5 oder gar n = 6 nicht lösen kann.
Wir veranschaulichen die allgemeinen Regeln für der Fall n = 4 .

*Regeln:*
Der gegebene Anfangszustand ist durch Umlegen von Scheiben in den geforderten Endzustand überzuführen, vgl. untenstehende Abbildung. Dabei sind folgende Regeln zu beachten:

1. In jedem Zug muß genau eine Scheibe umgelegt werden, indem sie von einem der drei Felder A , B , C auf ein anderes dieser Felder gelegt wird.
2. Es darf niemals eine größere auf eine kleinere Scheibe gelegt werden.

Auch das *Prinzip des Übergangs zu einer einfacheren Aufgabe* sollte hier bewußt angewendet werden.
Die Lösung für n = 2 ist fast trivial.
Wie könnte man die Lösung für n = 3 auf die für n = 2 zurückführen?
Ich fasse zunächst den Zweierturm aus den oberen beiden Scheiben als neue "Superscheibe" auf. Wie diese Superscheibe zu transportieren ist, weiß ich. Also kann ich auch den Dreierturm transportieren.
Da ich die Superscheibe auf Feld B unterbringen muß, muß ich die oberste Scheibe des Dreierturms zunächst auf das Feld C legen.
Die so gefundene, auf beliebige n übertragbare Strategie kann man am Beispiel von n = 4 wie folgt festhalten:



Die erforderliche minimale Zuganzahl wird systematisch ermittelt und in einer Tabelle festgehalten:

| Anzahl der Scheiben | Anzahl der erforderlichen Züge | $2^n$ |
|---|---|---|
| 2 | $1 + 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$ | 4 |
| 3 | $3 + 1 + 3 = 7 = 2^3 - 1$ | 8 |
| 4 | $7 + 1 + 7 = 15 = 2^4 - 1$ | 16 |
| 5 | $15 + 1 + 15 = 31 = 2^5 - 1$ | 32 |
| 6 | $31 + 1 + 31 = 63 = 2^6 - 1$ | 64 |
| ... | ..... ..... ..... | ..... |
| n | $2^n - 1$ | $2^n$ |

Das Ermitteln der allgemeinen Formel ist ein gesondertes Problem. Der Impuls "Addiere zu den gefundenen Zuganzahlen jeweils 1 " wird hier weiterhelfen.

## 4.5. Zu weiteren Strategien

### DREI IN EINER REIHE

*Regeln:*
Jeder der beiden Spieler A und B verwendet ein bestimmtes Symbol (z.B. "+" bzw. "#"), um die Felder eines 5x5-Spielfeldes zu füllen.
Die Spieler setzen abwechselnd ihr Symbol in ein beliebiges leeres Feld.
Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster drei seiner Symbole nebeneinander in einer Reihe (Zeile, Spalte oder schräge Reihe) untergebracht hat.

*Impulse:*

- Wer wird wohl immer gewinnen können? [ A ]
- Welches Feld wird A günstigerweise als erstes füllen?
  - ° Wo liegt das "günstigste" Feld, bei dem die meisten Chancen bestehen, eine "Reihe" zu erzeugen?
    - : Ermittle für jedes Feld die Anzahl der Möglichkeiten, daß dieses Feld zu einer "Reihe" gehört!

Durch eine derartige Anwendung des ***Extremalprinzips*** erkennt man, daß es günstig ist, zunächst ein Mittelfeld zu füllen. Man überzeugt sich leicht, daß A mit Sicherheit gewinnt, wenn er in allen seinen Zügen stets ein solches "optimales" (extremales) Feld belegt.

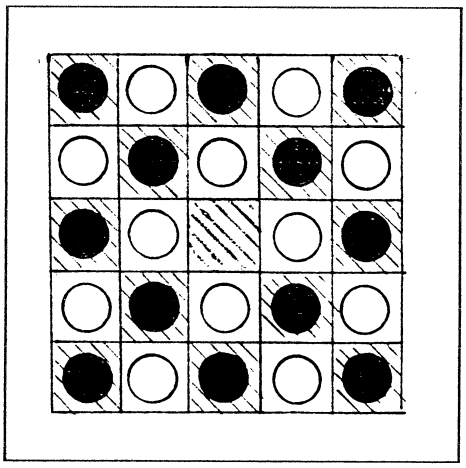
*Varianten:*
Man verlangt zusätzlich, daß ein Zeichen nur in solche Felder gesetzt werden darf, bei denen das jeweils darunterliegende Feld bereits gefüllt ist (Spiel mit "Schächten", in die man von oben Spielsteine einwirft). Die gefundene Strategie trägt durch, A belegt als erstes Feld das Mittelfeld der untersten Reihe.

### VIER IN EINER REIHE

Es wird auf einem 7x7-Spielfeld gespielt, Ziel ist das Herstellen einer zusammenhängenden Reihe von 4 Symbolen. Es ist günstig, die Schüler gleich die Variante "Schächte" spielen zu lassen. Sie sollen erkennen, daß die Strategie von "Drei in einer Reihe" hier nicht durchträgt!

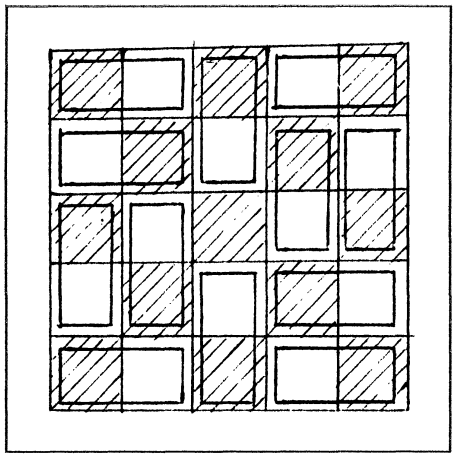
### SCHIEBEREI

*Regeln:*
Auf einem schachbrettartigen 5x5-Spielfeld sind 12 weiße und 12 schwarze Spielsteine so verteilt, daß nur das schwarze Mittelfeld leer bleibt.
A und B ziehen abwechselnd, A mit den weissen, B mit den schwarzen Steinen. Dabei wird der Stein auf das jeweils freie Feld gezogen, wobei nur waagerecht oder senkrecht, nicht aber in Diagonalrichtung gezogen werden darf.
Verloren hat derjenige Spieler, der keinen zulässigen Zug mehr ausführen kann



Man erkennt sehr leicht, daß A stets verlieren muß. Das läßt sich recht einfach anhand des Farbwechsels, der bei jedem Zug erfolgt, be-

gründen. Nach 12 Zügen stehen die 12 weißen Steine von A nunmehr auf schwarzen Feldern, das freie Feld ist wieder ein schwarzes Feld. Also kann A sicher nicht mehr ziehen.
Ein Problem ist jedoch noch offen: Woher nimmt man die Gewißheit, daß B auf jeden der 12 Züge von A stets einen zulässigen Antwortzug hat, so daß dann A im 13. Zug verliert?



