Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

Außerunterrichtliche Arbeit

LUTZ PÖRNIG

Arbeitsgemeinschaften Klasse 4 - eine Anleitung für AG- Leiter

Arbeitsgemeinschaften Klasse 4 - eine Anleitung für AG-Leiter

INHALT

	Seite
Einleitung	2
Wissenswertes für AG-Leiter	4
Inhaltliche Schwerpunkte der AG-Arbeit	6
Zum Einsatz der Aufgabensammlung und dieser Anleitung	7
Didaktische Prinzipien	8
Terminplan möglicher Höhepunkte im Schuljahr	9
Besprechung der Aufgaben aus der Aufgabensammlung	10
Nachbetrachtungen	48
Zusatzaufgaben	50
Lösungen zu den Zusatzaufgaben	52

Einleitung

Die hier vorliegende Anleitung für Leiter von Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Klasse 4 ist als Begleitmaterial für die "Aufgabensammlung für Arbeitsgemeinschaften - Klasse 4" gedacht. Dort habe ich Aufgaben zusammengestellt, die - abgesehen von wenigen Ergänzungen - in den zurück-liegenden Jahren im Haus der Kinder und Jugend "spektrum" Chemnitz in Mathematik-AGs der Klasse 4 eingesetzt wurden. In dieser Einrichtung besteht eine mehr als 30-jährige Tradition in der Durchführung von Mathematik-Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 10. Für die Klassenstufe 4 gab und gibt es in Chemnitz an mehreren Grundschulen überschulische Arbeitsgemeinschaften für Schüler der umliegenden Wohngebiete. Dieses Angebot war jedoch nicht flächendeckend verteilt. Aus diesem Grund habe ich nun schon über mehrere Jahre hinweg eine Mathematik-AG der Klasse 4 für die Schüler angeboten, denen der Weg in andere Stützpunkte zu weit war. Für wöchentliche Mathematik-AGs der Klassen 5 bis 10 gibt es umfangreiche, über viele Jahre erprobte und ständig verbesserte Aufgabensammlungen und Anleitungen für AG-Leiter, die das "Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler" seit Jahren herausgibt. Diese Materialien haben in den vergangenen fünf Jahren eine enorme Verbreitung vor allem in Sachsen, Sachsen-Anhalt, Thüringen, Nordrhein-Westfalen und Bayern, aber inzwischen auch in der Mehrzahl der übrigen Bundesländer gefunden. Wer jedoch eine Mathematik-AG in der Klasse 4 durchführen will, der ist meist auf seine eigene langjährige Sammlung von Aufgaben aus allen möglichen Quellen angewiesen, wenn seine AG nicht nur nachmittägliche Fortsetzung der Unterrichtsstunde werden soll. Zu meinen ersten Erfahrungen mit AGs der Klasse 4 zählt neben der Freude über die Begeisterungsfähigkeit und den Eifer der Schüler auch die qualvolle Suche nach geeigneten Aufgaben, um wenigstens 14-tägig ein einigermaßen niveauvolles Angebot zu bringen. Zwar gab es auch früher schon einige Publikationen, in denen die methodischen Aspekte der Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler der Klasse 4 hervorragend dargestellt waren, aber die darin enthaltenen Aufgabenvorschläge waren recht dürftig und halfen mir gerade einmal über vier bis fünf AG-Nachmittage. Ich kann jedem nachfühlen, der zwar gern außerunterrichtliche mathematische Förderung anbieten würde, aber mangels Aufgaben keine Chance sieht, dieses Angebot über ein volles Schuljahr durchzustehen. Auch aus diesem Grund soll die im Laufe der Jahre "für den Hausgebrauch" entstandene Sammlung von Aufgaben allen Interessierten zugänglich gemacht werden.

Der Aufgabensammlung ist sicher anzumerken, dass sie nicht aus der Sicht eines in Klassenstufe 4 Unterrichtenden entstanden ist. Tätsächlich liegt der Hauptteil meiner Erfahrungen in Arbeitsgemeinschaften der Klassen 5 bis 8. Der Einstieg in Klasse 4 war für mich Neuland; als Grundlage diente mir - leicht abgesenkt - das Anspruchsniveau der AG aus der Klasse 5. Nach drei Jahren praktischer Erprobung glaube ich, dass die Mehrzahl der Aufgaben für eine AG mit begabten und interessierten Schülern der Klasse 4 nicht unangemessen ist und gute Voraussetzungen für den AG-Besuch im nächsten Schuljahr bietet.

Man kann wohl davon ausgehen, dass potentielle AG-Leiter die Aufgaben der Aufgabensammlung auch ohne Anleitung und Lösungsvorschläge lösen können. Trotzdem will ich die Aufgaben zur weiteren Verwendung nicht einfach kommentarlos weitergeben. In der zwei- bis dreimaligen Erprobung einiger Aufgaben über mehrere Jahre hinweg habe ich selbst immer wieder neue Aspekte, Querverbindungen zu anderen Aufgaben, "Aha-Effekte" für die Schüler, erzieherische Potenzen und auch typische Schülerfehler, aber auch originelle Gedanken der Schüler entdeckt. Andere Nutzer dieser Aufgaben sollen von Beginn an diese Erfahrungen nutzen können.

Ein Angebot an mathematischen Arbeitsgemeinschaften für die Klasse 4 ist aus verschiedenen Gründen heraus wichtig und wünschenswert. Während die Anforderungen der Grundschule für einen beträchlichen Teil der Schüler ihr Leistungsvermögen - zum Teil

bis an die Grenze- ausschöpfen, sind andere Kinder in der Schule hoffnungslos unterfordert. Da das Tempo des Unterrichts sich häufig nach den schwächsten Schülern richtet und der Lehrer diesen Schülern auch besondere Aufmerksamkeit zuwenden muss, finden mathematisch begabte oder auch nur interessierte Schüler oft zu wenig Anregungen durch den Unterricht. So bleiben beträchtliche Potenzen für ihre weitere Entwicklung ungenutzt. In einer Arbeitsgemeinschaft unter Gleichgesinnten können diese Schüler ihr Leistungsvermögen ausschöpfen. Sie erleben ihre Begabung als etwas Normales und nicht etwa als Störfaktor für den Unterricht. Hier haben sie die Chance, sich für ein Ergebnis anstrengen zu müssen. Einige der gestellten Aufgaben sind so anspruchsvoll, dass sie auch ein begabter Schüler in der Regel nicht allein lösen wird. Dann ist Teamfähigkeit gefragt. Das gemeinsame Suchen nach Lösungsmöglichkeiten, Arbeitsteilung zum Ausprobieren verschiedener Lösungswege und die kritsche Beurteilung von eigenen Vorschlägen durch die anderen AG-Mitglieder können neue Erfahrungen sein.
Ohne eine Förderung verkümmert jede Begabung früher oder später. Wie wäre es sonst zu erklären, dass es für Chemnitz normal ist, wenn jährlich ca. drei Schüler Preisträger bei der Deutschen Mathematikolympiade sind und sich aller 5 bis 6 Jahre ein Chemnitzer Schüler für die Internationale Mathematikolympiade qualifiziert, während aus manchen anderen Städten vergleichbarer Größe nichts dergleichen zu vermelden ist ? Auf diesem Gebiet kommt der Klassenstufe 4 eine besondere Bedeutung zu. Die besten Fördermöglichkeiten nutzen nichts, wenn sie nicht wahrgenommen werden. Oft ist es in der 5. Klasse schon zu spät, ein als hochbegabt erkanntes Kind für die Teilnahme an Fördermaßnahmen zu gewinnen, weil andere, schon früher eingegangene Verpflichtungen wie Musikschule, Chor, Karatetraining, Laienspiel oder die Beschäftigung am heimischen PC die Freizeit restlos beschneiden. Unter den Schülern, die erst in der 5. Klasse eine Mathematik-AG besuchten, war die Fluktuation hoch. Bei denen hingegen, die schon seit der 4. Klasse dabei waren, war das Wegbleiben eine Seltenheit.
Wer sich entschließt, für begabte und interessierte Schüler der 4. Klasse eine Mathematik-AG durchzuführen, der wird es nach meiner Erfahrung nicht bereuen. Diese Anleitung und die Aufgabensammlung sollen allen behilflich sein, die diesen Schritt wagen.

Mein besondere Dank gilt Herrn Dr. Helmut König, der seit dem ersten Erscheinen dieser Anleitung im Jahre 1996 mit seinen Hinweisen und Anregungen zu vielen Detailverbesserungen beigetragen hat.
Mittlerweile ist auch eine Aufgabensammlung und eine Anleitung für **Arbeitsgemeinschaften der Klasse 3** im Angebot. Die dort von Dr. König sehr ausführlichen angelegten didaktischen Betrachtungen lassen sich voll auf die Klassenstufe 4 übertragen, deshalb wird hier in diesem Heft auf diese Thematik nur in kurzer Form eingegangen
Der Erwerb des Materials der Klasse 3 ist auch deshalb zu empfehlen, weil dort so viele Aufgaben angeboten werden, dass sie unmöglich alle in Klasse 3 behandelt werden können. Damit vergrößert sich noch unser Aufgabenfundus für Arbeitsgemeinschaften der Klasse 4.

Im Zuge der jetzigen Überarbeitung dieser Anleitung wird am Ende auch noch ein Abschnitt mit zusätzlichen Aufgaben eingefügt, die ich in letzter Zeit gefunden habe, aber noch nicht in die Aufgabensammlung aufnehmen konnte.

Wissenswertes für AG-Leiter

Für den engagierten AG-Leiter ist es sicher von Interesse, welche weiteren Möglichkeiten seine Schützlinge auch nach der 4. Klasse noch haben und welche man ihnen in der 4. Klasse noch bieten kann. In Chemnitz beispielsweise gibt es seit über 30 Jahren für Schüler der Klassen 3 und 4 eine eigene Mathematikolympiade, die in der ersten Stufe auf Schulebene durchgeführt wird. An der zweiten Stufe nehmen dann in jeder der beiden Klassenstufen die 60 besten Schüler der Stadt teil. Gegewärtig bemühen wir uns, diese Art des Wettbewerbs auch in den übrigen Städten und Kreisen des Regierungsbezirks Chemnitz zu etablieren, indem wir unsere Chemnitzer Wettbewerbsaufgaben zur weiteren Nutzung zur Verfügung stellen. Ähnliche Bemühungen gibt es auch in anderen Bundesländern. Sachsen-Anhalt beispielsweise veranstaltet einen Landeswettbewerb für die Klassen 3 und 4. Neben der Teilnahme an der Mathematik-Olympiade der Klasse 4 erhalten einige Schüler der Klasse 4 die Gelegenheit, bei der Mathematikolympiade als Frühstarter in der Klassenstufe 5 teilzunehmen. Die besten Schüler der Klasse 4 können durchaus mit der Mehrzahl der Fünftklässler mithalten, und einige schaffen sogar den Sprung unter die Preisträger. In Sachsen, Thüringen und Oberfranken gibt es für Schüler der (bzw. bis zur) 5. Klasse außerdem den dreistufigen Adam-Ries-Wettbewerb. Ich habe die Erfahrung gemacht, dass meine AG-Mitglieder der Klasse 4 die Aufgaben der ersten Stufe mit größerer Begeisterung lösen als die eigentlichen Adressaten der 5. Klasse! Auch wenn sich noch kein erwähnenswerter Wettbewerbserfolg einstellt, hilft eine vorfristige Beschäftigung allein dadurch, dass die Schüler für das kommende Schuljahr schon einige Erfahrungen in dem Wettbewerb sammeln können.
Erwähnenswert ist weiterhin im Regierungsbezirk Chemnitz der Johannes-Kepler-Wettbewerb für Physik in der Klassenstufe 6 und der "Korrespondenzzirkel Mathematik" für die Klassen 5 bis 12. Schon in Klasse 4 gibt es als Vorstufe zum Korrespondenzzirkel den vom Johannes-Kepler-Gymnasium Chemnitz ausgerichteten "Heureka-Wettbewerb".
Die Bezirke Dresden und Leipzig haben inzwischen ebenfalls eigene Korrespondenzzirkel ab Kl. 5 bzw. 7, und der KZM ab Klasse 9 wird von Chemnitz für ganz Sachsen angeboten. Schüler des Regierungsbezirks Chemnitz haben außerdem die Möglichkeit, am Johannes-Kepler-Gymnasium in Chemnitz in eine der Klassen mit verstärkt mathematisch-naturwissenschaftlichem Profil aufgenommen zu werden. Eine günstige Gelegenheit zur Information über diesen Bildungsgang bietet der zweimal pro Schuljahr für die Schüler der Klasse 4 veranstaltete "Tag der jungen Wissenschaftler".
Ähnlich gelagerte Spezialeinrichtungen wie in Chemnitz gibt in Sachsen noch in Dresden, Leipzig und Riesa.
Das "Sächsische Landeskomitee zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler" organisiert oder unterstützt einige der genannten und noch weitere Fördermaßnahmen. In jedem Regierungsbezirk arbeiten entsprechende Bezirkskomitees. Jedes Gymnasium in Sachsen hat einen "Beauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe" (oder sollte ihn zumindest haben), der die Schüler über alle diesbezüglichen Fördermöglichkeiten informieren kann und für die Organisierung solcher Maßnahmen am eigenen Gymnasium zuständig ist. Für jeden AG-Leiter der Klasse 4, dem die weitere Entwicklung seiner Schützlinge nach der Klasse 4 nicht gleichgültig ist, sind diese Beauftragten die erste Adresse!
In vielen Gymnasien sind die neuen Schüler der Klasse 5 zunächst eine mehr oder weniger anonyme Masse, aus der sich erst mit der Zeit einige auffällige Begabungen abheben. Dies kann unter Umständen länger dauern. Wenn es ein Gymnasium nicht einmal für nötig hält, vorher eine Schulmeisterschaft durchzuführen, wird die Auswahl der Starter zur 2. Stufe der Mathematikolympiade im November zum Glücksspiel. Selbst in Chemnitz mussten Gymnasien darauf aufmerksam gemacht werden, dass die von ihnen gemeldeten Schüler keineswegs ihre stärksten waren, und sie erhielten Vorschläge, wen sie außerdem starten lassen sollten. Auf diese Weise kam manches Gymnasium ohne eigenes Zutun zu

Olympiadepreisträgern in der Klasse 5. Auch sehr aktive Gymnasien können nach den ersten zwei Monaten in der Klasse 5 noch keinen vollständigen Überblick über das Leistungsvermögen ihrer Schüler haben. Als ich eine Lehrerin am Tag der 2. Stufe der Mathematikolympiade nach der Siegerehrung darüber informierte, dass einer ihrer Schüler zu den Preisträgern gehört, antwortete sie erfreut: "Das ist ja schön. Da kann ich ihm nach seinen Vieren in dieser Woche auch mal eine Eins eintragen." Im Falle eines anderen Schülers, der in der AG der Klasse 4 besonders aufgefallen war, wurde dem Gymnasium vorgeschlagen, ihn als Schüler der Klasse 5 in der Klasse 6 als Frühstarter antreten zu lassen. Trotz großer Skepsis - seine Unterrichtsleistungen waren durchschnittlich- erhielt er diese Chance. Zur zweiten Stufe gehörte er schon zu den Preisträgern, und zur dritten Stufe war er besser als alle anderen Chemnitzer Starter, die ein Jahr älter waren.
Diese Beispiele zeigen, dass die Erfahrungen der AG-Leiters aus der Klassenstufe 4 ihren Wert haben. Normalerweise sind die Gymnasien dankbar für jeden Hinweis auf zu erwartende Talente. In Chemnitz erhalten die Mitglieder der zentralen Mathe-AGs der Klasse 4 am Ende des Schuljahres eine Teilnehmerurkunde mit der ausdrücklichen Aufforderung, sie ihrem neuen Fachlehrer zu zeigen und sich nach Möglichkeiten für den Besuch einer Mathe-AG in Klasse 5 zu erkundigen. Bei diesbezüglich passiven Schulen kann auch ein solcher Nachfragedruck etwas bewirken. Dieser Druck wird um so größer, je aktiver die Förderung in der Klasse 4 verläuft.
Im Normalfall kann jeder Leiter einer Mathe-AG bei seinen Bemühungen auf vollen Rückhalt bei den betreffenden Eltern rechnen. Gelegentlich ist aber auch hartnäckige Überzeugungsarbeit nötig. Leider sind nicht wenige Eltern zunächst einmal der Meinung, dass mit der Aufnahme am Gymnasium das Maximum möglicher Förderung bereits erreicht ist. Auf jedes leichte Absinken des Zensurendurchschnitts wird hektisch damit reagiert, dass das Kind seine außerunterrichtlichen Aktivitäten einschränken und dafür mehr pauken muss. Mir selbst sagte eine besorgte Mutter zu Beginn der Klasse 6, dass sie ihre Tochter donnerstags nicht mehr in die AG gehen lassen will, weil freitags im Französisch-Unterricht häufig Leistungskontrollen geschrieben werden. Erst mit dem Gewinn der Bezirksolympiade in Klasse 6 änderte sich die Einstellung ein wenig. Mit einem regelmäßigen Besuch einer Mathematik-AG in der Klasse 4 kann nicht nur bei den betreffenden AG-Mitgliedern, sondern auch bei ihren Eltern rechtzeitig eine positive Einstellung zu einer dauerhafteren und geistig anspruchsvollen Beschäftigung mit Mathematik erreicht werden. Die in dieser Beschäftigung vermittelten Fähigkeiten und Arbeitsweisen können in der Wirkung weit über das Fach Mathematik hinausgehen. Eine ganze Reihe ehemaliger AG-Mitglieder hat sich in späteren Jahren anderen Naturwissenschaften zugewandt und dort beachtliche Ergebnisse erreicht. Das beweisen erfolgreiche Teilnahmen an internationalen Olympiaden für Physik, Chemie, Informatik, Biologie sowie an den entsprechenden nationalen Wettbewerben wie auch dem Wettbewerb "Jugend forscht". Nun ist es sicher nicht jedem AG-Leiter vergönnt, derartige spätere Spitzenkräfte unter seiner Obhut zu haben. Diese herausragenden Beispiele lassen aber erahnen, dass auch das "ganz gewöhnliche" AG-Mitglied viel durch die Beschäftigung in der Arbeitsgemeinschaft gewinnt.

Inhaltliche Schwerpunkte der AG-Arbeit

Einige Aufgabeninhalte kehren in verschiedenen Formen immer wieder. Um Punkte und Zwischenräume geht es zum Beispiel in den Aufgaben 1, 5, 7, 14, 15, 49, 54, 83; um die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n (GAUßsches Additionsverfahren) in den Aufgaben 29, 30, 38, 40, 84, 87, und 88. Diese Streuung ist beabsichtigt. Die AG-Mitglieder sollen daran gewöhnt werden, dass man bei der Lösung neuer Probleme oft erfolgreich sein kann, wenn man die Aufgabe auf bereits gelöste Probleme zurückführen kann *(Analogieprinzip)*. Auch wenn die Kinder auf anderen Wegen zum Ziel kommen, sollte man nachträglich solche Querverbindungen zu bereits behandelten Aufgaben sichtbar machen.
Schwerpunkte der AG-Arbeit in Klasse 4 bilden - unabhängig von konkreten Aufgabenstellungen - vor allem die Auswahl und der Einsatz geeigneter Darstellungsformen, Hilfsmittel und Techniken (z.B. *Tabellen, Skizzen, Gleichungen, vollständige Fallunterscheidungen, systematisches Probieren*), eine (selbst-)kritische *Ergebniskontrolle*, die konsequente Nutzung von *Rechenvorteilen* und der Vergleich verschiedener gefundener Lösungswege im Hinblick auf deren Arbeitsaufwand.
Es geht in der Arbeitsgemeinschaft nicht darum, für jede Aufgabenklasse Lösungsverfahren und ganz spezielle Tricks zu vermitteln. Viel wichtiger ist, dass ganz allgemeine Verfahren und Strategien zum Lösen problemhafter Aufgaben vermittelt werden. Dieses Anliegen hat im Grunde wenig mit Mathematik zu tun ! Die Mathematik ist hierbei - und das auch in den kommenden Schuljahren - "nur" Mittel zum Zweck. Die besonderen Möglichkeiten der Mathematik liegen darin begründet, dass die Schüler auf diesem Gebiet viel früher als in anderen Naturwissenschaften ein vielfältiges, auch im Alltag anwendbares Fachwissen mit den verschiedensten Zusammenhängen und Ausdrucksmöglichkeiten vermittelt bekommen. Damit ist eine Ausgangsposition zur Lösung vorrangig mathematischer Probleme gegeben, wobei die hierbei erworbenen Fähigkeiten später universell einsetzbar sind.
Ein ***vollständiger Problemlösungsprozeß*** gliedert sich in folgende Abschnitte:

1. Erfassen der Aufgabenstellung
2. Finden des Lösungsplanes
3. Darstellen der Lösung
4. Auswertung und Kontrolle, Rückblick, weiterführende Untersuchungen

Es wäre für die AG-Mitglieder monoton und ermüdend, wenn der AG-Leiter bei jeder Aufgabe jedem dieser Punkte einen ständig gleichbleibenden prozentualen Anteil an Zeit und Schreibarbeit widmen würde. Das Üben der Darstellung einer Lösung ist wichtig, um später bei Mathematikolympiaden auch in Punkten messbare Erfolgserlebnisse zu schaffen, aber bei der zehnten Aufgabe vom gleichen Typ kann dieser Aspekt ruhig etwas in den Hintergrund treten. Die hauptsächliche geistige Arbeit vollzieht sich beim Finden des Lösungsplanes, aber dabei muss sichergestellt sein, dass die Aufgabenstellung richtig erfasst wurde. Viele Defizite gibt es bei der Kontrolle. Eine Probe darf sich nicht auf simples Nachrechnen beschränken. Eine Probe am Text, eine Überprüfung, ob überhaupt die gestellte Frage beantwortet wurde, fehlen oft. Für manche Aufgaben sind im nachfolgenden Kapitel mehrere Lösungswege vorgestellt. Auch wo dies nicht der Fall ist, gibt es nicht nur *den* einen Weg. Oft wird man erst beim Rückblick auf den gemeinsam erarbeiteten Lösungsweg oder beim Vergleich mehrerer von AG-Mitgliedern vorgeschlagener Wege bemerken, dass die Lösung noch eleganter gefunden werden kann. Es können während des Rückblicks oder auch schon in der Phase des Erfassens der Aufgabenstellung Gemeinsamkeiten zu früher behandelten Aufgaben erkannt werden, die Rückschlüsse auf erfolgversprechende Lösungsverfahren zulassen. Wenn man bei einzelnen Aufgaben z.B. aus Zeitgründen auf die exakte Darstellung oder eine aufwendige Probe verzichtet, sollte man in jedem Falle die AG-Mitglieder darauf hinweisen, dass dies eigentlich zur Aufgabe mit dazugehört. Später wird man die Schüler bei solchen unvollständig behandelten Aufgaben dazu auffordern, die eigentlich noch nötigen Arbeitsschritte selbst zu nennen.

Zum Einsatz der Aufgabensammlung und dieser Anleitung

Weder die Aufgabensammlung noch diese Anleitung machen eine gründliche Vorbereitung jeder AG überflüssig. Welche Aufgaben man in welcher AG einsetzt, ist dem AG-Leiter ganz allein überlassen. Das Anspruchsniveau vieler Aufgaben ist sehr hoch, so dass in Abhängigkeit vom Leistungsniveau entschieden werden muss, ob und wann und in welchem Umfang (für alle, für einzelne AG-Mitglieder oder als Wahlaufgabe) eine konkrete Aufgabe verwendet wird. Einige besonders schwere Aufgaben sind in der Aufgabensammlung mit einem Sternchen (*) gekennzeichnet. Diese Einordnung ist jedoch subjektiv. Die Schüler werden bei vielen eigentlich leichten Aufgaben in (beabsichtigte) Fallen tappen. Der Lösungserfolg hängt dann auch von der Erfahrung ab, die schon mit ähnlich gelagerten Aufgaben gemacht wurde. Bei einigen Aufgaben wächst der Schwierigkeitsgrad innerhalb von Teilaufgaben a), b), c)... , und man soll nicht erwarten oder verlangen, dass alle AG-Mitglieder alle Teilaufgaben bearbeiten. Gerade solche Aufgaben dienen der inneren Differenzierung. Während die besten Schüler auch die schwierigsten Teilaufgaben versuchen, haben auch die leistungsschwächeren Schüler genügend Zeit, die ersten Teilaufgaben ungestört zu bearbeiten.

In manchen Publikationen über mathematische Arbeitsgemeinschaften in den Klassen 4 bzw. 5 wird empfohlen, jede AG mit einer kleinen Knobelei zu beginnen, dann die eigentlichen Aufgaben zu behandeln und im letzten Drittel der AG-Zusammenkunft verschiedene mathematische Spiele einzusetzen. Da der überwiegende Teil der mir bekannten Knobelaufgaben und Spiele bereits seit Jahren in der Planung der Arbeitsgemeinschaften der nachfolgenden Klassenstufe 5 Verwendung findet, habe ich auf den Einsatz dieser Mittel in Klasse 4 fast völlig verzichtet. Dabei hatte ich nicht den Eindruck, dass dies nachteilige Folgen in Form von höherer Fluktuation hätte. Wer geeignete Knobeleien und Spiele kennt, sollte sie neben der Aufgabensammlung in seiner AG auch einsetzen. Da ich aber die Hoffnung habe, dass viele AG-Mitglieder der jetzigen Klasse 4 auch im kommenden Jahr eine AG besuchen und die AG-Leiter dort unser AG-Material für die Klasse 5 benutzen, will ich die dort verwendeten Rätsel usw. nicht schon hier preisgeben.

Man muss unbedingt vor jeder AG etwas mehr Aufgaben vorbereiten, als man tatsächlich einsetzt, um flexibel auf Über- oder Unterforderung reagieren zu können. Wichtig ist, dass man sich vorher einige **Impulse** zurechtlegt, mit denen man bei besonders problemhaften Aufgaben auf einen Lösungsweg hinweisen kann, ohne ihn zu verraten. Dabei beginnt man stets mit allgemeinen Impulsen, die nur bei Bedarf durch konkretere Unterimpulse untersetzt werden. Genauso muss vermieden werden, dass besonders leistungsstarke Schüler mit der Lösung herausplatzen und so eine intensivere geistige Beschäftigung der anderen von vornherein zunichte machen. Deshalb muss man sich vorher Gedanken machen, wie man diese Schüler hinhält. Beispielsweise kann man die Schüler daran gewöhnen, dass jemand, der die Lösung weiß, sie nicht laut verrät, sondern nur den nächsten Impuls geben darf. Es fällt auch den besten Schülern sehr schwer, solche helfenden und nicht zuviel verratenden Anregungen zu formulieren. Oft habe ich in solchen Situationen diesen Schülern nach den ersten drei Worten rigoros das Wort abschneiden müssen ("Danke, das genügt schon. Mehr dürfen wir wirklich nicht verraten!"), um allen AG-Mitgliedern hinreichende Zeit zu geben, um wesentliche Bestandteile des Lösungsweges selbst zu finden.

Jeder AG-Leiter muss sich auch überlegen, wie er seinen Schülern die Aufgaben zugänglich macht. Man kann die Originalhefte verwenden. Dann muss aber ein gewisser Vorrat vorhanden sein, denn gerade bei überschulischen Arbeitsgemeinschaften ist im Laufe des Schuljahres durch stockenden Informationsfluss immer wieder mit verspäteten Neuzugängen zu rechnen. Während der Erprobung einiger Aufgaben habe ich zu Beginn jeder AG Klarsichthüllen mit je zwei Aufgabenblättern ausgeteilt, die hinterher wieder eingesammelt wurden.

In der Erprobungsphase wurde die Aufgabensammlung in 14-tägig stattfindenden AG-Nachmittagen von je 60 Minuten Dauer eingesetzt. Dabei war dies kein starrer 2-Wochen-Rhythmus, denn ein Ausfall eines AG-Termins durch Ferien und Feiertage hätte sofort eine

4-wöchige Pause bedeutet. Bei der Terminplanung hatte ich versucht, den AG-Rhythmus so zu wählen, dass Feiertage und Kurzferien immer in die AG-freie Woche fielen. Jede Abweichung brachte AG-Nachmittage mit geringerer Beteiligung, obwohl die nächsten Termine allen AG-Mitgliedern rechtzeitig bekanntgegeben wurden. Je ein AG-Nachmittag beeinhaltete die Behandlung der Aufgaben der Mathematikolympiade für die Klasse 5 (und einzelner Aufgaben der Klasse 6) in der ersten bzw. der zweiten Stufe sowie die Auswertung der ersten Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs. An einem AG-Nachmittag fand der jährliche Leistungsvergleich zwischen den zentralen Mathematik-AGs der Stadt Chemnitz statt. Für die restlichen Zirkel des Schuljahres hat die Aufgabensammlung problemlos ausgereicht. Wer sich für einen wöchentlichen AG-Rhythmus entscheidet, hat den Vorteil, dass die AG-Mitglieder nicht von Woche zu Woche achtgeben müssen, ob der Zirkel stattfindet oder nicht.

Didaktische Prinzipien

Damit der AG-Besuch für möglichst alle AG-Mitglieder fördernd wirkt, ist die konsequente Beachtung einiger didaktischer Prinzipien nötig, wobei einiges davon in den vergangenen Abschnitten schon angesprochen wurde.

1) Es darf keine Unterforderung der Leistungsstärksten zugelassen werden. Zu diesem Zweck kann man stets "Sonderaufgaben" bereithalten, damit kein Leerlauf entsteht.

2) Auch die Leistungsschwächeren müssen geistig tätig werden. Dazu dürfen die leistungsstärksten Schüler ihre Lösungen nicht vorzeitig verraten.

3) Nach dem gemeinsamen Lesen des Aufgabentextes und Fragen zum Inhalt der Aufgabe stets mit selbständigem Lösen beginnen, niemals sofort "Tips geben" !
   Zeit zum Denken lassen !
   a) Bei schweren Aufgaben die selbständige Arbeit abbrechen, wenn Schüler die Schwierigkeit erkannt haben.
   b) Bei gestaffelten Aufgaben lange Phasen der Stillarbeit mit Kontrolle von Zwischenergebnissen

4) Neue heuristische Hilfsmittel werden nur bei solchen Aufgaben eingeführt, die die Schüler nicht selbständig bewältigen können. (So wird dem Schülerargument "Warum muss ich mir das neue Verfahren aneignen ? Das kann ich auch so." vorgebeugt.)

Terminplan möglicher Höhepunkte im Schuljahr

August/September :
Die Aufgaben der ersten Stufe der Mathematikolympiade (Klasse 5 bis 12) werden veröffentlicht. Die erste Stufe liefert Aufgaben, die zu Hause gelöst werden sollen, und wird deshalb spöttisch auch manchmal "Elternolympiade" genannt. Als Kriterium für die Auswahl der Starter zur zweiten Stufe sind diese Aufgaben deshalb ungeeignet. Die Beschäftigung damit ist trotzdem ein gutes Training für die zu erwartenden Anforderungen der zweiten Stufe. Die Aufgaben müßten über das zuständige Schulamt oder in Sachsen über den "Beauftragten für Begabtenförderung und Wettbewerbe" des nächstgelegenen Gymnasiums zu beschaffen sein !
Wenn in der Nachbarschaft ein "aktives" Gymnasium liegt, so wird dort sicher eine Schulmeisterschaft zur Auswahl der Starter der 2. Stufe stattfinden. Vielleicht hat das Gymnasium Interesse, zukünftige Schüler zu werben ? Eine Beteiligung von Schülern der Klasse 4 als Frühstarter an der Schulmeisterschaft liegt vielleicht im Interesse des Gymnasiums?? "Beauftragten" fragen oder direkten Kontakt zu den Organisatoren der Kreisolympiade aufnehmen zwecks Aufnahme von Frühstartern ! (Manche Kreise machen eine eigene Olympiade der Klasse 4).

November:
Die zweite Stufe ("Kreisolympiade") findet statt. Unabhängig davon, ob es Frühstarter aus der eigenen AG gibt, sollte es selbstverständlich sein, die Aufgaben für die Klasse 5 in der AG Klasse 4 zu besprechen. Woher bekommt man sie? Siehe oben!

Dezember/Januar:
Die Aufgaben der ersten Stufe des Adam-Ries-Wettbewerbs in Sachsen werden veröffentlicht (Schulamt oder benachbartes Gymnasium fragen). Die AG-Mitglieder der Klasse 4 sollten die Möglichkeit erhalten, diese Aufgaben zu bearbeiten. Da bei der zweiten Stufe dieses Wettbewerbs schon die Kapazität für Starter der Klasse 5 arg beschränkt ist und Schüler der Klasse 4 kaum Chancen zum Weiterkommen haben, könnte man eine eigene zweite Stufe für die Klasse 4 organisieren.

Februar bis Mai:
Günstige Zeit, um einen Wettbewerb zu organisieren:
- in der eigenen AG oder
- mit AGs aus dem Nachbarkreis oder
- als eigenständige Kreisolympiade der Klassenstufe 4

Neu: jährlich im März findet der Internationale Känguruh-Wettbewerb in den Klassenstufen 3/4, 5/6, 7/8, 9/10 und 11 bis 13 statt. Bei diesem Wettbewerb muss zu jeder gestellten Aufgabe die richtige Lösung unter mehreren vorgegebenen Antworten ausgesucht und angekreuzt werden. Diese Wettbewerbsform findet bei den Schülern großen Anklang. (Von 1997 zu 1998 stieg die Teilnehmerzahl in Deutschland von 5000 auf 20 000 !)
Informationen zu den Teilnahmebedingungen erhält man unter folgender Adresse:

Mathematikolympiaden in Berlin e. V., Arbeitsgruppe Känguruh
c/o Mathematische Schülergesellschaft,
Institut für Mathematik
Humboldt Universität zu Berlin
Unter den Linden 6, 10099 Berlin
(E-Mail: mo-berlin@informatik.hu-berlin.de subject: kaenguruh)

Juni:
Feierlicher Abschluß der AG. Ausgabe von Teilnehmerurkunden mit Informationen für den Fachlehrer des nächsten Schuljahres

Besprechung der Aufgaben

1) *(Skizzen)*
Man sollte diese Aufgabe zunächst von den Schülern bearbeiten lassen und dann über das Ergebnis "abstimmen". Die Mehrzahl wird erfahrungsgemäß nicht bemerken, dass für 5 Teile nur 4 Schnitte nötig sind und deshalb eine Stunde reicht. Nun erhalten Vertreter der verschiedenen Ergebnisse die Möglichkeit, ihre Meinung zu verteidigen. Dabei wird man sinnvollerweise zuerst die Vertreter des falschen Ergebnisses zu Wort kommen lassen. Zur Verdeutlichung des Sachverhalts wird eine Skizze verwendet. Nach abgeschlossener Auswertung kann man folgende (nicht in der Aufgabensammlung enthaltene) "umgekehrte" Aufgabe stellen:
"Ein anderer Balken wird in 1½ Stunden vollständig in 20 cm lange Teile zersägt. Jeder Schnitt dauert hier 10 Minuten. Wie lang war der Balken ?"
Als zusätzliche Schwierigkeit tritt hier die in Minuten umzurechnende Zeitangabe auf. In 90 Minuten können 9 Schnitte gemacht werden, und es entstehen 10 Teile (Skizze !), also ist der Balken 2 m lang.

2) *(Rechenfertigkeiten)*
Auch wenn die Schüler zum Zeitpunkt der Aufgabenstellung die Multiplikation mit zweistelligen Faktoren noch nicht beherrschen sollten, kann diese Aufgabe gestellt werden. Beim Vergleich der verschiedenen vorgebrachten Ergebnisse kann man mit dem Impuls "Wieviel ist 10 mal 12?" sofort das häufig vorgebrachte Resultat "104" (für 12 mal 12) widerlegen lassen. Man achte darauf, wer von den Schülern dann bei der Anzahl der Katzen nicht wieder 120 + 12 + 12 + 12 rechnet, sondern das Zwischenergebnis 144 verwendet.

3) *(Systematisches Probieren, Tabellen)*
Selbständig bearbeiten lassen! Erst in der Phase der Auswertung hervorheben, dass sich zur Lösungsfindung hier besonders gut eine Tabelle eignet:

Enten	Kaninchen	Füße
16	1	32 + 4 = 36
15	2	30 + 8 = 38
14	3	28 + 12 = 40
13	4	26 + 16 = 42
12	5	24 + 20 = **44**

Wichtig ist, dass die Untersuchung hier nicht kommentarlos abgebrochen wird. Den Schülern muss bewusst sein, dass Aufgaben oft mehr als eine Lösung haben. Deshalb wenigstens noch für 11 Enten und 6 Kaninchen die Tabelle fortführen und erst dann begründen lassen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann ! Die Tatsache, dass es von Zeile zu Zeile zwei Füße mehr werden (müssen), kann man nachträglich für einen eleganteren Lösungsweg hervorheben:
17 Enten hätten 34 Beine, das sind 10 Beine zuwenig. Um mehr Beine zu bekommen, muss ich Enten durch Kaninchen ersetzen, also tausche ich 5 Enten gegen Kaninchen aus.
Wenn Schüler von sich aus eine Tabelle vorschlagen und mit einer Ente und 16 Kaninchen beginnen, kann man auf diesen Vorschlag eingehen, auch wenn mehr Versuche bis zur Lösung erforderlich sind.
In leistungsstarken Arbeitsgemeinschaften kann man an dieser Stelle durch Betrachtung der beiden Grenzfälle (17 Enten bzw. 17 Kaninchen) untersuchen, mit welchen Startwerten man näher an der gesuchten Lösung liegt.