In der Regel wird wohl der AG-Leiter den Schülern die *"Dominotaktik"* vorführen müssen, mit deren Hilfe das Problem gelöst werden kann.
Man denke sich das Spielfeld mit 12 Dominosteinen so belegt, daß das Mittelfeld frei bleibt. Das ist offensichtlich stets und sogar auf verschiedene Weise möglich.

*Gewinnstrategie für B :*
Ziehe mit demjenigen Stein, der auf dem Dominostein liegt, auf dem sich der eben von A bewegte Stein befunden hat. (Da A im 1. Zug das Mittelfeld besetzen muß, macht er auf genau einem Dominostein einen Platz frei, der dann von B besetzt wird. Auch im 2. Zug muß A auf genau einem Dominostein einen Platz freimachen, der dann von B besetzt wird, usw. .)
Da auf dem Spielfeld genau 12 Dominosteine liegen, muß A schließlich von dem letzten unberücksichtigten Dominostein herunterziehen, und B kann wiederum nachziehen.
Damit ist gezeigt, daß stets 12 Züge absolviert werden können und daß A mit dem 13. Zug verlieren muß.
Im Unterschied zu allen anderen bisher betrachteten Spielen kann B niemals einen Fehler machen, da sowohl die Züge von A als auch die Züge von B stets erzwungen sind. Es ist daher problematisch, hier überhaupt von einem "Spiel" mit einer "Gewinnstrategie" zu sprechen.
Es ist leicht zu sehen, daß diese "Gewinnstrategie" sofort auf ein analoges Spiel auf einem (2n+1)x(2n+1)-Spielfeld übertragen werden kann.

Zur Lösung dieses Problems wurde das ***Invarianzprinzip*** benutzt, indem die Tatsache berücksichtigt wurde, daß "Farbwechsel" eine *Invariante* bezüglich eines jeden Zuges ist.

# 5. EINIGE MATHEMATISCHE SCHERZFRAGEN UND KNOBELEIEN

Es geht hier um den auf Seite 16 erwähnten Teil A) eines jeden Zirkels. Man kann auch die Schüler auffordern, entsprechende Scherzaufgaben mitzubringen, man muß nur darauf achten, daß deren Behandlung wirklich nicht mehr als 5 bis 10 Minuten in Anspruch nimmt.
Man sollte keinesfalls warten, bis alle Schüler eine Antwort gefunden haben, hier geht es auch um "Schnelligkeit". Wer die Antwort zu kennen glaubt, darf sich sofort melden. Nachdem sich mindestens drei Schüler gemeldet haben, wird ausgewertet. Einer dieser drei Schüler macht sein "Angebot", die anderen bestätigen oder machen ein "Gegenangebot". Man kann hierzu auch einen Wettbewerb veranstalten. Der Schüler mit der ersten richtigen Antwort erhält 2 Punkte, die nächsten beiden Schüler je einen Punkt.
Sollte sich nach angemessener Zeit (etwa 5 Minuten) noch kein Schüler gemeldet haben, dann erleichtere der AG-Leiter die Lösung durch eine Folge von Impulsen. Hilft auch dies nichts, dann wird er die Lösung erläutern.

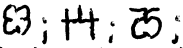
Es folgen nun einige hierfür geeignete Aufgaben:

1) Auf einem Teich wachsen Seerosen. Die von ihnen bedeckte Fläche verdoppelt sich in jeder Woche. Nach 6 Wochen ist der Teich völlig bedeckt.
Nach wieviel Wochen war der Teich halb bedeckt? [ Nach 5 Wochen ]

2) Peter sagt: Meine Größe setzt sich zusammen aus 63 cm und der Hälfte meiner Größe.
Wie groß bin ich? [ 63 cm + 63 cm = 126 cm ]

3) Zwei Wanderer kamen gleichzeitig an einen Fluß. An einem Ufer befindet sich ein Kahn, der genau eine Person trägt. Trotzdem war es den Wanderern möglich, überzusetzen.
Wie war das möglich? [ Die Wanderer kamen an verschiedenen Ufern des Flusses an. ]

4) Versuche, in der angegebenen Folge von Symbolen eine Gesetzmäßigkeit zu finden, und setze diese Folge entsprechend fort!

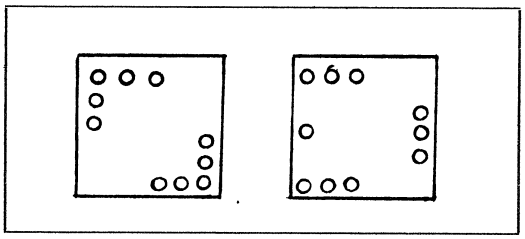


[ Die Symbole setzen sich aus den Zahlen 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... und deren Spiegelbildern zusammen. ]

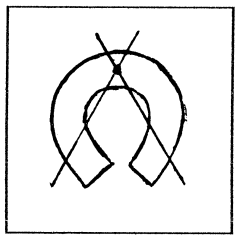
5) Herr Müller und Herr Schulze treffen sich im Zug von Berlin nach Leipzig. Herr Müller sagt: Ich fahre diese Strecke schon zum 17. Mal. Herr Schulze erwidert: Ich fahre diese Strecke schon zum 22. Mal.
Wer kam aus Leipzig? Wer kam aus Berlin? [ Müller - Berlin ; Schulze - Leipzig ]

6) In einem Brotröster können gleichzeitig zwei Scheiben Brot einseitig geröstet werden. Ein Röstvorgang dauert 30 Sekunden. Normalerweise dauert das Rösten von 3 Scheiben 2 Minuten (die ersten beiden Scheiben beidseitig in 1 Minute; dann die dritte Scheibe beidseitig in 1 Minute).
Wer weiß, wie man die 3 Scheiben in nur eineinhalb Minuten rösten kann? [ Beim 2. Röstvorgang die 2. einseitig geröstete Scheibe durch die 3. Scheibe ersetzen; beim 3. Röstvorgang die 2. und die 3. halbgeröstete Scheibe zu Ende rösten. ]

7) In einem quadratischen Tanzsaal sollen 10 Sessel so an den Wänden aufgestellt werden, daß an jeder Wand dieselbe Anzahl von Sesseln steht.
[ Mehrere Lösungen möglich ]

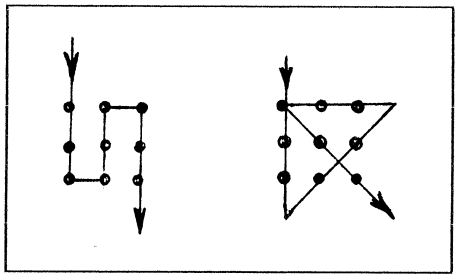


8) Wie kann man ein Hufeisen (Bild an der Wandtafel festgehalten) durch nur zwei Axtschläge in 6 Teile zerschlagen?
Zeichnet die beiden geradlinigen Schnittfiguren ein!