4) *(Systematisches Probieren, Tabellen)*
Da die Schüler Aufgaben dieser Art nicht gewohnt sind, sollte man vorher nochmals verdeutlichen, dass in beiden Klammern für k die gleiche Zahl eingesetzt werden muss.

Weiterhin empfehle man, für k nicht irgendeine Zahl zu probieren, sondern systematisch vorzugehen.
Der erste Faktor in (10-k) · (k+2) = 32 verdeutlicht, dass k nicht größer als 10 sein kann.
Nun kann man in einer Tabelle alle verbleibenden Möglichkeiten für k untersuchen.

k	(10-k) · (k+2)	32 ?	
0	10 · 2 = 20	nein	
1	9 · 3 = 27	nein	
2	**8 · 4 = 32**	**ja**	(Es wäre verhängnisvoll, hier die Suche abzubrechen, nur
3	7 · 5 = 35	nein	"weil die Ergebnisse immer größer werden" !)
4	6 · 6 = 36	nein	
5	5 · 7 = 35	nein	
6	**4 · 8 = 32**	**ja**	Die Aufgabe hat zwei Lösungen. Klaus hat sich die 2 oder
7	3 · 9 = 27	nein	die 6 ausgedacht.
8	2 · 10 = 20	nein	
9	1 · 11 = 11	nein	
10	0 · 12 = 0	nein	

5) *(Skizzen, Analogieprinzip)*
Wie bei Aufgabe 1 vorgehen! Es wird sicher wieder falsche Lösungsvorschläge geben.
Zwischen den 7 Zeitpunkten liegen nur 6 Zwischenräume, sodass die 7. Tablette schon 15 Uhr (und nicht 15.30 Uhr) genommen wird !
Nachträglich kann man auf die Gemeinsamkeit mit Aufgabe 1 hinweisen und die Zeitpunkte bzw. Zwischenräume auf einem Zeitstrahl nochmals veranschaulichen. Die Schüler werden nun darauf brennen, sich bei der nächsten Aufgabe dieser Art ganz bestimmt nicht mehr hereinlegen zu lassen.
(Keinesfalls verraten, dass die Aufgabe 7 die gleiche Falle stellt !)

6) *(Rechenfertigkeiten)*
Wichtig ist, dass eventuelle falsche Lösungen durch die Schüler selbst erkannt werden.
Jedes genannte Ergebnis ist sofort durch den betreffenden Schüler nachzuvollziehen:
"(meine Anzahl) plus (das Doppelte davon) plus 1 ergibt ...".
Falls von den Schülern nicht selbst vorgebracht, kann man nachträglich die Gleichung
$e + 2 \cdot e + 1 = 100$ angeben, die auf $e + 2 \cdot e = 99$ bzw. $3 \cdot e = 99$ führt.

7) *(Skizzen)*
Nach einer Abfrage der Ergebnisvorschläge sollte man zunächst fragen, wieviel Laternen auf jeder einzelnen Straßenseite stehen. Da die Anzahl ungerade ist, können links nicht genau so viele Laternen wie rechts stehen. Also können die linken Laternen nicht auf gleicher Höhe wie die rechten Laternen, sondern nur in deren Zwischenräumen stehen (Skizze!) Deshalb gibt es links genau eine Laterne weniger als rechts (links 23, rechts 24 Laternen). Bei gehäuften Fehlern kann man den Schülern eventuell nach Bekanntgabe bzw. Erarbeitung dieses Zwischenergebnisses nochmals Zeit geben, mit dem richtigen Wert weiterzurechnen.
Die 24 Laternen auf der rechten Seite haben 23 Zwischenräume, sodass die Straße
$23 \cdot 20$ m = 460 m lang ist.

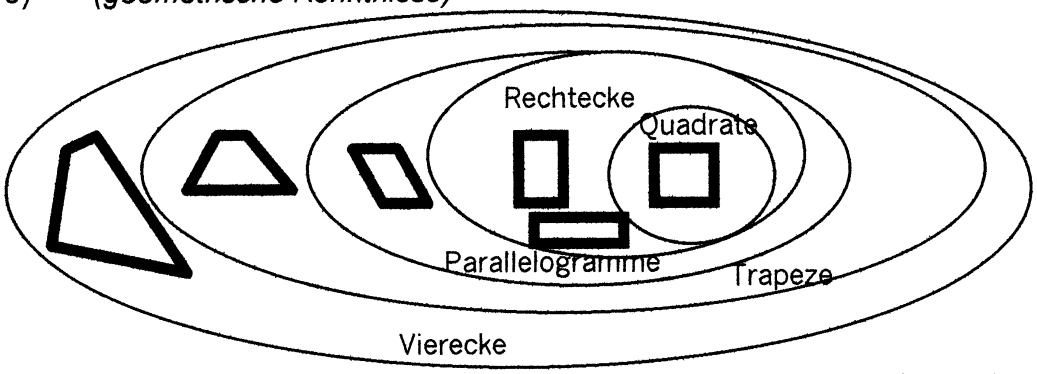
8) *(Tabellen)*
Eine "Meinungsumfrage" über das Resultat wird vermutlich alle drei möglichen Antworten (günstiger, ungünstiger, gleich) liefern. Die Aufforderung, ihre jeweilige Meinung gegenüber den anderen AG-Mitgliedern zu vertreten, wird von den Kindern zwar eifrig angenommen, die Resultate dieser Argumentation sind aber unbefriedigend. (Testfrage an andere: "Hast Du verstanden, was X eben ausdrücken wollte?")

Auch mit solchen Verständigungsschwierigkeiten kann man zu einer übersichtlichen Darstellung der Situation motivieren. Folgende Übersicht kann erarbeitet werden:

Bauer A:	60 Eier	6 Eier für 1 € (10 mal)	**10 €**
Bauer B:	60 Eier	4 Eier für 1€ (15 mal)	**15 €**
zusammen:	120 Eier	10 Eier für 2€ (12 mal)	**24 €**

Vergleich: Im Einzelverkauf erhalten sie insgesamt 25 €, also ist der gemeinsame Verkauf unter den genannten Bedingungen ungünstiger.

9) *(geometrische Kenntnisse)*



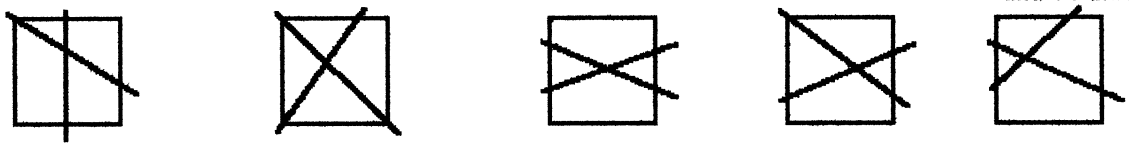
Jedes Quadrat ist auch ein Rechteck, jedes Rechteck ist auch ein Parallelogramm, jedes Parallelogramm ist auch ein Trapez, und jedes Trapez ist ein Viereck. Deshalb befinden sich unter den gezeichneten 6 Vierecken 5 Trapeze, unter den 5 Trapezen auch 4 Parallelogramme, unter den 4 Parallelogrammen auch 3 Rechtecke und unter den 3 Rechtecken auch 1 Quadrat. Die Aussage von Sven ist also wahr. Wenn man das linke Viereck wegläßt, hat man trotzdem noch die geforderte Anzahl von speziellen Vierecken.

10) *(Findigkeit)*

3 Personen reichen aus. (Urgroßmutter, Großmutter, Mutter)

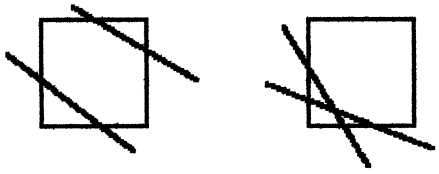
11) *(Findigkeit)*

1 Dreieck und 3 Vierecke | 1 Viereck und 3 Dreiecke | 2 Dreiecke und 2 Fünfecke | 2 Dreiecke, 1 Viereck und 1 Fünfeck | 1 Dreieck, 2 Vierecke und 1 Fünfeck



12) *(Findigkeit)*

Für eine Zerlegung, die (unter anderem) ein Sechseck und zwei Dreiecke erzeugt, gibt es 2 Möglichkeiten : (1 Sechseck und zwei Dreiecke oder 1 Sechseck, 2 Dreiecke und 1 Viereck)



13) *(Verwendung von Variablen)*

Die Schüler werden sicher versuchen, die Lösung durch Probieren zu finden. Hier bietet sich eine günstige Gelegenheit, Vorteile beim Einsatz von Variablen zu zeigen.

auf dem Tisch: x
Fritz: $f = 2 \cdot x$
Bast: $b = 3 \cdot f = 6 \cdot x$
Hans: $h = 4 \cdot b = 24 \cdot x$
zusammen: $32 \cdot x = 160$, daraus folgt $x = 5$, $f = 10$, $b = 30$, $h = 120$.
Probe: $10 + 30 + 120 = 160$.

14) *(Skizzen)*
Nach (vermutlich erfolgloser) selbständiger Arbeit können geeignete Impulse helfen. Dabei soll man sich hüten, durch zu gute "Tips" zu nah an die Lösung zu führen! Jeder dieser gutgemeinten Hinweise kann ein Stück eigener geistiger Aktivität der Schüler verhindern. Ein sehr allgemeiner Impuls ist die fast überall einsetzbare Frage: "Auf welche Weise können wir uns die Aufgabe für die gemeinsame Bearbeitung veranschaulichen?" Je nach Aufgabe können hier die verschiedensten Vorschläge kommen (Tabellen, Skizzen, Mengendiagramm, Baumdiagramme, Gleichungen ...) In diesem Fall ist eine Skizze der Strecke sinnvoll. Wenn nötig, muss man mit weiteren (sparsamen!!) Impulsen darauf hinweisen, dass sich auf der Strecke bereits vorher abgefahrene Straßenbahnen befinden. Weiß man, wieviel? Welcher konkrete Zeitpunkt wird dargestellt? Gemeinsam wird man feststellen, dass unsere Bahn bei der Abfahrt um 10 Uhr als erstes eine gerade ankommende Gegenbahn trifft. Wie überlegen wir weiter? ("Welches ist die letzte Bahn die sie trifft ?" oder "Wann fuhr die zuerst getroffene Gegenbahn ab?" wären logische Fortsetzungen unserer Überlegungen.) Nicht verzweifeln, wenn die erhofften Antworten ausbleiben ! Auch Gegenbeispiele können Impulse sein: "Treffen wir unterwegs eine Bahn an, die 7.30 Uhr aus der Gegenrichtung gestartet ist?" (Nein, die ist ja schon angekommen).
Wir treffen letztendlich alle Bahnen, die ab 8 Uhr bis zu unserer Ankunft um 12 Uhr abfuhren. Wieviel sind das? Selbst in diesem relativ einfachen abschließenden Schritt kann es noch fehlerhafte Ergebnisse geben. Es sind
- im Viertelstundentakt (in 4 Stunden 16 Zeitabstände , also 17 Zeitpunkte) : 17 Bahnen
- im 10-Minuten-Takt (in 4 Stunden 24 Zeitabstände, also 25 Zeitpunkte) : 25 Bahnen
Wichtig ist auch hier, dass die Schüler bei auftretenden unterschiedlichen Ergebnissen die Gelegenheit erhalten, ihr Ergebnis zu vertreten. Der AG-Leiter steuert nur dieses "Streitgespräch".

15) *(Findigkeit)*
Impuls: Das Verfahren klappt nur bei Zeigeruhren.
In 12 Stunden dreht sich der Stundenzeiger einmal, der Minutenzeiger zwölfmal. Also wird der Stundenzeiger elfmal "überrundet". Wachablösung ist, wenn Stundenzeiger und Minutenzeiger aufeinanderstehen.

16) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*

"Wer steht neben Dir ?"	"Wer bist Du ? "	"Wer steht neben Dir ?"
"Der Gott der Wahrheit !"	"Der Gott der Diplomatie !"	"Der Gott der Lüge !"

Sofern die Schüler nicht von selbst erkennen, dass der Gott der Wahrheit nur rechts stehen kann, sollte man sich die Mühe machen und alle Anordnungsmöglichkeiten finden. Es sind dies in lexikografischer Ordnung: DLW, DWL, LDW, LWD, WDL, WLD. Im Anschluß daran werden alle 6 Möglichkeiten in einer Tabelle erfaßt und auf Widersprüche untersucht. Diese Wider-sprüche entstehen sofort in allen Fällen, in denen der Gott der Wahrheit links oder in der Mitte steht. (Der Gott der Wahrheit würde lügen, wenn er sagt, dass der Gott der Wahrheit neben ihm steht. Er würde ebenfalls lügen, wenn er sagt, dass er der Gott der Diplomatie wäre.) Also steht der Gott der Wahrheit rechts und nach seiner Aussage in der Mitte der Gott der Lüge.

Probe : Bei der hier gefundenen Platzverteilung lügt der Gott der Lüge, und der Gott der Wahrheit sagt die Wahrheit.

17) *(Variable und Gleichungen)*
Das Doppelte einer Zahl, mit 6 multipliziert, beträgt 96.
$(2 \cdot x) \cdot 6 = 96$, also $12 \cdot x = 96$. Es gilt $x = 8$.

18)
Welche geraden Zahlen erfüllen folgende Ungleichungen ?
a) $11 < 3 \cdot a + 3 < 22$ Es muss $2 < a < 7$ gelten. Die geraden Zahlen sind 4 und 6.
b) $17 < x : 2 < 21$ x kann 36, 38 oder 40 sein.
c) $29 < y : 2 < 21$ Es muss $y > 58$ **und** $y < 42$ gelten. Das gilt für keine Zahl.
d) $23 < a : 4 < 28$ a kann 96, 100, 104 oder 108 sein.

19)
Falsche Ergebnisse sollten nicht vom AG-Leiter verneint werden. Jedes genannte Ergebnis wird gemeinsam einer Probe unterzogen !
a) Claudia hat recht. Wären es 68 Erwachsene, dürften es nur 52 Kinder sein. Die Differenz ist dann 16 und nicht 8.
b) Es sind 64 Erwachsene und 56 Kinder. Die 64 Erwachsenen verteilen sich wegen der Differenz 20 in (32 + 10) Männer und (32 - 10) Frauen. Die Anzahl der Jungen ist dann größer als 21, aber nicht größer als 22. Also gibt es genau 22 Jungen und deshalb noch 34 Mädchen.

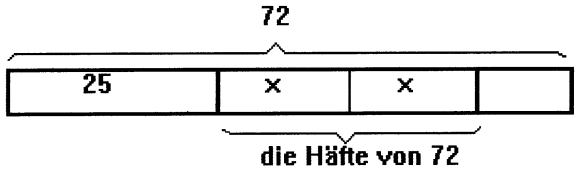
20)
$10^6 = 1\,000\,000$, $20 \cdot 10^5 = 2\,000\,000$, $9 \cdot 10^4 = 90\,000$, $4 \cdot 10^7 : 10 = 4\,000\,000$
Die Reihenfolge lautet deshalb
$30000 < 9 \cdot 10^4 < 10^6 < 20 \cdot 10^5 < 4 \cdot 10^7 : 10$

21)

Zahl :	10^{197}	$10^5 - 9$	$2 \cdot (10^4 - 8)$	$2 \cdot 10^5 - 6 + 433$
Endziffer :	0	1	4	7

22) *(Variable und Gleichungen)*
a) $10^3 + z = 10^4$ $z = 9\,000$
b) $z - 7 \cdot 10 = 10^3$ $z = 1\,070$
c) $10^6 : z = 5 \cdot 10^5$ $z = 2$
d) $z \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^5$ $z = 20$

23) *(Skizzen)*
Möglich wäre eine Skizze in folgender Form:



Die Kinder sammelten 25, 18, 18 bzw. 11 Kastanien.

24) *(Variable und Gleichungen)*
$3 \cdot x - 500 = 4000$, also $3 \cdot x = 4500$. Es ist $x = 1500$.

25) *(Rückwärtsarbeiten)*
Diese Aufgabe kann mit der Strategie des Rückwärtsarbeitens recht gut gelöst werden. Impulse wären: Welche Angaben brauche ich, um zu ermitteln, wieviel Tage **vorfristig** etwas erledigt wurde?
(geplante Zeit und tatsächliche Zeit). Wie kann ich diese beiden Zeiten ermitteln ?
Geplant waren 189 : 7 = 27 Tage, benötigt wurden 189 : 9 = 21 Tage. Die Arbeit wurde 6 Tage vorfristig beendet.

26) *(Systematisches Probieren, Hilfsaufgabe)*
Impuls: Was passiert, wenn ich darauf verzichte, noch um 9 zu vermindern ? Mein Ergebnis würde nicht zwischen 172 und 209, sondern zwischen 181 und 218 liegen. Formuliere die Aufgabe neu!
(Das Dreizehnfache der Zahl liegt zwischen 181 und 218). Das Aufstellen der Folge der 13 liefert:
... 130, 143, 156, 169, **182, 195, 208**, 221, ... Die abschließende Probe für alle drei Ergebnisse erfolgt natürlich nicht an der umgeformten, sondern an der urprünglichen Aufgabe, um Rechenfehler im ersten Schritt auszuschließen.

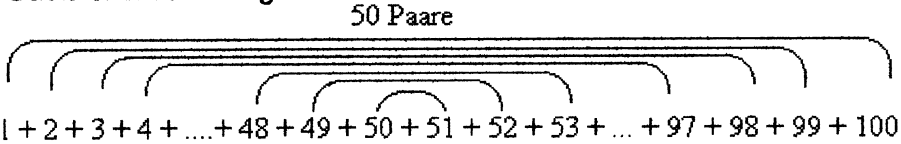
27) *(Findigkeit)*

A	B	C	Aktion	
8	0	0	Ausgangsstellung	
3	5	0	A → B	
3	2	3	B → C	
6	2	0	C ⇒ A	
6	0	2	B ⇒ C	
1	5	2	A → B	**1 Liter im Krug A**
1	**4**	3	B → C	**4 Liter im Krug B**
4	4	0	C ⇒ A	
4	1	3	B → C	
7	1	0	C ⇒ A	**7 Liter im Krug A**

(⇒ bedeutet vollständiges Leeren, → bedeutet Umgießen, bis Zielkrug gefüllt ist)
Die Teilergebnisse lassen sich möglicherweise auch in einer anderen Reihenfolge finden.

28) *(Systematisches Probieren, Hilfsaufgabe)*
Zuächst wird man die Zahlen in die normale Darstellungsform übersetzen müssen. Man erhält
715, 200, 25, 400, 140. Falls in annehmbarer Zeit keine Lösung gefunden wird, hilft folgender Impuls: "Addiere alle Zahlen !" Das Ergebnis ist 1480 (und die Hälfte davon 740). Um das Ergebnis Null zu erhalten, muss insgesamt 740 - 740 gerechnet werden. Damit lautet unsere Hilfsaufgabe: "Suche Zahlen aus, deren Summe 740 beträgt!" Für die größte Zahl, 715, gibt es unter den gegebenen Zahlen nur einen Partner, um auf 740 zu kommen. Die gesuchte Aufgabe lautet also
715 - 200 + 25 - 400 - 140 = 0.

29) *(Rechenvorteile)*
Gauß entdeckte folgenden Rechenvorteil:



$= 50 \cdot 101 = 5050.$

Leichter zu merken ist die Regel in folgender Form:

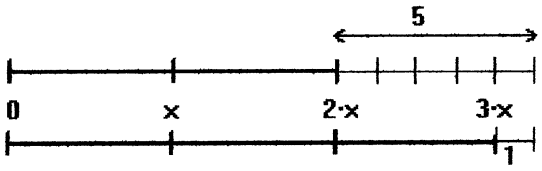
Will man die Zahlen von 1 bis 100 addieren , rechnet man 100 · 101 und teilt das Ergebnis durch 2 .
Allgemein: 1 + 2 + 3 + ... + n = n · (n + 1) : 2
(oder in Worten: "letzter Summand mal Nachfolger durch zwei"). Diese Form hat den Vorteil, dass sie auch bei einer ungeraden Anzahl von Summanden funktioniert, wenn bei der Paarbildung ein Summand übrigbleibt. Diese Regel sollte sofort an einfachen, nachprüfbaren Beispielen bestätigt werden (Summe der Zahlen von 1 bis 5, von 1 bis 8, ...). *Für einen anderen Weg der Herleitung dieser Regel siehe auch S. 49 !*

30) *(Rechenvorteile)*
Die Kinder sollen selbständig erkennen, dass sie das GAUßsche Additionsverfahren anwenden können. Paarbildung (15 Paare mit je 31) wird man zwar akzeptieren, aber in der Auswertung auf die genormte Form "letzter Summand (30) mal Nachfolger des letzten Summanden (31) durch zwei" hinweisen. In beiden Formen erhält man 15 · 31 bzw. 30 · 31 : 2 = 465.

31) bis 34)
Diese Aufgaben kann man einzeln oder im Komplex stellen. Die AG-Mitglieder werden aufgefordert, sich die ihrer Meinung nach leichtesten Aufgaben herauszusuchen und diese zu lösen. Die leistungsstärksten Schüler werden die Gelegenheit nutzen, um alle vier Aufgaben zu lösen. Stellt man noch während der Phase der Stillarbeit fest, das die besten Schüler auch fehlerhafte Ergebnisse haben, so wird man ihnen nur mitteilen, dass nicht alle Ergebnisse richtig sind und sie den Fehler selbst suchen sollen. So kann man die Phase der Stillarbeit strecken und dadurch den langsameren Schülern zusätzliche Zeit verschaffen.

31) x - 5·7 = 60 : 4 ("Übersetzen der Aufgabe in die Sprache der Gleichungen")
x - 35 = 15 (beidseitiges Vereinfachen)
x = 50 (Probe !)

32) Lösung veranschaulichen:



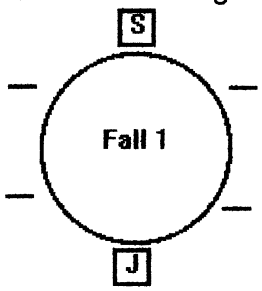
x = 4

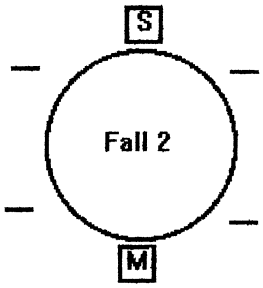
33) Der erste Summand ist 66.

34) *(Variable und Gleichungen)*
x + 7 · x = 9 · x - 7
8 · x = 9 · x - 7
x = 7 (Probe !)

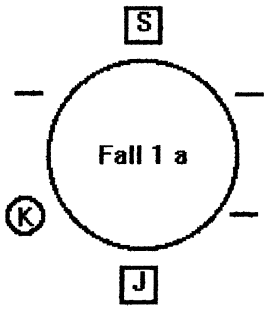
35)
Diese Aufgabe ist ohne geeignete Veranschaulichung kaum lösbar. Der Aufgabenteil b) lässt zudem offen, ob es eine oder mehrere Lösungen geben kann. Deshalb müssen alle möglichen Fälle untersucht werden. Auch ältere Schüler geben sich bei einer solchen Aufgabenstellung oft mit der Angabe der Lösung(en) zufrieden. Die eigentliche Antwort zu b) muss aber lauten: "Die Reihenfolge der Sitzordnung ist durch die Angaben eindeutig / nicht eindeutig bestimmt."
zu a) Aus dem Aufgabentext geht bereits hervor, dass Kerstin Steffens Schwester ist. Wegen (1) kann Anja nicht Michaels Schwester sein, also muss sie die Schwester von Jörg sein. Übrig bleibt das Geschwisterpaar Doris-Michael.
zu b) Problematisch für die AG-Mitglieder ist oft sogar die Formulierung "links neben Anja" (je nachdem, ob die "obere" oder die "untere" Tischhälfte betrachtet wird). Es ist zu klären, dass "links von..." soviel bedeutet wie "im Uhrzeigersinn". Weiterhin vereinbaren wir, dass

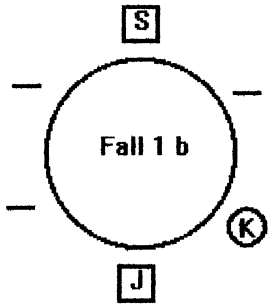
Sitzordnungen nur dann als verschieden gelten, wenn sie nicht durch Drehung des Tisches auseinander hervorgehen.
Empfehlenswert ist die Abkürzung der Namen durch Anfangsbuchstaben und die unterschiedliche Kennzeichnung von Sitzplätzen für Jungen und Mädchen. Wenn wir als erstes Steffen einen Platz am Tisch zuweisen, ergeben sich durch Bedingung (2) die folgendenden zwei Möglichkeiten:

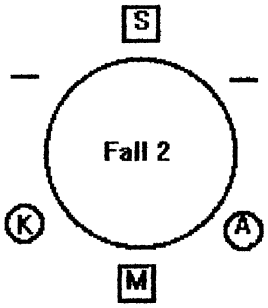




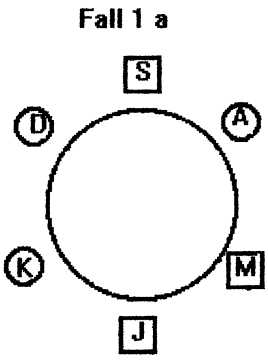
Kerstin darf als Schwester von Steffen nicht direkt neben ihm sitzen. Im Fall 1 kann sie einen der beiden Plätze neben Jörg (Fall 1 a bzw. 1 b) besetzen. Im Fall 2 kann sie nur links neben Michael sitzen, weil rechts von Michael Anja sitzt.

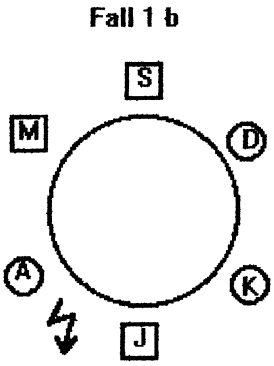


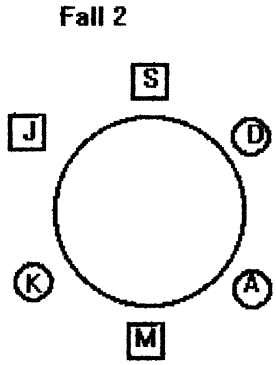




In den Fällen 1a und 1b müssen Anja und Michael (in dieser Reihenfolge im Uhrzeigersinn) die zwei nebeneinanderliegenden freien Plätze einnehmen, und Doris erhält den letzten freien Platz.
Im Fall 2 kommt für Jörg der Platz neben seiner Schwester Anja nicht in Frage, dort muss also Doris sitzen.

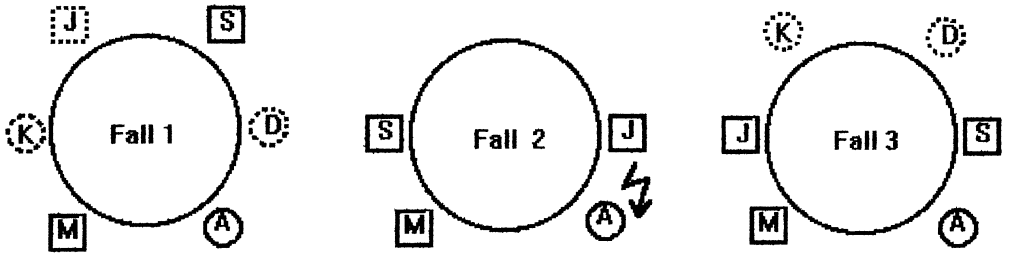






Falls die Schüler den Widerspruch im Fall 1 b nicht selbst bemerken, fordern wir sie gleich dazu auf, einen Antwortsatz zu formulieren. Wenn dann Formulierungen wie "die Verteilung kann ...oder ...sein" kommen, werden sie aufgefordert, noch einmal die Fragestellung von b) laut vorzulesen.
Der Antwortsatz lautet also: "Die Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar" mit dem Nachsatz des AG-Leiters: "Falls unsere Möglichkeiten stimmen !!!". Eine Probe am Text muss zeigen, dass

im Fall 1 b Jörg neben seiner Schwester Anja sitzt. Nur die Sitzordnungen 1a und 2 sind widerspruchsfrei.
Abschließend könnte man noch die (sehr haarspalterische) Frage stellen, ob nun für die sechs anwesenden Kinder zwei Sitzordnungen möglich sind oder ob die Angaben für uns nur nicht ausreichend sind, um eine einzig mögliche Sitzordnug zu finden. (Da nur einer der Jungen der älteste sein kann, muss Steffen genau einem der Jungen gegenübersitzen. Es ist also nicht möglich, dass die Kinder im Laufe der Geburtstagsfeier von einer zur anderen Sitzordnug überwechseln, ohne gegen die Bedingungen der Aufgabe zu verstoßen.) Dies sollte man wirklich nur fragen, wenn damit die Mehrzahl der AG-Mitglieder nicht überfordert wird.Ein anderes Herangehen liefert ein Ansatz mit der Bedingung (1) Links neben Anja saß Michael.



Für den Sitzplatz von Steffen gibt es dann drei Möglichkeiten, von denen zwei zu einer Lösung führen. Vom Aufwand her ist es etwa gleich, ob drei Fälle betrachtet werden oder zwei Fälle, von denen sich einer in zwei "Unterfälle" aufspaltet.

36) *(Variable und Gleichungen)*
Die Aufgabenstellung wird "in die Sprache der Gleichungen übersetzt". Die schrittweise Vereinfachung der Gleichungen erfolgt durch inhaltliche Überlegungen.

$(x + 9) \cdot 9 = 99 + 9$
$(x + 9) \cdot 9 = 108$
$(x + 9) = 12$
$x = 3$

37) *(Inhaltliches Schließen)*
Die AG-Mitglieder werden sicher schnell erkennen, dass die Aufgabe die Form aaa + ... = aaa0 hat. Wenn die Summe das Zehnfache des ersten Summanden ist, muss der zweite Summand das Neunfache des ersten Summanden ist. Es gibt neun derartige Aufgaben (aaa kann 111, 222, ... , 999 sein).

38) *(Rechenvorteile, Vorwärtsarbeiten)*
Wieder ein Fall für das GAUßsche Additionsverfahren ! Die Summe aller 16 Zahlen ist $1 + 2 + 3 + ... + 15 + 16 = 16 \cdot 17 : 2 = 8 \cdot 17 = 136$.
Da die Summe der vier Zahlen in jeder der vier Zeilen gleich ist, beträgt sie jeweils den vierten Teil von 136, also **34**. Im Nachhinein wird man feststellen, dass die Mühe, $8 \cdot 17 = 136$ zu berechnen, überflüssiger Rechenaufwand war. Der vierte Teil von $8 \cdot 17$ ist $2 \cdot 17$! Sicher ist das nicht das Hauptziel dieser Aufgabe, aber man sollte keine Gelegenheit auslassen, um die Schüler für mögliche Rechenvorteile zu sensibilisieren.
Ist die benötigte Summe 34 erst einmal bekannt, können die unterste Zeile, beide Diagonalen und die zweite Spalte sofort ausgefüllt werden. Daraus ergibt sich auch die oberste Zeile. Lediglich in den noch freien je zwei Feldern der ersten und letzten Spalte muss man probieren, mit welchen zwei Summanden man den jeweils fehlenden Betrag erhält. Dabei sind die beiden paarweise einzusetzenden Zahlen nicht vertauschbar, weil sonst die Zeilensummen nicht stimmen. Auch hier ist eine nachträgliche Probe unbedingt erforderlich.

39) *(Findigkeit)*

35 + 10 + 7 = 52
75 - 25 - 0 = 50 oder 75 - 25 + 0 = 50
(1 + 0) - 1 = 0 oder (1 - 0) - 1 = 0 oder (1 · 0) · 1 = 0 oder (1 · 0) : 1 = 0
57 - 17 · 1 = 40 oder 57 - 17 : 1 = 40
(25 + 15) : 2 = 20 oder (25 - 15) · 2 = 20

(Die AG-Mitglieder, die sehr schnell fertig sind, erhalten den Auftrag, nach allen Möglichkeiten zu suchen.)

40) *(Rechenvorteile, Hilfsaufgabe)*

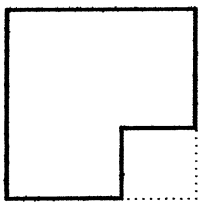
Selbst die einfache Aufgabe a) hat oft eine relativ hohe Fehlerquote. Zweistellig sind die Summanden von 42 bis 99, das sind 58 Zahlen. Dreistellig sind 100 bis 999, das sind 900 Zahlen, und vierstellig sind 1000 bis 2000, das sind 1001 Zahlen.
Fehlerhafte Ergebnisse muss man nicht sofort korrigieren. Die Schüler sollten vielmehr nach Möglichkeiten zur Probe suchen. Insgesamt sind es (2000 - 41) = 1959 Zahlen, die als Summe der drei Anzahlen erhalten werden müssen.
Falls die Schüler nicht in der Lage sind, die Aufgabe b) selbständig zu lösen, wird man folgenden Impuls geben: "Könntest Du Dir zunächst eine Aufgabe stellen, die einfacher zu lösen ist als die Berechnung der Summe der Zahlen **von 42** bis 2000 ?" (Die Summe der Zahlen von 1 bis 2000 ist mit dem GAUßschen Additionsverfahren leichter zu berechnen). Von dieser Summe muss man nur noch die Summe der Zahlen von 1 bis 41 subtrahieren.
Wir erhalten 2000 · 2001 : 2 - 41 · 42 : 2 = 1000 · 2001 - 41 · 21
= 2 001 000 - 861
= 2 000 139.

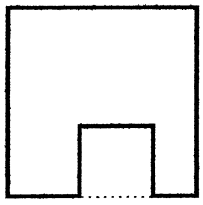
Auch hier waren wieder Rechenvorteile nutzbar. Anstatt ein Produkt zu bilden und dann zu halbieren, wurde gleich einer der Faktoren halbiert.

Ein abweichender Lösungsweg für die Teilaufgabe b) ergibt sich, wenn man das Gaußsche Additionsverfahren auf einem anderen Weg eingeführt hat.
(Siehe "Nachbetrachtungen" , S. 49!)

41) *(Findigkeit)*

Das ausgeschnittene Quadrat hat einen Umfang von 6 cm, das sind 12 Kästchenlängen. Jede Seite besteht als aus 3 Kästchenlängen, und das ausgeschnittene Quadrat besteht aus 3 · 3 = 9 Kästchen.
Die Anzahl der Ecken der Restfigur richtet sich danach, wo das Quadrat ausgeschnitten wurde.





Es sind sowohl ein Sechseck als auch ein Achteck möglich. Im ersten Fall gleichen sich Umfangsgewinn und -verlust beim Ausschneiden aus, der Umfang bleibt bei 16 cm. Die zweite Restfigur verliert eine Seitenlänge des ausgeschnittenen Quadrates, bekommt aber das Dreifache dazu. Der Umfang wächst auf 19 cm.

42) *(Tabellen, Fallunterscheidung)*
Ein Schüler darf seine Überlegungen zur Fahrzeit des Schwerlasttransporters vortragen. Die genannten Schritte werden in einer Tabelle festgehalten, die folgendes Aussehen haben könnte:

km	Stunden		oder	km	Minuten
30	1			30	60
120	4			1	2
135	?	(15 km fehlen noch.)		135	135·2
15	0,5				
135	4,5				

Die Fahrt dauert 4½ h oder 270 min. Ankunft ist 12.30 Uhr

Analog erhält man für das Moped eine Fahrzeit zwischen 2 und 3 Stunden. Für die genaue Zeit ist eine Angabe von Fahrstrecken in Minuten hier unverzichtbar:

km	Stunden		km	Minuten
50	1			
100	2			
135	?	⇒	35	?
150	3		50	60
			5	6
			5·7	**6·7**

Der Mopedfahrer benötigt für 100 km 2 Stunden und für 35 km 42 Minuten. Er ist 11.42 Uhr als erster Fahrer im Ziel.
Für den Aufgabenteil b) kann zunächst im Gespräch geklärt werden, in welchen Situationen der Abstand 10 km beträgt. Dies ist zunächst einmal vor und nach dem Überholen der Fall. Wenn keiner auf die Idee kommt, dass es noch weitere Möglichkeiten gibt, sollte man vorerst noch nicht darauf aufmerksam machen. Falls die Schüler keinen Ansatz finden, hilft der Impuls: "Was geschieht zwischen 8 Uhr und 9 Uhr ? ". Der Schwerlasttransport legt 30 km zurück, während das Moped noch steht. In jeder Stunde schafft das Moped dann 20 km mehr, ist also nach einer Stunde Fahrzeit nur noch 10 km zurück. Nach einer weiteren Stunde hat es 10 km Vorsprung. Die zugehörigen Zeitpunkte sind **10 Uhr** bzw. **11 Uhr**. Nun sollen die Schüler entscheiden, ob es noch weitere Möglichkeiten als diese beiden gibt. Wer die Situation gründlich analysiert, findet noch die Zeiten **8.20 Uhr** (Moped noch am Start) und **12.10 Uhr** (Transport 10 km vor dem Ziel).
Auch bei dieser Aufgabe sollten zusätzlich zur Tabelle (bzw. parallel dazu) Skizzen eingesetzt werden. Denkbar wäre z.B. folgender Impuls: "Fertige für jede volle Stunde ab 8 Uhr eine Skizze der Strecke mit den jeweiligen Standorten von Moped und Schwerlasttransport an!"