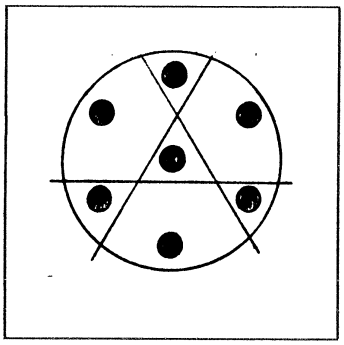
9) Ein Schnellzug fuhr ohne Unterbrechung von A nach B mit einer Geschwindigkeit von 65 km/h . Ein anderer Zug fuhr ebenfalls ohne Unterbrechung von B nach A mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h .
Welchen Abstand hatten die Züge eine Stunde vor ihrer Begegnung? [ Wo auch immer die Züge einander begegnen mögen, eine Stunde vor ihrer Begegnung werden sie stets 65 km + 45 km = 110 km voneinander entfernt sein. ]

10) Es ist leicht, 9 Punkte, die in Form eines Quadrats angeordnet sind, durch einen Streckenzug aus 5 Strecken zu verbinden (vgl. Beispiel, das an der Wandtafel erscheint).
Wer findet einen Streckenzug aus nur 4 Strecken, auf dem alle 9 Punkte liegen?



11) Ich habe keine Taschenuhr, sondern nur eine Wanduhr. Als sie stehenblieb, ging ich zu einem Bekannten, dessen Uhr genau ging, ließ mir die Zeit sagen und kehrte sofort wieder (mit gleicher Geschwindigkeit) nach Hause zurück. Dort stellte ich schnell eine einfache Berechnung an und brachte die Zeiger der Wanduhr in die Stellung, die der genauen Zeit entsprach.
Wie habe ich das gemacht? [ Beim Verlassen der Wohnung Wanduhr aufziehen, beim Wiederkommen verstrichene Zeit ablesen, diese Zeit halbieren und zur genauen Uhrzeit addieren. ]

12) Wie kann man mit drei geraden Messerschnitten nebenstehend abgebildete Pralinentorte so zerteilen, daß sich auf jedem Teil genau eine Praline befindet?

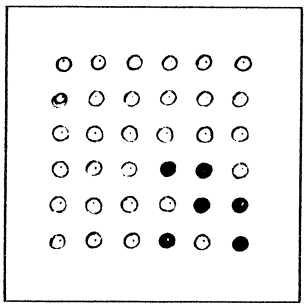


13) Zu Mittag fährt ein Autobus von A nach B ab. Eine Stunde später fährt ein Radfahrer auf derselben Straße, aber natürlich viel langsamer als der Autobus, von B nach A ab.
Wer von den beiden wird, wenn sich Autobus und Radfahrer treffen, weiter von A entfernt sein? [ Keiner; beide sind gleich weit von A entfernt. ]

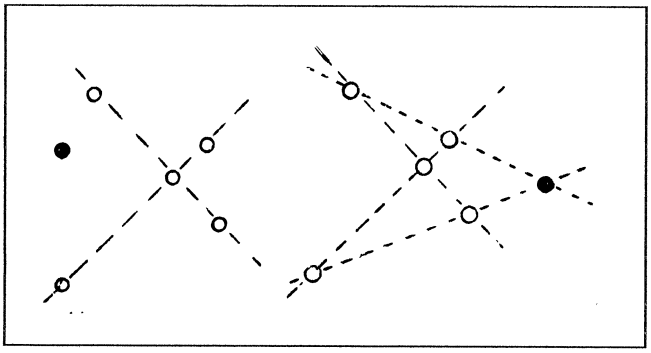
14) Um 6 Uhr schlug eine Wanduhr sechsmal. An der Taschenuhr stellte ich fest, daß die Zeit, die vom Beginn des ersten bis zum Beginn des sechsten Schlages verstrich, 30 Sekunden betrug.

Wenn die Uhr für 6 Schläge 30 Sekunden braucht, wie lange wird sie dann für 12 Schläge brauchen, wobei wiederum die Zeit vom Beginn des ersten bis zum Beginn des zwölften Schlages betrachtet wird? [ 66 Sekunden ]

15) Ein Vater legte 36 Nüsse in einem Quadrat nachstehender Gestalt auf den Tisch und sagte zu seinem Sohn: Kannst du 6 Stück so wegnehmen, daß in jeder waagerechten und senkrechten Reihe eine gerade Anzahl Nüsse liegenbleibt, so sollen dir diese geschenkt sein. Der Sohn nahm hierauf auch wirklich auf die ausbedungene Weise 6 Nüsse.
Welche waren es wohl? [ Es gibt verschiedene Lösungen; das Prinzip ist in nebenstehender Abbildung festgehalten. ]



16) Ich habe 6 kleine Kreise so an die Tafel gezeichnet, daß es zwei Geraden gibt, auf denen jeweils drei Kreise liegen.
Verlegt den "ausgefüllten" Kreis so, daß es vier Geraden gibt, auf denen je drei Kreise liegen!