43)

		6	9	2		
	5	2	3	1	2	
4	6	3	1	5	3	2
8	1	7	5	5	3	7
	5	6	1	8	1	
		4	3	2		

44) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Wichtig ist das exakte Erfassen der Aufgabenstellung. Zwei häufig geäußerte Schülerantworten bei dieser Aufgabe waren: "In der Aufgabe steht, dass eine der vier

Aussagen falsch sein soll." (Falsch. "Mindestens drei von vier Aussagen sind wahr" kann auch bedeuten, dass alle Aussagen wahr sind.)
"Frank muss der Täter sein, weil nur er zweimal beschuldigt wird und nicht zwei Aussagen falsch sein dürfen!" (Diese Begründung ist fehlerhaft. Wenn Uwe der Täter war, ist nur eine der beiden beschuldigenden Aussagen "Frank war es" und "Frank oder Uwe haben es getan" falsch.)
Die Lösung kann auf verschiedenen Wegen gefunden werden.
1. Lösungsweg (Vollständige Fallunterscheidung der möglichen Täter)
Fall 1 : Peter war es. Dann lügen Peter und Sven.
Fall 2 : Frank war es. Dann lügt nur er.
Fall 3 : Uwe war es. Dann lügen Uwe und Sven.
Fall 4 : Sven war es. Dann lügen Peter und Sven.
Nur im Fall 2 wird die Bedingung erfüllt, dass mindestens drei Aussagen wahr sind. Es kann kein anderer als Frank der Täter sein.
2. Lösungsweg: (vollständige Fallunterscheidung über die falsche Aussage)
(Die Aussagen werden jeweils durch die Anfangsbuchstaben der Sprecher bezeichnet).
Fall 1 : P falsch. Dann waren weder Frank noch Uwe Täter, und es ist S falsch.
Fall 2 : F falsch. Dann war Frank der Täter, und alle anderen Aussagen sind wahr.
Fall 3 : U falsch. Dann war Uwe der Täter, und auch S ist falsch.
Fall 4 : S falsch. Dann war es Frank nicht. Da aber jetzt P wahr sein muss, ist Uwe der Täter, aber dann ist U auch falsch.
Fall 5 : keine Aussage falsch. Unmöglich, weil S und F nicht beide wahr sein können.
3. Lösungsweg: (Abkürzung des 1. Lösungsweges)
Fall 1 : Frank war es. Dann ist nur seine Aussage falsch.
Fall 2 : Frank war es nicht. Dann ist die Aussage von Sven falsch.. Dann ist die Aussage von Peter wahr und von Uwe falsch oder umgekehrt.
Lediglich im Fall 1 wird die Bedingung erfüllt, dass mindestens drei Aussagen wahr sind. Es kann kein anderer als Frank der Täter sein.
Nur durch die vollständige Fallunterscheidung konnten wir ausschließen, dass es noch andere mögliche Täter gibt. Die Probe auf mindestens drei wahre Aussagen ist im 2. Lösungsweg nicht mehr extra erforderlich. Das darf bei den Schülern nicht zu dem Eindruck führen, dass diese Aufgabe ohne Probe gelöst wird. Sie sollen erkennen, dass die Probe schon in der Untersuchung jedes möglichen Falles gemacht wurde. Abschließend kann man den AG-Mitgliedern mitteilen, dass diese Aufgabe in der 2. Stufe der Mathematikolympiade (Kreisolympiade) in der Klassenstufe 7 gestellt wurde.

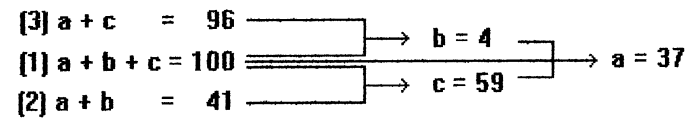
45)
Die AG-Mitglieder werden aufgefordert, die Aufgabe selbständig zu bearbeiten. Nach einer angemessenen Zeit wird man zur Formulierung des Antwortsatzes auffordern. Oft stellt sich heraus, dass die Aufgabenstellung ungenügend beachtet wird und anstatt der geforderten Gesamtanzahl nur die einzelnen Anzahlen genannt werden. Bei solchen Gelegenheiten muss man immer wieder verdeutlichen, dass man auch beim Lösen scheinbar einfacher Aufgaben nicht auf eine abschließende Kontrolle verzichten darf. Falls die Kinder bei dieser relativ leichten Aufgabe überhaupt nach einer Veranschaulichung suchen, wird diese sicher in Form einer Tabelle geschehen:

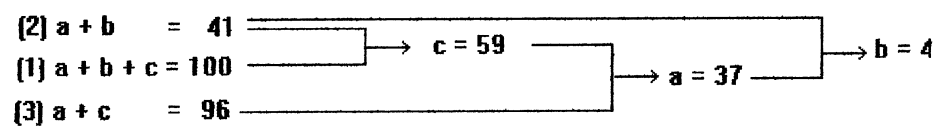
Angela	$2 \cdot 350 = 700$
Bernd	$700 + 37 = 737$
Ines	$2 \cdot 737 = 1474$
gesamt	

Man sollte jedoch nicht unbedingt auf diese Form drängen. Falls die Kinder diese Aufgabe aus dem Text heraus lösen, kann man auch in der anschließenden Auswertung die von den AG-Mitgliedern in Sätzen genannten Lösungsschritte mit Hilfe von Gleichungen begleitend kommentieren. Die Gleichungen lauten
$a = 2 \cdot 350$
$b = a + 37$
$i = 2 \cdot b$,
und man erhält der Reihe nach a = 700, b = 737, i = 1474 und eine Gesamtzahl von 2911.

46)
1. Sputnik: 43,6 kg
2. Sputnik: 43,6 kg + 424,7 kg = 468,3 kg
3. Sputnik: 468,3 kg + 812,7 kg = 1281 kg

47) *(Variable und Gleichungen)*
In dieser Aufgabe steckt ein Gleichungssystem aus den Gleichungen (1), (2) und (3). Zwar ist das Lösen von Gleichungssystemen ein Unterrichtsstoff der Klasse 8, aber für diese Aufgabe genügen ganz allgemeine Fähigkeiten zur Problemanalyse. Nachdem man Variable für das Alter jedes Baumes eingeführt hat, entstehen folgende Gleichungen:
(1) $a + b + c = 100$
(2) $a + b = 41$
(3) $a + c = 96$ (oder $b + c = 96$, was nur zum Vertauschen von zwei Altersangaben führt).
Die Kinder erhalten die Aufforderung "Vergleicht die ersten beiden Gleichungen! Was stellt Ihr fest?" Falls keine befriedigenden Antworten kommen, muss man den Kindern erst verdeutlichen, worauf es beim Vergleichen ankommt. Man kann z.B. verschiedene Kreidestücke hochhalten, die völlig gleich sind oder die gleiche Länge, aber verschiedene Farbe haben. Nachdem klargestellt wurde, dass es beim Vergleichen um Gemeinsamkeiten und Unterschiede geht, wird man erneut die Gleichungen (1) und (2) betrachten. Nun merken die Kinder meist sehr schnell, dass beide Gleichungen als Gemeinsamkeit die Summanden a und b haben. Der Unterschied besteht im bei (1) vorhandenen Summanden c und, daraus resultierend, in einer anderen Summe. So ermittelt man c = 59. Jetzt kann man entweder zur Ermittlung von b einen analogen Vergleich zwischen (1) und (3) anstellen, oder man setzt den gefundenen Wert für c in Gleichung (3) ein und ermittelt a. Zum Schluß erhält man b mit (2).
Die Lösungspläne für diese beiden Varianten lassen sich auf folgende Weise darstellen:





48)

erstes Haus:	120
zweites Haus:	120 - 14 = 106
drittes Haus:	106 + 8 = 114
zusammen:	340

49) *(Tabellen)*
Diese Aufgabe wird bei unkritischer Bearbeitung durch die Schüler viele fehlerhafte Antworten bringen. Dies ist beabsichtigt, und man sollte keinesfalls schon vorher auf mögliche Fehlerquellen aufmerksam machen. Nachdem man sich einige Vorschläge für den Einlauf angehört und an der Tafel notiert hat, erhalten die Schüler die Möglichkeit, für die Richtigkeit ihrer Ergebnisse zu argumentieren. Dabei sollten zuerst Schüler mit falschen Ergebnissen zu Wort kommen. Bei der Darstellung und Begründung der richtigen Lösung kann folgende Tabelle helfen:

	Etappenlänge	Etappen	Pausendauer	Pausen	Pausenzeit gesamt
Schnecke A	**5 cm**	20	**5 s**	19	95 s
Schnecke B	**10 cm**	10	**12 s**	9	108 s
Schnecke C	**20 cm**	5	**25 s**	4	100 s

Es gewinnt die Schnecke mit der wenigsten Pausenzeit. Die Reihenfolge des Einlaufs lautet A - C - B.
Nur wer erkannt hat, dass zwischen x Etappen nur x-1 Pausen liegen, kann die richtige Reihenfolge ermitteln. Im Nachhinein werden sich die Kinder sicher an weitere Aufgaben erinnern, bei denen die gleiche Problematik auftrat.

50) *(Tabellen)*
12 Pflücker schaffen die Arbeit in 4 Tagen. Dann braucht 1 Pflücker die zwölffache Zeit, also 48 Tage. 8 Pflücker schaffen die Arbeit achtmal schneller, also in 6 Tagen. Den Lösungsweg kann man günstig mit folgender Tabelle (1) darstellen. Leistungsstarke Schüler ersparen sich möglicherweise die Berechnung der Zeit für einen Pflücker, weil schon bei 4 Pflückern ein nützliches Teilergebnis gewonnen wird, was in Tabelle (2) dargestellt ist.

Tabelle (1)

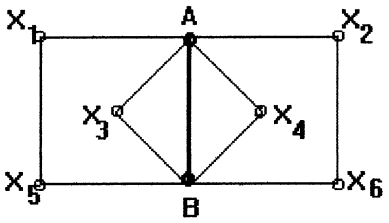
Pflücker	Tage
12	4
1	48
8	6

Tabelle (2)

Pflücker	Tage
12	4
4	12
8	6

51)
a)

Es gibt 3 Quadrate, bei denen A und B Eckpunkte sind. Die fehlenden Bäume können an insgesamt 6 verschiedenen Stellen gestanden haben. (siehe Punkte X_1 bis X_6)



b) Es war nicht verlangt, die restlichen Teile des Schatzes auszugraben. Es reichen deshalb auch im ungünstigsten Fall zwei Grabungen aus (z.B. X_1 und X_2), um die Lage des restlichen Schatzes zu kennen. Findet man einen Teil des Schatzes, so weiß man, dass der Rest unter dem zugehörigen vierten Quadratpunkt liegen muss. Wird man weder bei X_1 noch X_2 fündig, dann kann der Schatz auch nicht bei X_5 oder X_6, sondern nur bei X_3 und X_4 liegen.

52)
A fährt im 10 Minuten 9 km, also in 60 Minuten 54 km.
B fährt in 3 Minuten 2 km, also in 60 Minuten 40 km.
C fährt in 5 Minuten 4 km, also in 60 Minuten 48 km.

Als Antwort sind jedoch nicht diese Strecken, sondern die drei Abstände gefragt:

$\overline{AB}$ = 54 km - 40 km = 14 km , $\overline{AC}$ = 54 km - 48 km = 6 km, $\overline{BC}$ =48 km - 40 km = 8 km.

53) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Da die Telefonnummer aus fünf verschiedenen ungeraden Ziffern besteht und an den ersten beiden Stellen die Ziffernfolge "91" gegeben ist, wird noch nach allen möglichen Reihenfolgen gesucht, in denen die Ziffern 3, 5 und 7 angeordnet werden können. Bei der Auswertung der Antworten wird man feststellen, ob Schüler Möglichkeiten übersehen oder versehentlich doppelt gezählt haben. Bei dieser Gelegenheit kann man verdeutlichen, dass ein vorher festgelegtes Ordnungsprinzip für die Reihenfolge der Möglichkeiten solche Fehler vermeidet. Vereinbart man zum Beispiel, stets mit den kleinstmöglichen Zahlen zu beginnen, findet man der Reihe nach: 357, 375, 537, 573, 735, 753. Es gibt 6 Möglichkeiten, die Kosten für diese 6 Telefonate betragen 6 · 12 Pf = **72 Pf**.
Im Anschluß an die Auswertung kann man die Aufgabe noch dahingehend abwandeln, dass man vorgibt, dass nur noch die Ziffer "9" am Anfang als bekannt vorausgesetzt wird. Die 24 Möglichkeiten der Fortsetzung (1357, 1375, 1537, 1573, 1735, 1753, 3157, 3175, ..., 7531) werden nur die Schüler vollständig finden, die das oben verwendete (oder ein gleichwertiges) Ordnungsprinzip bewusst anwenden. Sehr leistungsstarke Schüler bemerken vielleicht, dass es für jede der vier möglichen Zahlen an der ersten Stelle nach unserer ersten Untersuchung genau 6 Möglichkeiten geben muss, die restlichen drei Zahlen anzuordnen. Das sind 4 · 6 = 24 Möglichkeiten.

54)
Die Aufgabe ist rechnerisch anspruchslos und verleitet deshalb zur Oberflächlichkeit. Soweit ich mich erinnern kann, hat in meiner AG noch nie jemand auf Anhieb das richtige Ergebnis genannt. Hier kann man die Schüler noch einmal dazu anhalten, auch bei vermeintlich leichten Aufgaben gründlich zu arbeiten und das Ergebnis zu kontrollieren.
Zwischen dem Beginn des ersten und des sechsten Stundenschlags liegen 5 Abstände, die zusammen 30 Sekunden ergeben. Also beträgt der zeitliche Abstand zwischen zwei Schlägen 6 Sekunden.
Um 12 Uhr liegen 11 Abstände zwischen den Glockenschlägen, das ergibt zusammen 66 Sekunden.

55) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
80 ; 110 ; 120 ; 140 ; 160 ; 180 ; 210 ; 230 ; 250 ; 360 ; 500 ; 660
Man kann die Aufgabenstellung dahingehend erweitern, dass man nach allen Möglichkeiten sucht. Diese Forderung wird zumindest den AG-Mitgliedern gestellt, die sehr schnell eine erste Möglichkeit gefunden haben. Bei der Suche nach allen Möglichkeiten ist systematisches Arbeiten unbedingt erforderlich, und auch für die Suche nur einer Lösung ist es hilfreich.
Effektiv ist es, mit dem größten Summanden zu beginnen:
660 + ... ?... = 1000
500 und 360 sind für den nächsten Summanden zu groß, und zu 250 fehlt der passende dritte Summand. Bei Fortsetzung dieser Untersuchung findet man für die erste Summe 1000 folgende mögliche Fälle:
Fall 1) 660 + 230 + 110 = 1000
verbleibende Summanden: 80 ; 120 ; 140 ; 160 ; 180 ; 210 ; 250 ; 360 ; 500
Fall 2) 660 + 180 + 160 = 1000
verbleibende Summanden: 80 ; 110 ; 120 ; 140 ; 210 ; 230 ; 250 ; 360 ; 500

Mit den verbleibenden Summanden kann man auf dieselbe Weise verfahren:

Fall 1a) 500 + 360 + 140 = 1000 und 210 + 180 + 160 + 120 + 80 = 1000
Fall 1b) 500 + 250 + ... ergibt keine Lösung
Fall 1c) 500 + 210 + ... ergibt keine Lösung
Fall 1d) 500 + 180 + ... ergibt keine Lösung
Fall 1e) 500 + 160 + 140 + 120 + 80 = 1000 und 360 + 250 + 210 + 180 = 1000

Fall 2a) 500 + 360 + 140 = 1000 und 250 + 230 + 210 + 120 + 110 + 80 = 1000
Fall 2b) 500 + 230 + ... ergibt keine Lösung
Fall 2c) 500 + 210 + ... ergibt keine Lösung
Fall 2d) 500 + 140 + ... ergibt keine Lösung (bereits zu klein)

Damit gibt es insgesamt drei verschiedene Möglichkeiten, drei Additionsaufgaben mit Summe der 1000 auszuwählen.

56) *(Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten)*
Bei dieser Aufgabe führt sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtsarbeiten zum Finden des Lösungsweges.
Vorwärtsarbeiten: Wer erkennt, dass N sofort berechnet werden kann, ist natürlich bestrebt, dieses Ergebnis zur Berechnung der nächsten Variablen einzusetzen. Man erhält der Reihe nach
N = 15, M = 45, L = 31, K = 40, J = 20.
Wenn es dem AG-Leiter vorrangig auf das Vermitteln der heuristischen Strategie "Rückwärtsarbeiten" ankommt, wird er die Aufgabe umformulieren zu "Ermittle nur J !"
Auf der Suche nach hinreichenden Teilzielen wird man der Reihe nach darauf stoßen, dass man K kennen müßte, dafür jedoch L und dafür M und dafür N benötigt. Damit hat man den gleichen Lösungsweg wie oben gefunden.

57) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Diese Aufgabe ist hervorragend geeignet, um systematisches Vorgehen zu trainieren. Vor der Stillarbeit wird man klären, durch welche Vorgehensweise man verhindert, dass Lösungen übersehen werden (Summanden stets der Größe nach ordnen, Veränderungen der Werte nicht sprunghaft, sondern der Reihe nach vornehmen). Gemeinsam kann man die erste Möglichkeit aufstellen und dann zur Stillarbeit auffordern. Es gibt insgesamt 11 Möglichkeiten:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 13 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 11 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 9 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 7 + 7 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 9 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 5 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 7 = 20
1 + 1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5 = 20
1 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 = 20
1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 20

58) *(Variable und Gleichungen)*
x : 4 + 17 = 41
x : 4 = 24
x = 96

59) *(Systematisches Probieren, Lexikografisches Ordnen)*
Es erweist sich als günstig, für die Geschäfte geeignete Variable (A, B, F, G) einzuführen und die Möglichkeiten lexikografisch zu ordnen. Wir erhalten insgesamt 24 Möglichkeiten (vergl. Aufg. 53):
ABFG, ABGF, AFBG, AFGB, AGBF, AGFB,
BAFG, BAGF, BFAG, BFGA, BGAF, BGFA,
FABG, FAGB, FBAG, FBGA, FGAB, FGBA,
GABF, GAFB, GBAF, GBFA, GFAB, GFBA.