17) Zwei Streichhölzer liegen bereits da: II .
Legt noch drei weitere Streichhölzer dazu, so daß "drei" herauskommt!
[ II + I oder $\overline{\underline{III}}$ ]

18) Bilde aus 6 Streichhölzern vier gleichseitige Dreiecke, wobei die Seitenlänge dieser Dreiecke gleich einer Streichholzlänge ist! [ Regelmäßiges Tetraeder ]

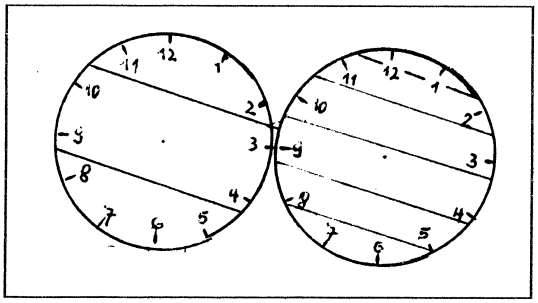
19) Im Inneren eines Würfels sitzen in zwei gegenüberliegenden Ecken eine Spinne und eine Fliege. Die Fliege schläft und rührt sich nicht von der Stelle. Die Spinne will die Fliege fressen. Sie ist aber eine sehr faule Spinne und will auf keinen Fall zu weit laufen, um ihr Abendbrot zu verspeisen.
Welchen Weg muß sie wählen? [ Würfelnetz zeichnen, Strecke zwischen "Spinne" und "Fliege" zeichnen und dann in Schrägbild übertragen. ]

20) Ein Junge hat ebenso viele Schwestern wie Brüder, und seine Schwestern haben halb so viele Schwestern wie Brüder.
Wieviel Jungen und wieviel Mädchen gibt es in dieser Familie? [ 4 Jungen, 3 Mädchen ]

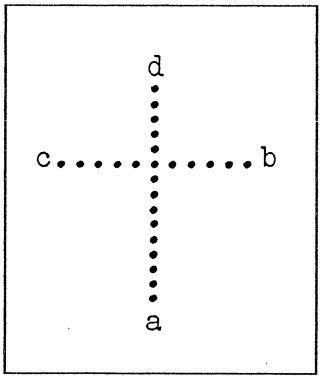
21) Es kroch an einem Lindenbaum
ein kleiner Wurm, man sah ihn kaum,
von unten 'nauf aus aller Macht,
acht Ellen richtig bei der Nacht,
und alle Tage kroch er wieder
genau vier Ellen dran hernieder.
So hatte mit der zwölften Nacht
er ganz sein Kletterwerk vollbracht.
Die Spitze war sein Reiseziel,
von der er nun ermüdet fiel.

Nun sagt mir ohne Scheu,
wie hoch dieselbe Linde sei! [ 52 Ellen ]

22a) Es soll das Zifferblatt einer Uhr durch zwei Geraden so in drei Teile zerlegt werden, daß sich beim Addieren der Zahlen in jedem Teil die gleichen Summen ergeben!
b) Kann man das Zifferblatt so in sechs Teile zerlegen, daß sich in jedem Teil zwei Zahlen befinden und die Summe dieser beiden Zahlen in allen sechs Teilen gleich groß ist?



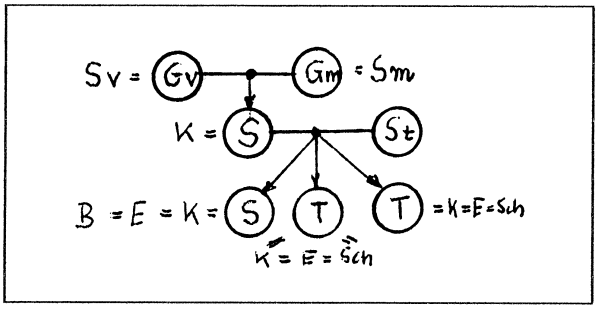
23) Ein reicher Herr hatte sehr viele Kostbarkeiten, und unter diesen besonders 25 Edelsteine, welche er allen anderen vorzog. Um nun gleich wahrnehmen zu können, wenn ihm einige entwendet werden sollten, legte er sie in die Form eines Kreuzes in der abgebildeten Art. So oft er nun dieses Kreuz besah, fing er bei a an nach b , wieder von a nach c und noch einmal von a nach d zu zählen. Zählte er nach allen drei Seiten 15, so glaubte er seine 25 Edelsteine noch zu besitzen. Aber sein schlauer Diener entwendete ihm doch zwei Edelsteine, ohne daß es der Herr gemerkt hat, denn dieser zählte nach allen drei Seiten 15 , wie zuvor.



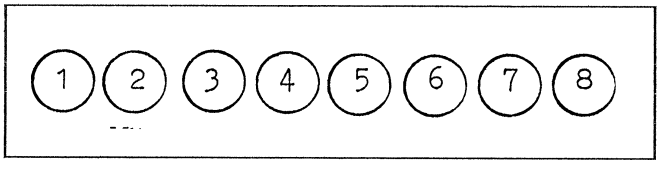

Wie war das möglich? [ Bei b , c , d jeweils einen Stein wegnehmen, bei a einen Stein anlegen; es bleiben zwei Steine übrig. ]

24) In einer großen Stadt will ein Mann über eine belebte Straße gehen. Vor dem Überqueren betrachtet er die vorüberfahrenden Autos. Plötzlich stutzt er, ein Wagen fällt ihm besonders auf. Er sieht sofort, daß dieser gestohlen ist.
Wie ist das möglich? [ Er erkannte sein eigenes Auto, das er kurz zuvor abgestellt hatte. ]

25) Am Mittagstisch sitzen ein Großvater, eine Großmutter, vier Kinder, drei Enkel, ein Bruder, zwei Schwestern, zwei Söhne, zwei Töchter, ein Schwiegervater, eine Schwiegermutter und eine Schwiegertochter.
Wieviel Teller werden mindestens benötigt?
[ 7 Teller - siehe "Stammbaum" ]



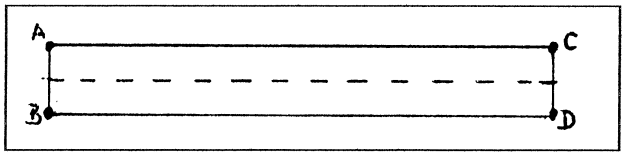

26) 8 Münzen liegen in einer Reihe. Es soll mit möglichst wenigen Zügen versucht werden, die Münzen in vier Stapel zu je 2 Münzen umzuordnen.




Als Bedingung ist zu beachten, daß bei jedem Zug 2 Münzen (Leerstellen zählen nicht) übersprungen werden müssen, die bewegte Münze also auf die dritte Münze

abgelegt wird. Die übersprungenen Münzen können dabei nebeneinander oder auf einem Stapel liegen.
[ Züge: $5 \rightarrow 2$ ; $3 \rightarrow 7$ ; $4 \rightarrow 1$ ; $6 \rightarrow 8$ . ]
Erweiterung auf 10 Münzen! Durch den Zug "$7 \rightarrow 10$" Reduktion auf obiges Problem.