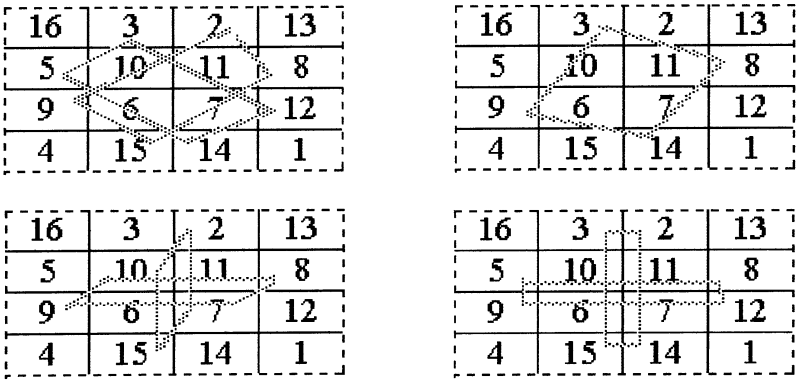
60) *(Systematisches Probieren, Findigkeit)*
In beiden Aufgaben kann man sich durch Probieren an das Ergebnis herantasten. Dabei ist in der zweiten Teilaufgabe noch eher zu erwarten, dass die AG-Mitglieder den eleganteren Weg finden und unter den fünf aufeinanderfolgenden Zahlen nach dem mittlersten Summanden suchen.
Es ist $(b - 2) + (b - 1) + b + (b + 1) + (b + 2) = 5 \cdot b = 500$, also muss $b = 100$ gelten.
Wir erhalten als Lösung die Zahlen 98, 99, 100, 101 und 102.
In der ersten Teilaufgabe wäre lediglich die Erkenntnis zu erwarten, dass die beiden mittleren Summanden die gleiche Summe ergeben wie die beiden äußeren. Damit wird zunächst nach zwei benachbarten Zahlen gesucht, deren Summe 95 beträgt. Das sind 47 und 48, und die gesuchten Zahlen sind damit 46, 47, 48 und 49. Eine Probe bestätigt beide Ergebnisse.

61)

22	**54**	11
18	**29**	40
47	4	36

Die eingetragenen Zahlen sind die einzig möglichen.

62)
Außer in Zeilen- Spalten- und Diagonalensummen findet man die Summe 34 in vielen anderen Varianten. Unten sind nur einige angedeutet.



63)
Größe 1: 1 Schachtel
Größe 2: 5 Schachteln
Größe 3: $5 \cdot 3$ Schachteln = 15 Schachteln
Größe 4: $15 \cdot 6$ Schachteln = 90 Schachteln
Größe 5: $90 \cdot 8$ Schachteln = 720 Schachteln
gesamt: 831 Schachteln

64) *(Ungleichungen und Variable)*
Wir übersetzen die Aufgabe aus der Alltagssprache in die "Sprache der Ungleichungen", wobei **"x kam vor y ins Ziel"** geschrieben wird als **x < y**. Es gilt:
(1) u < d
(2) u < m < b< d

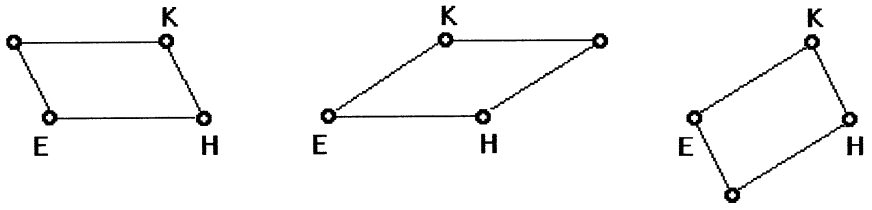
Bereits in der Übersetzung der zweiten Aussage ist die komplette Reihenfolge enthalten. Das macht die Aussage (1) jedoch nicht grundsätzlich überflüssig. Nur weil die Aussage (1) nicht im Widerspruch zur in (2) angegebenen Reihenfolge steht, liefert uns (2) die Lösung. Anderenfalls wäre die Aufgabe nicht lösbar.
Antwortsatz formulieren lassen! Dabei muss man darauf achten, dass die Schüler in der Lage sind, das Ergebnis aus der Sprache der Ungleichungen wieder in die Alltagssprache zu übertragen.

65) *(Ungleichungen und Variable)*
Aus d < e < h und h < b folgt d < e < h < b (vergl. Aufgabe 64)

66) *(Ungleichungen und Variable)*
(0) Alle Mädchen sind älter als 10 Jahre.
(1) Doris ist weder die jüngste noch die älteste.
(2) Carmen ist 14 Jahre alt. (bzw. c = 14)
(3) Bärbel ist jünger als Carmen, aber älter als Doris. (bzw. d < b < c)
(4) Bärbel und Carmen sind beide jünger als Eva. (bzw. b < e, c < e)
(5) Eva ist 5 Jahre älter als Angelika. (bzw. e = a + 5)

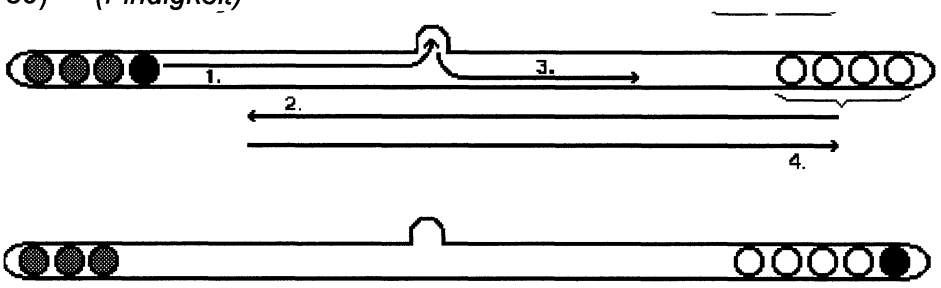
Wir vereinbaren, für abgeleitete Feststellungen die Numerierung der Aussagen mit (6), (7),... fortzusetzen.
(3), (4) $\Rightarrow$ (6) d < b < c < e
(1), (5),(6) $\Rightarrow$ (7) a < d < b < c < e
(0), (2), (7) $\Rightarrow$ (8) c = 14, b = 13, d = 12, a = 11 (nur 3 Zahlen zwischen 10 und 14)
(8), (5) $\Rightarrow$ (9) e = 16.
Die hier angeführte Darstellung des Lösungsweges soll nur in sehr kurzer Form den Überblick über die nötigen Schritte geben. Gerade die abgeleitete Beziehung (8) bedarf einer ausführlicheren mündlichen Kommentierung in der AG.

67)
Es gibt 3 Lösungen.



68) *(Findigkeit)*
Der Mann nimmt zuerst die Ziege mit (Aussage begründen lassen!), holt dann den Wolf nach und nimmt die Ziege wieder mit ans alte Ufer. Dort läßt er die Ziege allein und nimmt den Kohlkopf mit zum Wolf. Zuletzt holt er die Ziege.

69) *(Findigkeit)*



[viermal wiederholen]

70) *(Tabellen)*

Nützlich ist hier das Anfertigen einer Tabelle. Unmögliche Zuordnungen werden durch "-" gekennzeichnet, gefundene Zuordnungen mit "+". Man sollte sich angewöhnen, grundsätzlich erst einmal alle gegebenen Bedingungen auf mögliche Eintragungen zu überprüfen, auch wenn man schon zwischendurch (z.B. nach (1) und (3)) erste Schlüsse ziehen kann. Diese unmittelbar gegebenen Aussagen werden grün in die Tabelle eingetragen. Gesuchtes, also gefundene Zuordnungen, erhalten rote Farbe, und Hilfsgrößen, Teilziele bzw. Zwischenresultate werden blau gezeichnet.
Mit grüner Farbe können folgende Eintragungen erfolgen:

	Klaus	Dieter	Rainer
Müller	— (1)	— (3)	
Schulze			— (2)
Lehmann	— (4)		

Das erste Ergebnis **(5)** "Rainer heißt Müller."
wird rot in dem entsprechenden Tabellenfeld gekennzeichnet. Unmittelbar daraus folgt
(blau eintragen, siehe Tabelle links) **(6)** "Rainer heißt nicht Lehmann."
Da für Klaus nur noch der Nachname Schulze und für Lehmann nur noch der Vorname Dieter bleibt, werden diese beiden Ergebnisse als Aussagen (7) und (8) rot eingetragen (Tabelle unten rechts). Der Vollständigkeit halber wird man zum Schluß das einzige freie Feld streichen, weil wegen (7) und (8) Dieter nicht Schulze heißen kann.

	Klaus	Dieter	Rainer
Müller	— (1)	— (3)	+ **(5)**
Schulze			— (2)
Lehmann	— (4)		— *(6)*

	Klaus	Dieter	Rainer
Müller	— (1)	— (3)	+ **(5)**
Schulze	+ **(7)**		— (2)
Lehmann	— (4)	+ **(8)**	— *(6)*

Es muss den AG-Mitgliedern aber bewußt gemacht werden, dass die Tabelle nicht die Lösung, sondern nur ein Hilfsmittel für das Finden der Lösung ist und auch für deren nachträgliche Darstellung hilft. Die eigentliche Lösungsdarstellung könnte wie folgt aussehen:

"Wegen (1) und (3) kann Müller weder Klaus noch Dieter heißen, also gilt
(5) Müller heißt Rainer.
und damit auch
(6) Lehmann heißt nicht Rainer.
Wegen (1) und (4) heißt Klaus weder Müller noch Lehmann, also gilt
(7) Klaus heißt Schulze.

Übrig bleibt nur noch die Zuordnung
(8) Lehmann heißt Dieter. "
Diese gefundene Zuordnung ist jedoch nur dann Lösung, wenn sie zu allen Bedingungen widerspruchsfrei ist.
Wegen (4) müssen Klaus und Lehmann gleich alt sein, während Rainer älter ist als Schulze. Klaus Schulze und Dieter Lehmann sind die Personen mit dem gleichen Alter. Da Rainer einen anderen Familiennamen hat als diese beiden, ergibt sich kein Widerspruch.

Man könnte die Schüler abschließend auffordern, eine zusätzliche Bedingung (5) so zu erfinden, dass die Aufgabe keine Lösung hätte. Eine solche Bedingung wäre z. B. "Lehmann kann nicht Schach spielen.", denn dann dürfte wegen Bedingung (3) Dieter nicht Lehmann heißen, und es gäbe überhaupt keine mögliche Namenszuordnung. Gerade solche Fragestellungen verdeutlichen, dass eine Probe nicht nur Formsache ist, sondern tatsächlich die Existenz einer Lösung sicherstellt.

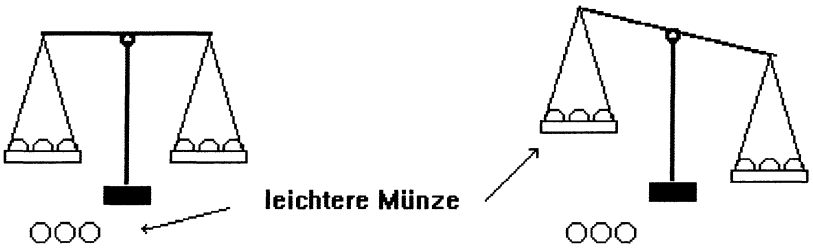
71) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Wenn man den Test an der Schachtel mit der falschen Aufschrift "2 x weiß" durchführt, gibt es zwei mögliche Ausgänge. Zieht man eine weiße Kugel, so weiß man, dass in der Schachtel eine schwarze und eine weiße Kugel sein müssen. Die zwei schwarzen Kugeln können dann nur in der Schachtel mit der Aufschrift "schwarz und weiß" sein, und "2 x schwarz" enthält in Wirklichkeit zwei weiße Kugeln. Zieht man jedoch eine schwarze Kugel, so weiß man nicht, ob hier nun zwei schwarze Kugeln oder schwarz und weiß enthalten sind. Auch bei einem Test in der Schachtel mit der Aufschrift "2 x schwarz" trifft man im ungünstigen Fall auf eine nicht entscheidbare Situation.
Deshalb muss Steffi ihren Test in der Schachtel mit der Aufschrift "schwarz und weiß" durchführen. Da die Aufschrift falsch ist, müssen in dieser Schachtel zwei Kugeln von gleicher Farbe sein. Zieht Steffi z.B. eine schwarze Kugel, enthält diese Schachtel zwei schwarze Kugeln. In der Schachtel "2 x weiß" dürfen keine zwei weißen sein, also sind dort eine schwarze und eine weiße Kugel. Die Schachtel "2 x schwarz" enthält dann zwei weiße Kugeln. Zieht Steffi jedoch eine weiße Kugel, dann sind in "schwarz und weiß" die weißen, in "2 x schwarz" die schwarze und weiße sowie in "2 x weiß" die schwarzen Kugeln.

72) *(Findigkeit)*
Um zwei Kettenteile zusammenzufügen, reicht es aus, **ein** Kettenglied zu öffnen und nach dem Einfädeln wieder zu schließen. Für fünf Kettenteile reichen vier Arbeitsgänge. Es ist aber auch mit nur drei Arbeitsgängen möglich. Eine Teilkette wird durch Öffnen aller drei Glieder auseinandergenommen, und die drei Glieder werden zum Verbinden der restlichen vier Teilketten verwendet.

73) *(Findigkeit)*
Der Bauzug schiebt zwei seiner Waggons auf das Abstellgleis und fährt ohne sie wieder vor. Der Personenzug stößt nach dem Passieren der Weiche zurück, holt die zwei abgestellten Waggons heraus und schiebt sie dann rückwärts auf die Hauptstrecke, wo er sie hinter sich stehen lässt. Nun schiebt der Bauzug die nächsten Waggons auf das Abstellgleis, und das gleiche Verfahren wird wiederholt, bis der Rest des Bauzuges kurz genug ist, um auf dem Abstellgleis zu warten.

74) *(Findigkeit)*
zu a) Man kann zuerst links und rechts je 4 Münzen auflegen. Ist eine Waagschale leichter, so vergleicht man je zwei dieser Münzen und mit einer dritten Wägung die beiden Münzen des leichteren Paares. Herrscht bereits beim ersten Mal Gleichgewicht, so ist die nicht verwendete 9. Münze die leichteste.

zu b) Die Münzen werden in je drei Gruppen zu je drei Münzen aufgeteilt. Zwei der drei Gruppen werden auf der Waage verglichen. Die Wägung kann zwei mögliche Resultate liefern (siehe Skizze). In beiden Fällen ist die Dreiergruppe mit der leichtere Münze eindeutig feststellbar.



Aus dieser Dreiergruppe werden nun in der zweiten Wägung zwei der drei Münzen verglichen. Aus den beiden möglichen Resultaten läßt sich analog die leichtere Münze eindeutig ermitteln.

75) *(Folgern aus den Bedingungen)*
Wenn ein Huhn jeden zweiten Tag ein Ei legt, so legt es in 14 Tagen 7 Eier. Für 4620 Eier in 14 Tagen benötigt man also 4620 : 7 = 660 Hühner.

76) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Familiennamen: 3 x Krause, 4 x Lehmann, 2 x Schulz, 2 x Mayer.
Vornamen: 4 x Dieter, 3 x Erhard, 3 x Kurt, 1 x Günter.
Laut Voraussetzung heißt einer der Spieler **Erhard Mayer**.
Übrig sind:
Familiennamen: 3 x Krause, 4 x Lehmann, 2 x Schulz, 1 x Mayer.
Vornamen: 4 x Dieter, 2 x Erhard, 3 x Kurt, 1 x Günter.
Da es viermal Dieter für vier Familiennamen gibt, heißen vier der Spieler
Dieter Krause, Dieter Lehmann, Dieter Schulz und **Dieter Mayer.**
Übrig sind:
Familiennamen: 2 x Krause, 3 x Lehmann, 1 x Schulz.
Vornamen: 2 x Erhard, 3 x Kurt, 1 x Günter.
Da es dreimal Kurt für noch drei Familiennamen gibt, heißen drei der Spieler
Kurt Krause, Kurt Lehmann und **Kurt Schulz.**
Übrig sind:
Familiennamen: 1 x Krause, 2 x Lehmann.
Vornamen: 2 x Erhard, 1 x Günter.
Die verbleibenden drei Spieler müssen nun **Erhard Krause, Erhard Lehmann** und **Günter Lehmann** heißen.

77) *(Tabellen)*

Arbeiter	Stunden	Säcke
100	4	360
?	**2**	**630**
100	2	180
50	2	90
$7 \cdot 50$	2	$7 \cdot 90$
350	**2**	**630**

Wichtig ist bei Aufgaben dieser Art, dass von den drei Größen der Aufgabe in jedem Schritt eine Größe unverändert bleibt, so dass nur die Änderung der zweiten Größe in Abhängigkeit von der dritten Größe beachtet werden muss.
Der erste Schritt ist schnell getan: in den gesuchten zwei Stunden schafft die vorgegebene Anzahl Arbeiter halbsoviel Säcke wie in vier Stunden. Da die geforderte Stundenzahl jetzt erreicht ist, muss nur noch die Anzahl der Arbeiter verändert werden. Der Übergang von 180 Säcken auf 630 Säcke ist jedoch nicht ohne Zwischenschritt möglich, da Kenntnisse der Bruchrechnung in Klasse 4 noch fehlen. Da beide Zahlen Vielfache von 90 sind, bietet sich als Zwischenschritt der Übergang zu 90 Säcken an.

78) *(Systematisches Probieren, Tabellen)*
Es gelten die gleichen Bemerkungen wie zu Aufgabe 3).
Die Lösung (8 Hasen und 17 Hühner) findet man über systematisches Probieren mit Tabelle oder mit folgender Überlegung: 25 Zweibeiner haben 50 Füße. Bei 66 Füßen sind es 16 Füße mehr, also sind 8 der Tiere keine Zweibeiner, sondern Vierbeiner.

79) *(Vorwärtsarbeiten)*
Nach Wegnahme von (7 + 5) der 20 Perlen sind noch 8 Perlen übrig, und das sind in beiden Schachteln gleich viel. Jetzt enthalten beide Schachteln also 4 Perlen. Vorher hatte die erste Schachtel also (4 + 5) Perlen und die zweite Schachtel (4 + 7) Perlen.

80) *(Systematisches Probieren, Findigkeit)*
Viel Zeit einplanen !
Als Vorbetrachtung kann man folgende Frage stellen: "Wir haben 5 Minuszeichen (und Pluszeichen). Also können nicht auf jeder Seite die gleiche Anzahl von Minuszeichen stehen. Wo müssen vermutlich mehr Minuszeichen stehen ?" Wegen der größeren Zahlen vermuten die Schüler sicherlich, dass rechts etwas mehr weggenommen und deshalb mehr Minuszeichen stehen müssen. Der erste Auftrag lautet dann: "Versuche, eine Lösung zu finden, die links zwei und rechts drei Minuszeichen hat !" Die Schüler werden keine Lösung finden. Also wird man als nächstes den Fall untersuchen, dass links drei und rechts zwei Minuszeichen stehen.
Auch diese Untersuchung kann verblüffende Ergebnisse hervorrufen. Folgendes Beispiel verdeutlicht dies. Wir versuchen:

11 + 9 + 7 - 5 - 3 - 1 = 18 12 + 10 + 8 - 6 - 4 + 2 = 22
11 + 9 + 7 **- 9** = 18 12 + 10 + 8 + 2 **- 10** = 22

Auf der linken Seite wurde von den ersten Summanden insgesamt (5 + 3 + 1) = 9 subtrahiert. Auf der rechten Seite wurde insgesamt (6 + 4) = 10 subtrahiert. Dabei wurde offensichtlich zuwenig weggenommen, denn das Ergebnis ist rechts um 4 größer als links. Die Schüler werden aufgefordert, diesen Unterschied dadurch auszugleichen, dass sie rechts mehr als nur 10 wegnehmen. Die meisten werden diesen "Tip" dankbar aufgreifen und versuchen, nicht nur 10, sondern 10 + 4 = 14 wegzunehmen. Wie groß ist das Erstaunen, wenn das Ergebnis plötzlich um 4 zu klein ist !
Es gilt zum Beispiel 12 + 10 - 8 - 6 + 4 + 2 = 14 .
Nun liegt der Gedanke nahe, es mit dem Mittelwert zu probieren. Das Subtrahieren von insgesamt 10 auf der rechten Seite lieferte ein um 4 zu großes, das Subtrahieren von insgesamt 14 aber ein um 4 zu kleines Ergebnis. Also muss man rechts sicher 12 subtrahieren.
Wir probieren 12 - 10 + 8 + 6 + 4 - 2 = 18,
und das ist das gleiche Ergebnis wie auf der linken Seite.
(Bemerkung: Es wird problematisch, wenn man das hier geschilderte Probieren an Beispielen durchführt, wo die Rechenzeichen zu Beginn an anderen Stellen gesetzt wurden. Die Erkenntnis "Ich muss rechts ... mehr wegnehmen als in meinem ersten Versuch" kann ungewollt auf Ansätze wie

"12 - 10 - 8 + ..." führen, wo man zwischenzeitlich auf negative Ergebnisse käme!)

Einen ähnlichen Lösungsansatz findet man mit dem Impuls "Addiere alle Zahlen im linken Term und alle Zahlen im rechten Term !" Man wird feststellen, dass die Summe aller beteiligten ungeraden Zahlen um 6 kleiner ist als die Summe der geraden Zahlen. (Welche AG-Mitglieder finden dafür einen Rechenvorteil ?) Also muss rechts "entsprechend mehr" weggenommen werden als links. Die kleinste Möglichkeit, mit drei Subtrahenden links etwas wegzunehmen, ist ... - 5 - 3 - 1, also im Prinzip **-9**. Es geht rechts aber nicht, 6 mehr wegzunehmen, weil ja 6 + 9 = 15 ist und 15 nicht mit geraden Zahlen erreichbar ist. (Der gleiche Irrtum wie im obigen Beispiel, statt "6 mehr subtrahieren" muss man "3 mehr subtrahieren", um den Unterschied auszugleichen.) Möglicherweise kommen die Schüler hier sogar zu der Meinung, dass die Aufgabe nicht lösbar wäre. Dann kann man die Aufgabenstellung abschwächen zu "Setze 5 Pluszeichen und 5 Minuszeichen so, dass die Differenz der beiden Terme möglichst gering wird". Auf diese Weise gelangen die AG-Mitglieder dann doch zur nicht mehr erwarteten Lösung.

81) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11 hat das gleiche Ergebnis wie 22·30·36·40·42.
Erstaunlicherweise fanden in der Erprobung dieser Aufgabe nur wenige Kinder von sich aus die Lösungsidee. Das zeigt, dass Rechenvorteile noch häufiger Gegenstand des Unterrichts oder der AG sein sollten.
Faktorenzerlegungen bringen schnell den Beweis der Aussage. Nun wäre es allerdings ungeschickt, die großen Zahlen einzeln in Faktoren zu zerlegen und gefundene Faktoren sofort auf der linken Seite abzustreichen. Für einige Zahlen gibt es mehrere Zerlegungen, und man sondert unter Umständen vorschnell Faktoren aus, die bei anderen Zerlegungen nötiger sind. Wenn man vorher alle möglichen Faktorenzerlegungen (bei denen beide Faktoren zwischen 1 und 11 liegen) aufführt, kann man in "Streitfällen" besser entscheiden, welcher Faktor welcher Zerlegung zugeordnet wird. Wenn Schüler dies nicht tun und dadurch Probleme bekommen, sollte man sie erst einmal gewähren lassen. Auf die Notwendigkeit von Fallunterscheidungen sollten sie selbst kommen.

22 = **2 · 11**	30 = **3 ·10**	36 = **4 · 9**	40 = 4 · 10	42 = **6· 7**
	= 5 · 6	= 6 · 6	= **8 · 5**	

Wir bemerken zum Beispiel, dass die Verwendung des Faktors 10 sowohl für 30 als auch für 40 möglich ist, dass aber die 8 nur von 40 beansprucht wird. Deshalb wird man für 40 die Zerlegung 8· 5 favorisieren. Mit den fett gekennzeichneten Möglichkeiten ergeben sich genau die zum Nachweis der Behauptung erforderlichen Zerlegungen.

82) *(Vorwärtsarbeiten)*
Wenn das Haus 35 Jahre alt ist, so ist Susanne 7 Jahre alt. Vor 5 Jahren war das Haus mit 30 Jahren fünfmal so alt wie Tobias damals, also war Tobias damals 6 Jahre alt. Heute ist Tobias 11 Jahre alt.
Da Matthias 5 Jahre älter ist als Susanne, ist er jetzt 12. Aus der aktuellen Jahreszahl lässt sich nun für jeden das Geburtsjahr ermitteln.

83) *(Skizzen)*
Zwischen insgesamt 7 Pfählen liegen 6 Zaunfelder mit je 15 Latten. Es werden 90 Latten benötigt.

84) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*

1. Lösungsweg:

Wenn wir die Geburtstagsgäste mit A, B, C, D, E, F, G und H bezeichnen, so können wir folgende Zweiergruppen bilden:

AB , AC , AD , AE , AF, AG , AH	7 Gruppen mit A
BC , BD , BE , BF , BG , BH	6 weitere Gruppen mit B (AB ist schon gezählt)
CD , CE , CF , CG , CH	5 weitere Gruppen mit C (AC und BC schon gezählt)
DE , ...	4 weitere Gruppen...
EF, ...	3 weitere Gruppen...
FG; FH	2 weitere Gruppen...
GH	1 weitere Gruppe...

Jede Zweiergruppe stößt einmal an. Es klingen 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 mal die Gläser.

2. Lösungsweg:

Jede der 8 Personen stößt mit 7 anderen Personen an. Das würde 7 · 8 = 56 mal geschehen. Dabei wird aber jedes Gläserklingen doppelt gezählt (z. B. A-B und B-A). Also sind es (7 · 8) : 2 = 28.

Der Zusammenhang zwischen beiden Lösungswegen wird durch das GAUßsche Additionsverfahren hergestellt. Es gilt 1 + 2 + ... + 6 + 7 = (7 · 8) : 2

85) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten, Tabellen)*

Ungeübten Schülern fällt es schwer, Aufgaben dieser Art mit vernünftigem Aufwand zu lösen. Sie sollen es sich deshalb angewöhnen, unter mehreren Bedingungen zunächst die auszusuchen, die das "Suchfeld" am meisten einschränkt, d.h. wo die wenigsten möglichen Fälle auftreten.

Die Aussage (1) ist sicher ungeeignet, denn es gibt 45 mögliche Zahlenpaare.

Die Aussage (2) wird von den 4 Zahlenpaaren (9,3), (6,2), (3,1), (0,0) erfüllt, wobei das letztere im Gesamtzusammenhang der Aufgabe nicht möglich ist.

Die Aussage (3) liefert 6 Zahlenpaare (4,0), (5,1), (6,2), (7,3), (8,4), (9,5) und die Aussage (4) liefert 8 Zahlenpaare. Ein effektiver Weg scheint also die Betrachtung der drei Möglichkeiten der Aussage (2) zu sein. Wir bezeichnen die 5 Ziffern mit a, b, c, d und e und kommen, von den Möglichkeiten für a und b ausgehend, zu folgender Tabelle:

a **b : 3**	**b**	**c** **b - 4**	**d** **b + 2**	**e** **e < a**
3	**9**	*5*	*zu groß*	
2	**6**	*2*	*8*	
1	**3**	*zu klein*		

Da in der ersten und dritten Möglichkeit an bestimmten Stellen keine Grundziffern nach den Bedingungen der Aufgabe eingesetzt werden können, brauchen diese Zeilen nicht weiter verfolgt zu werden. In der verbleibenden zweiten Zeile der Tabelle kommen nach Bedingung (1) als Endziffer nun noch alle Ziffern in Frage, die kleiner als 2 sind. Damit sind die Zahlen 26 280 und 26 281 die beiden einzigen Lösungen dieser Aufgabe.

86) *(Findigkeit)*

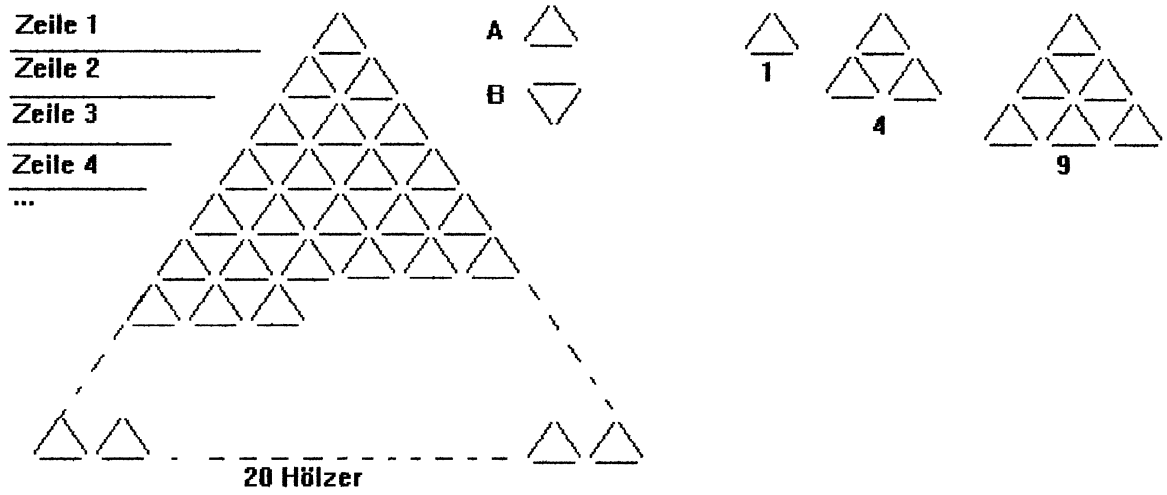
Der 5-l-Eimer wird zweimal mit dem 3-l-Eimer gefüllt. Dabei bleibt beim zweiten Mal im 3-l-Eimer ein Liter Wasser zurück.

Aus dem 5-l-Eimer können auch 3 Liter abgemessen und weggeschüttet werden. Die restlichen 2 Liter kommen in den 3-l-Eimer und werden aus dem 5-l-Eimer bis 3 l aufgefüllt.

Im 5-l-Eimer sind nun 4 l, von denen wieder 3 l in den inzwischen ausgekippten 3-l-Eimer abgegossen werden. Damit hat man einen Liter im 5-l-Eimer.

87) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Am ersten Schloss muss Klaus im ungünstigsten Fall fünfmal probieren. Da spätestens dann der passende Schlüssel gefunden wurde, muss er am nächsten Schloss einen Schlüssel weniger probieren. Insgesamt reichen auch im ungünstigsten Fall 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 Schließversuche.
Bei leistungsstarken Schülern kann man anschließend die Aufgabenstellung ändern auf "60 Schlüssel und Schranktüren".
Dann sind es 60 + 59 + ...+ 2 + 1 = 60 · 61 : 2 = 30 · 61 = 1830 Versuche.

88) *(Finden von Gesetzmäßigkeiten, Rechenvorteile)*
Die nachfolgende Aufgabe ist sehr umfangreich und für den AG-Leiter sicher auch nicht leicht zu handhaben. Eine gründliche Vorbereitung lohnt jedoch. Die AG-Mitglieder erhalten die Möglichkeit, systematische Untersuchungen anzustellen, ein komplexes Problem zu zergliedern, Rechenvorteile anzuwenden, ein konkretes Ergebnis zu verallgemeinern, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und gefundene Vermutungen durch andere Lösungswege zu überprüfen. Wenn der AG-Leiter bemerkt, dass Schüler beginnen, diese Figur zum Zwecke des Auszählens komplett aufzuzeichnen, sollte er dies als zu aufwendige Methode unterbinden. Die Schüler werden aufgefordert, zunächst solche Dreiecke mit wesentlich kleinerer Seitenlänge zu betrachten.



Für das Ermitteln der Anzahl der Dreiecke gibt es zum Beispiel die folgenden Varianten:

1. Möglichkeit:
Man untersucht die Gesetzmäßigkeit der Anzahlen der Dreiecke, wenn die Seitenlänge der Reihe nach 1, 2, 3, 4 ... Hölzer beträgt (Tabelle anlegen !), und erhält der Reihe nach 1, 4, 9, 16, ... Dreiecke. Wenn die Kinder erkannt haben, dass dies die Folge der Quadratzahlen ist, dann müßte bei Seitenlänge 20 die Anzahl der Dreiecke 20 · 20 = 400 betragen. Dann kann man vergleichen, wieviel Dreiecke der Formen A und B in jeder Zeile zu finden sind. In jeder Zeile hat man ein Dreieck der Form A mehr. Also müßten in 20 Zeilen die Anzahl der Dreiecke der Form A um insgesamt 20 größer sein als die Anzahl der Form B. Die Differenz der beiden Anzahlen ist 20. Ihre Summe ist aber (vermutlich) 400. Wieviel Dreiecke sind dann von jeder Form vorhanden? Gelegentlich tritt hier der Irrtum auf, dass es sich um 220 bzw.180 Dreiecke handeln würde. Eine Probe auf die Differenz widerlegt dies jedoch, es muss gelten:

A=210 und B=190. Auch wenn die Gesetzmäßigkeit mit den Quadratzahlen augenscheinlich ist, handelt es sich trotzdem nur um eine Vermutung, die eines Beweises bedarf. Ohne Vermutungen kommen wir aus in der

2. Möglichkeit:
Wir betrachten die Anzahl der Dreiecke nicht **bis** zu einer bestimmten Zeile, sondern **in** jeder Zeile.
Erst abschließend werden die Summen über alle Zeilen gebildet. Die Dreiecke der Form A sind insgesamt in der Anzahl 1 + 2 + 3 + ... + 19 + 20 vertreten. GAUßsche Summenformel anwenden lassen! Es gilt 20 · 21 : 2 = 210. Form B hat 1 + 2 + 3 + ... + 19 Dreiecke. (Impuls:"Vergleiche beide Summen !") Der letzte Summand (20) fehlt hier, also sind es nur 190. (Überprüfung nach GAUß vornehmen lassen: 19 · 20 : 2 = 190.)

		Dreiecke A	Dreiecke B	Dreiecke A+B	
in Zeile:	1	1	0	1	
in Zeile:	2	2	1	3	
in Zeile:	3	3	2	5	
in Zeile:	4	4	3	7	
in Zeile:	5	5	4	9	
in Zeile:	6	6	5	11	
.....					
in Zeile:	19	19	18	37	
in Zeile:	20	20	19	39	
					Hölzer
Von 1 bis 20 insgesamt:		1+2+...+19+20 =210	0+1+...+18+19 =190	400	630

Damit muss die Gesamtzahl der Dreiecke 210 + 190 = 400 sein. Aus der letzten Spalte läßt sich eine weitere (hier zwar nicht benötigte, aber interessante) Gesetzmäßigkeit finden: 1=1, 1+3 = 4, 1+3+5 = 9, 1+3+5+7 = 16, ... , 1+3+5+...+37+39 = 400.
Die fortlaufende Summe der ersten ungeraden Zahlen ergibt immer eine Quadratzahl!

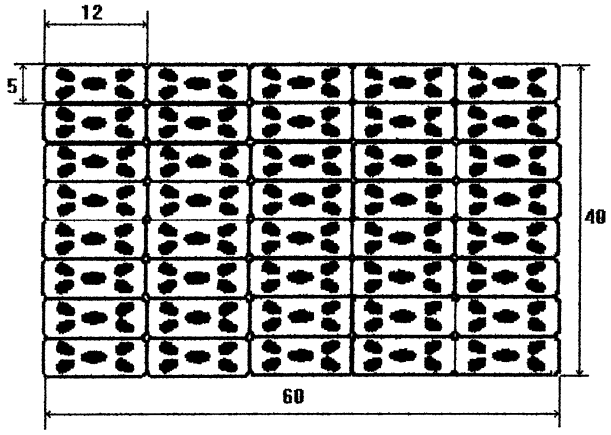
Im Aufgabenteil b) sollen die AG-Mitglieder zunächst erkennen, dass benachbarte Dreiecke stets ein Holz gemeinsam haben. Die 400 Dreiecke haben also keineswegs 1200 Hölzer ! Sie haben aber auch nicht 600 Hölzer, weil nicht alle Hölzer für zwei Dreiecke gleichzeitig Verwendung finden. Falls es die Kinder nicht selbst erkennen, hilft (nach angemessenenr Zeit!) der Impuls "Zähle zunächst nur die Hölzer, die zum Aufbau von Dreiecken der Form A gebraucht werden, und dann erst die anderen !"
Alle Dreiecke B ergeben sich automatisch als Zwischenräume zwischen Dreiecken A, ohne dass man dafür zusätzliche Hölzer einsetzen muss. Also werden 210 · 3 = 630 Hölzer benötigt.
Nach einer derart intensiven Besprechung der Aufgabe können sicher die meisten AG-Mitglieder den Aufgabenteil c) in Stillarbeit lösen, während d) nur in Ausnahmefällen selbständig bewältigt wird. Zur Aufnahme der Ergebnisse verlängern wir unsere obige Tabelle:

		Dreiecke A	Dreiecke B	Dreiecke A+B	
.....					
in Zeile:	20	20	19	39	
.....					
in Zeile:	100	100	99	199	
.....					
in Zeile:	n	n	n-1	2 · n - 1	
					Hölzer:
Von 1 bis 100 insgesamt:		*1+2+...+99+100 =5050*	*0+1+...+98+99 =4950*	*10000*	15 150
Von 1 bis n insgesamt:		***1+2+...+n =n · (n + 1) : 2***	***0+1+...+(n-1) =(n - 1) · n : 2***	***n · n***	***3 · n · (n + 1) : 2***

Während die Schüler erfahrungsgemäß die Formel für die Summe von 1 bis n widerspruchslos einsehen, kommen bei 1 + 2 + ... + (n-1) = (n-1) · n : 2 gelegentlich Zweifel. Dann muss man verdeutlichen, dass es sich auch hier um die Regel "letzter Summand (n-1) mal Nachfolger des letzten Summanden (Nachfolger von n-1 ist n) durch zwei" handelt.
Da die Gesamtzahl der Dreiecke aus der Summe der Dreiecke A und B entsteht, muss offensichtlich gelten n · (n+1) : 2 + (n-1) · n : 2 = n · n. Dies herauszufinden oder gar zu beweisen ist absolut nicht das Ziel einer Mathe-AG in Klasse 4, aber es macht die Schüler unheimlich stolz, wenn man ihnen mitteilt, dass sie soeben mit ihren Untersuchungen zur Entdeckung einer solch komplizierten Formel beigetragen haben. Das Erstaunen kennt dann kaum noch Grenzen, wenn man in diese Formel für n einen konkreten Wert einsetzt und das Ergebnis dann stimmt, wie das Beispiel n = 7 zeigen soll:

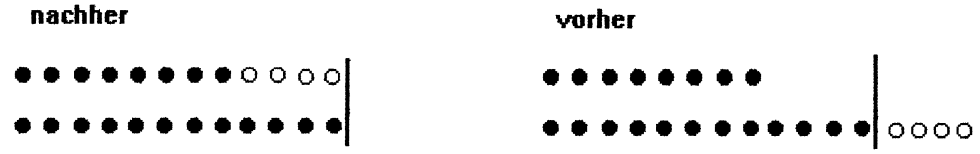
$$7 \cdot (7+1) : 2 + (7-1) \cdot 7 : 2 = 7 \cdot 8 : 2 + 6 \cdot 7 : 2$$
$$= 28 + 21$$
$$= 49$$
$$= 7 \cdot 7$$

89) *(Skizzen)*



Die Kinder müssen erkennen, dass die Pfefferkuchen gedreht werden müssen, denn die Länge 60 cm des Lochs ist zwar ein Vielfaches der Länge 5 cm des Pfefferkuchens, bei der Breite ist jedoch 40 cm kein Vielfaches von 12 cm. Nun erkennt man aus einer Skizze oder durch Berechnung leicht, dass 40 Pfefferkuchen gebacken werden müssen.
Dafür benötigt man 10 Tassen Mehl, 80 g Honig, 200 Mandeln und 400 g Lebkuchengewürz.