27) Ein Papierstreifen wird an seinen kurzen Seiten so zusammengeklebt, daß A auf C liegt und daß B auf D liegt. (Dabei entsteht eine Zylinderfläche.)




Was geschieht, wenn man diese Fläche längs der Mittellinie "- - - - -" zerschneidet?
[ Wie erwartete zerfällt die Fläche in zwei Zylinderflächen. ]

Nun wird ein solcher Papierstreifen erst "verdreht" (tordiert) und dann so zusammengeklebt, daß A auf D liegt und daß B auf C liegt. (Dabei entsteht ein MÖBIUS-Band.)
Was geschieht, wenn man dieses Band längs der Mittellinie zerschneidet?
[ Überraschenderweise zerfällt das Band nicht in zwei Teile, sondern es entsteht ein doppelt so langes Band, das zweifach tordiert ist. ]

Was geschieht, wenn man dieses Band längs der Mittellinie zerschneidet?
[ Es entstehen zwei ineinander verschlungene, zweifach tordierte Bänder ]

"Probe": Wir tordieren den Papierstreifen vor dem Zusammenkleben zweimal, so daß jetzt wieder A auf C liegt und daß B auf D liegt.
Was entsteht nach dem Zerschneiden längs der Mittellinie?
[ Wie erwartet zwei ineinander verschlungene, zweifach tordierte Bänder; wir haben uns also oben beim Abzählen der Tordierungen des Bandes, das nach dem Zerschneiden eines einfach tordierten Bandes entsteht, nicht verzählt. ]
Was entsteht, wenn wir diese beiden Bänder ebenfalls längs der Mittellinie zerschneiden?
[ Wie erwartet entstehen vier ineinander verschlungene zweifach tordierte Bänder. ]

Nun stellen wir uns ein dreifach tordiertes Band her.
Was entsteht nach dem Zerschneiden längs der Mittellinie?
[ Das Band zerfällt nicht in zwei Teile, sondern es entsteht ein doppelt so langes Band mit einem "Knoten".]

*Hinweis*: Um festzustellen, ob ein derartiges Band nur (u.U. mehrfach) tordiert ist oder ob es einen Knoten enthält, falte man es an einer Stelle senkrecht zum Rand und lege von der Faltstelle aus die beiden Teile so weit wie möglich eben übereinander. Dann lege man den restlichen "Wirrwarr" möglichst symmetrisch in Falten, die man eben zusammenpreßt. Wenn man dann das Band zerschneidet, kann man beim "Entwirren" die Anzahl der Tordierungen zählen und erkennt auch, ob zusätzlich ein Knoten vorhanden ist.
Diese Aufgabe läßt sich natürlich nicht in 5 bis 10 Minuten zu Beginn eines Zirkels bewältigen. Sie eignet sich aber gut für den Zirkel vor Weihnachten oder vor dem Schuljahresende. Dabei sollten die Schüler eine Schere und einen Klebstift mitbringen, während der AG-Leiter geeignete Papierstreifen mitbringt, so daß die Resultate tatsächlich von den Schülern selbst entdeckt werden.

# 6. LÖSUNGEN ZUR "AUFGABENSAMMLUNG FÜR ARBEITSGE - MEINSCHAFTEN - KLASSE 5"

## 1. Wer ist wer ?

1) Siehe Musterlösung.

2) Andreas - Schwerin ; Britta - Berlin ; Dirk - Dresden ; Kerstin - Halle .
Andreas und Britta haben bereits im Vorjahr an der MO teilgenommen.

3) Peter 1. Preis ; Fred 2. Preis ; Bernd Diplom .

4) Marion - Schwimmen ; Petra - Tischtennis ; Ruth - Volleyball .

5) a) Bernd , Arnd , Frank , Christian , Erik , Dietmar .
b) Bedingung (3) ist nicht erforderlich.

6) Ira - Optiker ; Asja - Haushaltswaren ; Klawa - Schuster ; Shenja - Fleischer .

7) a) Siegfried Brietzke , Andreas Decker , Stefan Semmler , Jürgen Thiele .

8) Aus (1), (3), (4) folgt, daß der Schlosser den Namen Bernd Fleischer trägt; aus (2) und (5) folgt dann, daß der Maurer den Namen Hans Richter trägt.

9) Reichelt - Geschichte/Geographie ; Helmert - Mathematik/Biologie ;
Fischer - Physik/Zeichnen ; Walter - Deutsch/Sport .

10) Kondratjew - Arzt ; Dokschin - Ingenieur ;
Marejew - Bäcker ; Skobeljew - Milizionär .

## 2. Wir schließen auf die Einheit und lösen Sachaufgaben

1) 208 Werkstücke . 2) 45 Euro . 3) 175 Liter .

4) a) 30 Hektar .
b) 4 Stunden .
c) Keine eindeutige Antwort bzw. "1 Mähdrescher genügt" .

5) a) 63 Tage . 7) Nach 3 Arbeitstagen . 8) 550 km .
b) Kein einziges Ei .

9) Nein . 10) 20000 Liter Parfüm . 11) Nach 15 Minuten.

## 3. Aufgaben, die man im Finstern löst

1) a) 15 Kugeln. b) 17 Kugeln. c) 19 Kugeln.
d) 9 Kugeln. e) 4 Kugeln. f) 16 Kugeln.

2) a) 35 Kugeln.

## 4. Wir lernen systematisch arbeiten und geschickt zählen

1) 24 Möglichkeiten. 2) 6 Reiserouten. 3) 6 Möglichkeiten.

4) 20 Möglichkeiten. 5) a) 30 Quadrate. 6) ABCFI , ABEFI ,
b) 55 Quadrate. ABEHI , ADEFI ,
c) 506 Quadrate. ADEHI , ADGHI .
d) $(1+4+9+...+n^2)$ Quadrate.

7) Mögliche Verteilungen:
(0;0;7) , (0;1;6) , (0;2;5) , (0;3;4) , (1;1;5) , (1;2;4) , (1;3;3) , (2;2;3) .

8) a) 6 Anordnungen. 9) Siehe Musterlösung. 10) 2 Stellungen.
b) 72 Anordnungen.

11) a) 8 Dreiecke. b) 44 Dreiecke. c) 124 Dreiecke.

12) 8 Dreiecke. 13) 70 Wege. 14) a) 1362 Ziffern 6.
b) 2070 Ziffern 4 .

15) a) 11 Möglichkeiten, jedes Feld höchstens einmal zu durchlaufen.
b) 2 Möglichkeiten, jedes Feld genau einmal zu durchlaufen.
c) Beim 3x3-Feld kann der Ausgang nur in den Eckfeldern 3 , 7 , 9 liegen, Beim 3x4-Feld: 37 Möglichkeiten zu "höchstens", 4 Möglichkeiten zu "genau; der Ausgang kann nur in den Feldern 2, 4, 5, 10, 12 liegen.

16) $d = n \cdot (n - 3) : 2$ . 17) 21 Wege. 18) 105 Fahrkarten.

19) a) $n^3$ . 20) Genau eine Verteilung.
b) 8 .
c) $12 \cdot (n - 2)$ . 21) 14 verschiedene Figuren.
d) $6 \cdot (n - 2)^2$ .
e) $(n - 2)^3$ .

22) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ verschiedene Anordnungen.

## 5. Zahlen werden gesucht

1) 38 . 2) { 1 , 2 , 3 , 6 , 9 , 18 } . 3) { (15;1) } .

4) { (15;12) } . 5) { 85 } . 6) a) { (1;7) } .
b) { (3;5) , (7;1) } .
c) Keine Lösung.

7) 26 . 8) { 28 } .

9) 85 . 10) { 24 } . 11) { 53 , 75 } .

12) 880 und 88 . 13) 278 ; siehe Musterlösung.

14) 35 Punkte. 15) 10 .

16) Hans ist 13 Jahre alt; das Alter von Thomas ist nicht eindeutig bestimmbar.

17) 31 , 32 eindeutig bestimmbar.

## 6. Magische Quadrate (vgl. die Lösungen in Abschnitt 3.6.)

1) MQ(4) mit S = 136 , s = 34 ; MQ(n) mit s = S : n .

2) a) Eindeutig lösbar. 3) Es gibt genau ein solches MQ(3) .
b) Eindeutig lösbar.
c) Nicht lösbar.

4) MQ(3) ; S = 63 ; s = 21 . 5) MQ(3) ; S = 135 ; s = 45 .

6) Nicht eindeutig lösbar; angegeben werden
je 1 MQ(3) mit s = 3 , s = 63 und s = 6363 ; 2 MQ(3) mit s = 33 .

7) a) 2 MQ(3) mit S = 36 , s = 12 . 8) MQ(5) mit s = 65 .
b) 4 MQ(3) mit S = 72 , s = 24 .
c) Kein MQ(3) mit s= 100 , weil $3 \nmid 100$, aber stets $s = 15 \cdot p + 3 \cdot q$ , also $3 \mid s$ ten muß.

9) a) S = 272 , $s = 68 = 2 \cdot 34$ .
b) S = 168 , $s = 42 = 34 + 2 \cdot 4$ .
c) $s = 102 = 3 \cdot 34 = 34 + 17 \cdot 4$ .
d) S = 480 , $s = 120 = 2 \cdot 34 + 13 \cdot 4$ .

## 7. Hier helfen Variable, Tabellen und Gleichungen

1) a) 6 ; 12 .
b) 14 ; 9 .
c) 4 ; 35 .

2) a) 9 ; 41 ; 15 .
b) 64 ; 20 ; 84 .

3) a) 20 ; 10 ; 5 ; 27 .
b) {15 ; 6 ; 21 ; 41 } .
c) 3 Lösungen: (3;0;3;5) , (5;1;6;11) , (7;2;9;17) .
d) Keine Lösung.

4) 2 Dezitonnen.

5) Telefonnummer 6349 eindeutig zu ermitteln.

6) Mutter: 32 Jahre ; Vater: 38 Jahre ; Kurt: 12 Jahre ; Steffen: 12 Jahre .

7) Es saßen auf dem 1. Baum 15 , auf dem 2. Baum 14 , auf dem 3. Baum 27 Vögel ; siehe Musterlösung.

8) Arno ist 28 Jahre, Bernd ist 21 Jahre alt.

9) Der 4. Kunde zahlte 7,84 €
Der 1. Kunde kaufte 28 , der 2. Kunde 18 , der 3. Kunde 46 , der 4. Kunde 112 Schrauben.
Die vier Kunden zahlten zusammen 14,28 € .

## 8. Wir lösen Gleichungen und Ungleichungen

1) a) { 2 } .
b) { 0 ; 1 ; 2 } .
c) { 6 ; 7 ; 8 ; 9 } .
d) Keine Lösung.
e) { 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 124 } .
f) { 8 } .
g) { 2 } .
h) { 0 ; 4 } .
i) { 0 } .
k) { 8 } .
l) Keine Lösung.
m) { 2 } .

2) a) { (2;2) , (2;3) , (2.;4) , (3;1) , (3.2) , (4;1) , (4;2) , (5;1) , (6;1) , (7;1) , ... , (15;1) , (16;1) } .
b) { (17;0) , (5;1) , 3;3) } .
c) Keine Lösung.

3) a) 4 .
b) 22 .
c) 15 .
d) 34 .

4) a) $a \cdot x + 3 \cdot x$ .
b) $a \cdot b + a + b + 3$ .
c) $x^2 + 7 \cdot x + 10$ .
d) $x^2 + 2 \cdot x + 1$ .
e) $x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1$ .
f) $x^4 + 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1$ .

5) a) { 0,62 } .
b) Keine Lösung.
c) Keine Lösung.
d) { 0 } .
e) Keine Lösung.
f) Keine Lösung.
g) Alle Zahlen.
h) { 16 } .
i)) { 0 } .
k) Keine Lösung.

6) a) { 2 } .
b) $\{\frac{3}{4}\}$ .
c) { 0 } .
d) { 4 } .
e) Keine Lösung.
f) Alle Zahlen.

## 9. Wir lösen Kryptogramme

1) a) 1 Lösung: 13090 + 37012 = 50102 .
b) 2 Lösungen: 593·41 = 24313 ; 598·41 = 24518 .
c) Keine Lösung.
d) 3 Lösungen: 569·42 = 23898 ; 564·47 = 265508 ; 564·42 = 23688 .
e) 1 Lösung: 253·38 = 9614 .

2) a) 1 Lösung: 646:19 = 34 , 126 - 20 = 106 , 520 - 380 = 140 .
b) Keine Lösung.
c) 2 Lösungen: 646:19 = 34 , 216 - 10 = 206 , 430 - 290 = 240 ;
Lösung von 2a) .

3) a) 1 Lösung: 6041 + 6041 = 12082 .
b) 2 Lösungen: 992 + 992 = 1984 ; 993 + 993 = 1968 .
c) Keine Lösung.
d) Keine Lösung.
e) 11 Lösungen: Für EINS kann stehen:
1407 , 1608 , 1809 , 1457 , 1859 , 2814 , 2864 , 3417 , 3618 , 3819 , 4271 .
f) 1 Lösung: 932 + 9338 = 10270 .
g) 1 Lösung: 3·3 = 9 , 4·2 = 8 ; 7 - 6 = 1 .

4) a) 4 Lösungen.
b) 8 Lösungen.
c) Z.B. die 9 in ein Feld setzen, das nicht zur 1. Zeile gehört.

5) a) S = 9 : (162435) ; S = 10 : (163254) ; S = 11: (254163) .
b) E = 12 , S = 19 : 16 Lösungen ; diese entstehen durch Vertauschen von "Seitenzahlen" aus folgenden beiden Grundvarianten:
(159426738) , (168435729) .
c) S = 17 , E = 6 : 2 Grundvarianten: (159248367) , (168257349) .
S = 20 , E = 15 : 5 Grundvarianten: (168524937) , (249516837) ,
(267534819) , (429518637) , (438527619) .
S = 21 , E = 18 : 2 Grundvarianten: (348615927) , (357624918) .
S = 23 , E = 24 : 2 Grundvarianten: (726815934) , (735842916) .
d) E = 3·S - G mir G als "Gesamtsumme", E als "Eckensumme" und S als "Seitensumme".

## 10. Hier können Skizzen helfen

1) 9.28 Uhr .

2) 16.14 Uhr .

3) a) 14 km .
b) 14 km .

4) 11.00 Uhr .

5) 21 km in der Stunde.

6) a) 8.03 Uhr .
b) 15,6 km .
(vgl. Musterlösung)

7) 50 Sekunden; 150 Meter.

8) 135 Meter .

9) a) 39 km .
b) 12.00 Uhr .
c) 12.20 Uhr .

## 11. Mengendiagramme helfen beim Lösen von Aufgaben

1) 26 Schüler . 2) 28 Schüler .

3) a) 4 Schüler . b) 24 Schüler . c) 10 Schüler .
d) 14 Schüler . e) 9 Schüler . f) 19 Schüler .

## 12. In einem Zug

1) a) Läßt sich nur zeichnen, wenn man bei A oder B beginnt und dann bei B oder A endet.
b) Man kann in jedem Punkt beginnen und endet dann in diesem Punkt.
c) Nicht lösbar.

2) a) Nein ; (4 ungerade Knoten). e) Ja ; (2 ungerade Knoten).
b) Ja ; (2 ungerade Knoten). f) Ja ; (2 ungerade Knoten).
c) Ja; (2 ungerade Knoten). g) Nein ; (4 ungerade Knotgen).
d) Nein ; (4 ungerade Knoten). h) Nein; (4 ungerade Knoten).

3) a) Nein . b) Ja . c) Ja .

## 13. Wir suchen Vermutungen

1) a) 9 , 12 .
b) 84 , 82 .
c) 2 , 0 .
d) 21 , 34 .

2) a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ .
b) $a_n = \frac{2n + 1}{2^n}$ .
c) $a_n = \frac{3^n}{n^3}$ .

3) 4 ; 6
9 ; 12
16 ; 20
$(\frac{u - 1}{2})^2$ ; $(\frac{g}{2} - 1)\cdot\frac{g}{2}$

4) 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , ... , $d_n = \frac{n\cdot(n + 1)}{2}$ .
1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , ... , $v_n = n^2$ .
1 , 5 , 12, 22 , 35 , 51 , ... , $f_n = \frac{(n - 1)\cdot n}{2} + n^2$ .

5) $v_n = d_{n-1} + d_n$ ; Veranschaulichung siehe Abschnitt 3.13.

6) Veranschaulichung siehe Abschnitt 3.13.; aus $d_n = \frac{n\cdot(n + 1)}{2}$ folgt $2\cdot d_n = n\cdot(n + 1)$.

7) Veranschaulichung siehe Abschnitt 3.13.

8) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = [\frac{n\cdot(n + 1)}{2}]^2$ .

9) "Streifensumme": $s_n = n^3$ ;
"Quadratsumme": $q_n = s_1 + s_2 + s_3 + ... + s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$
$= (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = [\frac{n\cdot(n + 1)}{2}]^2$ .

10) Jede Zahl ist gleich der Summe der beiden unmittelbar darüberstehenden Zahlen.
Die Summe der Zahlen der n-ten Zeile beträgt stets $2^n$ .
Die Summe aufeinanderfolgender Zahlen einer Diagonalreihe ist stets diejenige Zahl des Pascalschen Dreiecks, die (rechts bzw. links) unterhalb des letzten Summanden steht.

11) n Geraden zerlegen die Ebene in höchstens $a_n$ Teile, wobei gilt:
$a_n = a_{n-1} + n = 1 + (1 + 2 + ... + n) = 1 + \frac{n\cdot(n + 1)}{2}$ .

## 14. Aufgaben über Flächen und Körper

1) $A = 345\ cm^2$ .  2) $A = 42{,}5\ cm^2$ .  3) $\overline{DG} = 6\ cm$ .

4) $x = 20$ .  5) $\overline{DE} = 8\ cm$ .  6) $u = 50\ cm$ .

7) 30 Eimer .  8) a) $h = 20\ cm$ .
b) Ja .
c) Nein .

9) a) $b = 5\ cm$ ; Quader nicht eindeutig bestimmt.
b) $a = b = 5\ cm$ , $A_g = 25\ cm^2$ ; $c = 6\ cm$ ; $A_s = 30\ cm^2$ ; $A = 170\ cm^2$ .
c) $a = 6\ cm$ ; $A_g = 30\ cm^2$ ; $c = 6\ cm$ ; $A_v = 24\ cm^2$ ; $A = 148\ cm^2$ .
d) Keine Lösung, weil Angaben widersprüchlich.
e) $b = c = 5\ cm$ ; $A_g = 50\ cm^2$ ; $A_v = 50\ cm^2$ ; $A = 250\ cm^2$ .
f) Keine Lösung, weil Angaben widersprüchlich.

10) a) $28{,}48\ m^2 \approx 28{,}5\ m^2$ .  11) 6 cm .
b) $44{,}2\ m^2$ .

12) 13 Würfel, 14 Seitenflächen, 50 Quadrate.

13) 20 Würfel haben 120 Seitenflächen; wenn 25 Seitenflächen mit Leim bestrichen, dann 50 Seitenflächen verdeckt, also 120 - 50 = 70 Seitenflächen an der Oberfläche des Körpers; Widerspruch zu "68 Seitenflächen" .

14) 160 m Maschendraht . 15) 656 Platten.  16) $u_I = 140\ cm$ ; $u_{II} = 124\ cm$ .

## 15. Vermischte Aufgaben

1) 98949 ; 10000 .  2) 120 Meter .  3) 11 Handschuhe .

4) D , D , B , R , R , P , P , D .  5) Zahl 7 .

6) Siehe Abschnitt 3.15.  7) 10 Äpfel .  8) 9 Zahlen ; 72 .

9) 37500 mal .  10) Lutz Schulze .  11) 16 Paare .

12) $b < d < e < a < c$ ; die Ungleichungen (2), (3), (5), (8) werden nicht benötigt.

13) 6 Kinder, 12 Frauen , 24 Männer.  14) 1 Minute .

15) 15 Möglichkeiten .  16) 255 € .  17) Siehe Abschnitt 3.15.

18) a) $2 + 2 = 4$ , $2 \cdot 2 = 4$ ; $4 - 4 = 0$ .
b) $333 \cdot 3 = 999$ , $222 \cdot 3 = 666$ ; $111 \cdot 3 = 333$ .

19) Meyer fuhr mit 40 km/h , also zu schnell.

20) Es gibt 90 derartige Zahlen.  21) 93 .

22)
4 7 4  3 9 3  7 1 7
7 1 7  9 1 9  1 1 1
4 7 4 ;  3 9 3 ;  7 1 7 .

23) 16 Dreiecke .

24) 21 Handschläge .

25) 84 Kinder , 21 Frauen , 15 Männer .  26) Uwe hat recht.

27) a) 113 Begrenzungsflächen.
b) 181 bzw. 265 bzw. $4 \cdot n^2 + (2 \cdot n - 1)^2$ .

28) Barbara 12 Jahre , Ingrid 6 Jahre , Mutter 30 Jahre , Vater 42 Jahre .

29) 4 48 32 52 Weitere Lösungen erhält man, indem man etwa die in
60 24 40 12 den Aufgaben 1) und 2a) von "6. Magische Quadrate"
56 28 44 8 angegebenen MQ(4) jeweils mit 4 multipliziert; vgl.
16 36 20 64 auch die Lösung von Aufgabe 9) in Abschnitt 6.

30) A kaufte 10 , B kaufte 15 , C kaufte 5 Brötchen .

31) 15 Minuten . 32) 68 Personen ; 7 Personen .

33) Die Klasse 5a fertigte 21, die 5b fertigte 15, die 5c fertigte 30 Buchhüllen an.

34) Ja , 162 Seiten ; nein , 162 oder 171 Seiten . 35) $\overline{ED} = 12$ cm .

36) $x = 9$ cm . 37) Es müßten 101, nicht 100 Befragte sein.

38) 25 Arbeitskräfte . 39) Ja ; innerhalb des Hofes .

40) a) Ja . 41) 12,60 € . 42) { 17, 34, 68 } .
b) Nein .
c) Ja . 43) Nein, weil S = 150 nicht durch 4 teilbar ist.
d) Nein .
e) Ja . 44) a) Ja ; Beginn bei B oder D .
f) Ja . b) Nein, 4 ungerade Knoten

45) $A_1 = 312$ cm² , $A_2 = 448$ cm² , $A = 600$ cm² . 47) 30 Schüler .

46) Ro - Mo - Ma ; Be - Mi - Pl ; Uw - Fr - Ve ; St - Di - Fl .

48) a) 11 Schüler . b) 10 Schüler . c) 3 Schüler . d) 14 Schüler .

# L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s


1. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 5 .
   Chemnitz, 1993 .
2. Aufgabensammlung für Kreisarbeitsgemeinschaften - Klasse 5 .
   TU Karl-Marx-Stadt, 1989 .
3. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 6 .
   Chemnitz, 1995 .
4. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 7 .
   Chemnitz, 1996 .
5. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 8 .
   Chemnitz, 1995 .
6. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 9 .
   Chemnitz, 1993 .
7. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 10 .
   Chemnitz, 1994 .
8. Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 4 .
   Chemnitz, 1996 .
9. Aufgaben der Adam-Ries-Wettbewerbe - Klasse 5 - (1981 - 1995) .
   Chemnitz, 1995 .
10. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 6 - eine Anleitung für AG-Leiter.
    Chemnitz 1995 .
11. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 7 - eine Anleitung für AG-Leiter.
    Chemnitz 1996 .
12. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 8 - eine Anleitung für AG-Leiter.
    Chemnitz 1995 .
13. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 9 - eine Anleitung für AG-Leiter.
    Chemnitz 1993 .
14. König, Helmut: Arbeitsgemeinschaften Klasse 10 - eine Anleitung für AG-Leiter.
    Chemnitz 1994 .
15. Pörnig, Lutz: Arbeitsgemeinschaften Klasse 4 - eine Anleitung für AG-Leiter .
    Chemnitz, 1996 .
16. Haase, P. / König, H.:15 Jahre Adam-Ries-Wettbewerb für Schüler der Klasse 5 - ein Beitrag zur Förderung mathematich interessierter Schüler.
    Chemnitz 1996 .
17. Haufe, B. / Krüger, M.: Kreisarbeitsgemeinschaft Mathematik, Klasse 5 - aufgebaut als Arbeitsmaterial für den AG-Leiter nebst zugehöriger Aufgabensammlung . Diplomarbeit, Sektion Mathematik der TUK, 1989 .
18. Schulze, G. / Sprengel, H.-J-: Mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 3 oder 4 .
    Bezirkskabinett für außerunterrichtloiche Tätigkeit, Cottbus 1982 .
19. Gericke, K. / Rautenberg, B. / Sprengel, H.-J.: Mathematische außerunterrichtliche Tätigkeit in der Unterstufe (Klasse 3) .
    Potsdamer Forschungen, Reihe C, Heft 71, 1987 .

20. König, Helmut: Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich.
Chemnitz 1996 .

21. König, Helmut: Zum Darstellen der Lösung mathematischer Aufgaben im außerunterrichtlichen Bereich und zum Vermitteln von logischen Grundlagen in Arbeitsgemeinschaften.
Chemnitz 1996 .