90) *(Skizzen)*



Uwe hatte 8 Murmeln mehr als Klaus.

91) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten,* ***Probe !*** *)*
Die Zahl 160 muss als Summe von drei Vielfachen von 10 dargestellt werden, von denen zwei einander gleich sind. Wir vereinbaren, dass wir die beiden gleichen Zahlen mit a und b, die dritte Zahl mit c bezeichnen wollen. In nachfolgender Tabelle erfassen wir alle Möglichkeiten.

a	b	c
0	0	160
10	10	140
20	20	120
30	30	100
40	40	80
50	50	60
60	60	40
70	70	20
80	80	0

Anschließend fordert man zum Formulieren des Antwortsatzes auf. Bei Antworten wie "Es gibt ... Möglichkeiten für die Zahlen a, b, c" wird man darauf hinweisen, dass nicht nach der Anzahl von Zahlen, sondern von Dreiecken gefragt war. Dass in Dreiecken keine Seitenlänge 0 cm auftreten darf, werden sicher alle Schüler bemerken. Viele werden dann der Meinung sein, dass es 7 solcher Dreiecke gibt. Ihren Irrtum sollen diese Schüler selbst finden. Man kann dazu auffordern, ein solches Dreieck im Heft zu zeichnen mit den (in mm verkleinerten) Längen 140, 10, 10. Bei diesem erfolglosen Versuch werden die AG-Mitglieder erkennen, dass nicht mit jeder rein rechnerisch möglichen Kombination von Seitenlängen Dreiecke erzeugt werden können. An diesem Beispiel kann verdeutlicht werden, dass eine **Probe** nicht nur eine vom Lehrer geforderte lästige Zusatzarbeit ist, die sichere Rechner nicht nötig zu haben glauben, sondern ein **unverzichtbarer Bestandteil** der meisten Aufgaben ist.
Nun wird man für alle Möglichkeiten der Tabelle untersuchen, ob Dreiecke existieren. Als hinreichende Bedingung wird erkannt und formuliert, dass die Summe von je zwei Seitenlängen größer als die dritte Seitenlänge sein muss. Deshalb gibt es hier nur drei Möglichkeiten, und zwar für
c = 60, c = 40 und c = 20.

92)
Die Flasche kostet 1,05 € und der Korken 0,05 €. Bei anderslautenden Ergebnissen (häufiger Trugschluß: Flasche 1,00 €, Korken 0,10 €) kann man entweder dazu auffordern, eine Probe am Text zu machen, oder man überläßt die Aufklärung des Irrtums anderen AG-Mitgliedern.

93) *(Folgern aus den Bedingungen)*
Es müssen 384 - 36 = 348 Personen mit Bussen befördert werden.
Es ist 348 : 32 = 10 Rest 28.
Also werden 11 Busse benötigt. Wenn das Verfahren der schriftlichen Division zum Zeitpunkt der Aufgabe noch nicht zur Verfügung steht, wird man etwas anders vorgehen:

Mit 10 Bussen kann man 320 Gäste befördern, das reicht noch nicht. Mit 11 Bussen kann man dann 352 Gäste befördern, das reicht aus.

94) *(Findigkeit)*
Die Schüler müssen selbst erkennen, welche nicht direkt gegebenen Teilstrecken für das Ergebnis von Nutzen sein können, und welche dieser gewünschten Teilstrecken sich überhaupt aus dem Gegebenen ermitteln lassen. Nur c ist leicht zu ermitteln.

a = "Lochabstand minus zwei halbe Brettbreiten"
a = 46 cm
b = "Abstand vom Loch bis zum Ende des kurzen Brettes minus halbe Brettbreite "
b = 19 cm
c = "langes Brett minus beide kurze Bretter"
c = 8 cm
d = "Lochabstand plus zwei mal Abstand von Loch bis zum Ende des kurzen Brettes"
d = 104 cm

95) *(Variable, Tabellen)*

	1. Baum	2. Baum	3. Baum	**gesamt**
nach dem Platzwechsel	x = *9*	2 · x = *18*	4 · x = *36*	**7 · x = 63**
vor dem Platzwechsel	9+9 = **18**	18 - 9 + 17 = **26**	36 - 17 = **19**	

x = 9

Zuerst berechnet man die Anzahl der Vögel auf den Bäumen nach dem Platzwechsel. (Wegen 7 · x = 63 gilt x = 9). Nun müssen nur noch die Anzahlen vor dem Platzwechsel ermittelt werden. Obige Tabelle zeigt den Lösungsweg. Um auf die ursprünglichen Anzahlen zu kommen, müssen die Platzwechsel rückgängig gemacht werden. Unbedingt Probe am Text durchführen lassen ! (Hinweis: Diese Aufgabe stammt aus dem Adam-Ries-Wettbewerb für die Klassenstufe 5.)

96) *(Tabellen)*
Eine Analyse der Situation ergibt folgendes: 1 Ruderer schafft 11 andere Personen über den Fluß. Da das Boot 4 Personen trägt, kann er sich selbst und 3 Fahrgäste befördern. Bei 11 Fahrgästen muss er 4 Fahrten machen. Das Boot bleibt zum Schluß am rechten Ufer, also ist die vierte Fahrt ohne Rückfahrt. Das gesamte Übersetzen zum anderen Ufer dauert 4 · (5+3) min - 3 min = 29 min.
Der gesamte Vorgang kann mit folgender Tabelle verdeutlicht werden:

	linkes Ufer	Boot	rechtes Ufer	Dauer
Hinfahrt	8	4	0	5 min
Rückfahrt	8	1	3	3 min
Hinfahrt	5	4	3	5 min
Rückfahrt	5	1	6	3 min
Hinfahrt	2	4	6	5 min
Rückfahrt	2	1	9	3 min
Hinfahrt	0	3	9	5 min
Rückfahrt	-	-	-	-

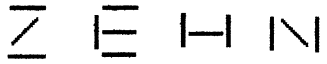
97) *(Findigkeit)*
Wenn das Buch die Hälfte seines Preises und noch 8,20 € kostet, dann sind 8,20 € die noch fehlende Hälfte. Also kostet das Buch 16,40 €.

98) *(Skizzen, Tabelle)*
Tag und Nacht zusammen ergeben einen Höhengewinn von 55 cm - 30 cm = 25 cm. Nach drei Tagen und drei Nächten ist die Schnecke in einer Höhe von 75 cm.
Es ist nicht gefragt, wann die Schnecke nicht mehr auf unter 2 m zurückrutscht, sondern wann sie die Höhe von 2 m erstmals erreicht. Der Spitzenwert des ersten Tages ist 55 cm, der Spitzenwert der weiteren Tage ist je 25 cm höher. Am 6. Tag erreicht man 55 cm + 5 · 25 cm = 180 cm, und im Verlauf des 7. Tages kann die Schnecke bis 2,05 m klettern und kommt damit auf der 2 m hohen Mauer oben an. Eine Tabelle oder Skizze könnte dies verdeutlichen.

99)
Man achte darauf, dass der Antwortsatz auch auf die Fragestellung eingeht. "Es werden 225 Pflanzen benötigt" ist nicht die geforderte Antwort, sondern "Uwe hat zu wenig eingekauft".

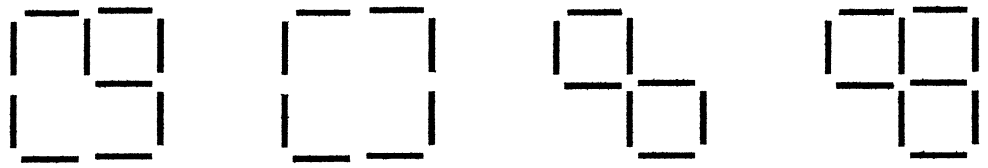
100) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Die beiden Aussagen haben zwei verschiedene Erfüllungsmengen. Wir suchen die Elemente, die beiden Mengen angehören:
$x = 7 \cdot a + 2 \Rightarrow$ x kann { 2 , 9 , 16 , 23 , 30 , **37** , 44 , 51 , 58 , ... , 79, ..., 121,...} sein.
$x = 6 \cdot a + 1 \Rightarrow$ x kann {1 , 7 , 13 , 19 , 25 , 31 , **37** , 43 , 49 , ... , 79, ..., 121,... } sein.
Nun kann man entweder beide Erfüllungsmengen aufstellen und vergleichen, oder man stellt nur eine Erfüllungsmenge auf und überprüft, welche Elemente auch die zweite Bedingung erfüllen. Wichtig ist auch bei dieser Aufgabe, dass man nicht nach der ersten gefundenen Lösung x = 37 die Untersuchung abbricht. Die Aufgabe hat (rechnerisch) unendlich viele Lösungen, die jeweils den Abstand 42 zueinander haben. Eventuell werden die Schüler bemerken, dass 42 das kleinste gemeinsame Vielfache von 6 und 7 ist.

101) *(Findigkeit)*

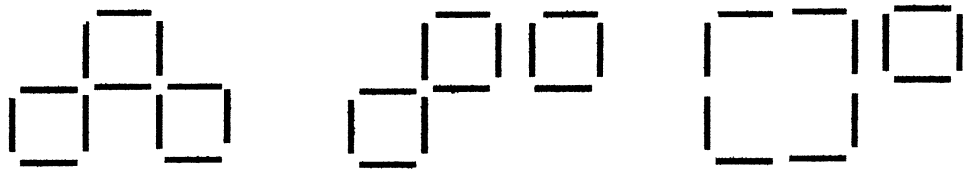


102) *(Findigkeit)*

a) b) c) d)



e) f) g)



h)

103) *(Tabellen)*

Gummibären	Tüten	Gramm	€
1000	**50**	*(II) 4000*	*(I) 80,00*
		1000	**20,00**
	1	*(III) 80*	**1,60**
1		*(IV) 4*	

In der Tabelle sind fett die gegebenen Werte eingetragen. Die Inhalte der umrandeten Felder sind gesucht. Der Reihe nach kann man z.B. finden:
(I) Weil eine Tüte 1,60 € kostet, kosten 50 Tüten 80,00 €.
(II) Weil 1000 g Gummibären 20 € kosten, bekommt man für 80 € 4000 g.
(III) Weil 50 Tüten 4000 g wiegen, wiegt eine Tüte 80 g.
(IV) 1000 Gummibären wiegen 4000 g, also wiegt 1 Gummibär 4 g.

104) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Es gilt s = 5 · L + 4 · R, wobei genau eine der Zahlen L, R ungerade ist.
Fall 1: L ist gerade. Dann sind beide Produkte und damit die Summe *gerade*.
Fall 2: L ist ungerade. Dann ist 5 · L ungerade und 4 · R gerade. Die Summe ist *ungerade*.
Man erkennt also an der Summe, welche der Anzahlen L und R gerade bzw. ungerade ist.
b) Wenn Ute die Zahl 60 nennt, dann hat sie links die gerade und rechts die ungerade Anzahl.
1. Lösungsweg: Wir untersuchen die Möglichkeiten für L:

L	5 · L	Bis 60 fehlen 4 · R	Vielfaches von 4 ?	R
2	10	50	nein	
4	20	40	ja	10
6	30	30	nein	
8	40	20	ja	5
10	50	10	nein	
12	60	0	ja	0
14	70	(zu groß)	-	

Die Schüler erhalten nach dem Erstellen der Tabelle den Auftrag: "Finde anhand der Tabelle heraus, wieviel Murmeln Ute in jeder Hand hattte und überprüfe Dein Ergebnis!" Nur wer jetzt gründlich arbeitet und die Probe nicht nur formal, sondern durch Vergleich mit dem Aufgabentext macht, wird bemerken, dass von den gefundenen Möglichkeiten für R nur R = 5 (und damit L = 8) die Bedingung der Aufgabe erfüllt. (Da L gerade ist, muss R ungerade sein.)

2. Lösungsweg: Wir untersuchen alle Möglichkeiten für R.

R	4 · R	Bis 60 fehlen 5 · L	Vielfaches von 5 ?	L
1	4	56	nein	
3	12	48	nein	
5	20	40	ja	8
7	28	32	nein	
9	36	24	nein	
11	44	16	nein	
13	52	8	nein	
15	60	0	ja	0

Der Fall L = 0 widerspricht der Bedingung, dass keine Hand leer ist. Also gilt R = 5, L = 8.
3. Lösungsweg: (entspricht der Idee des 2. Lösungsweges, aber ohne Probieren)

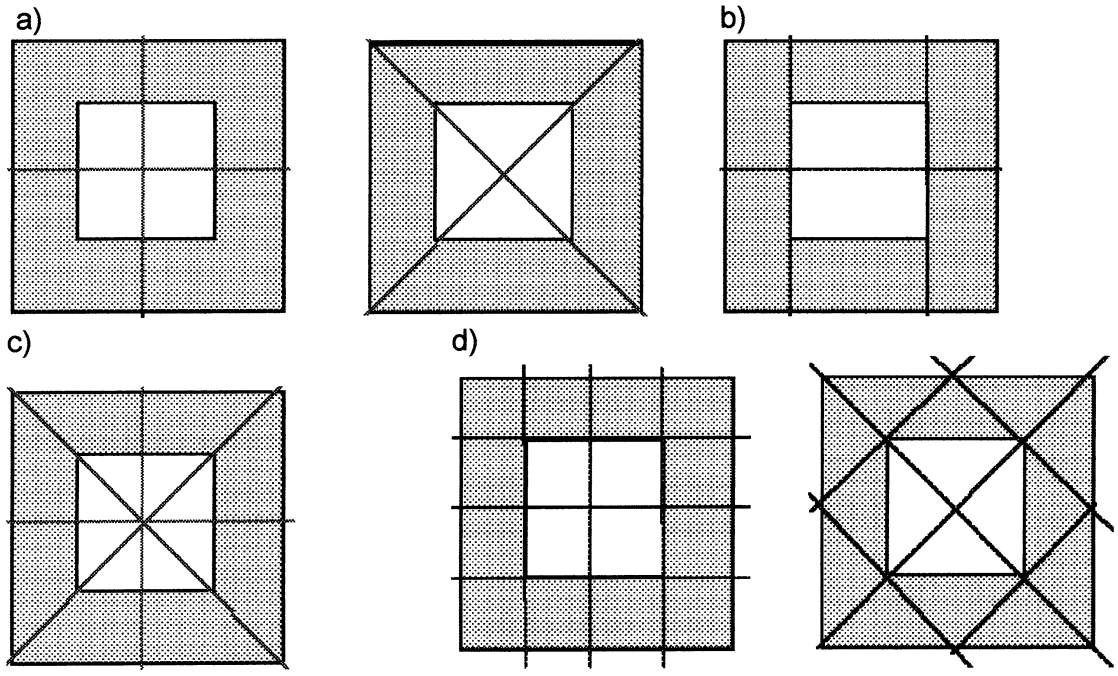
Es gilt 60 = 5 · L + 4 · R. Dabei muss L gerade und R ungerade sein. Da 60 und 5 · L durch 5 teilbar sind, muss auch 4 · R durch 5 teilbar sein. Da R ungerade ist, kann R nur 5 (oder 15, 25,...) sein. Außer 5 sind alle anderen möglichen Werte zu groß.

105) *(Tabellen)*
Die unmöglichen Zuordnungen lassen sich wieder in einer Tabelle veranschaulichen:

	M	N	O	P
d		--- (2)		--- (2)
e	--- (1)	--- (2)		--- (1),(2)
f	--- (1)			--- (1)
g				

Wir sehen, dass Herr Pfeifer wegen der Bedingungen (1) und (2) nur noch Gerd heißen kann, und Erich hat den Familiennamen Opitz. Da Gerd nicht mehr Meier heißen kann, bleibt für Meier nur der Vorname Dieter. Übrig ist Fritz Neumann.
Auch hier sollte man es nicht versäumen, die Verträglichkeit der gefundenen Zuordnungen mit allen Bedingungen der Aufgabe nachprüfen zu lassen.
(Diese Aufgabe stammt aus der Mathematikolympiade der Klassenstufe 5.)

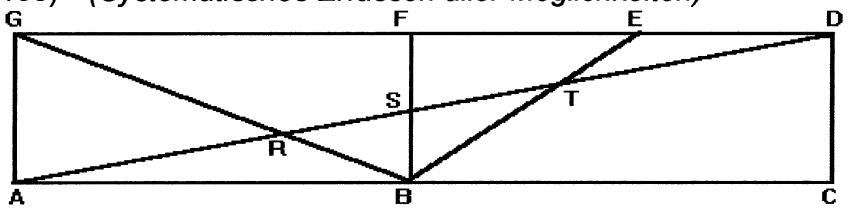
106) *(Findigkeit)*



In Aufgabenteil d) gibt es genau zwei Lösungen. Im Teil a) gibt es sogar unendlich viele Zerlegungen! Man kann die beiden einander schneidenden Geraden gemeinsam um jeden beliebigen Winkel um ihren Schnittpunkt drehen. Vor allem bei den schwierigen Teilaufgaben b) und d) könnte ein Impuls weiterhelfen: "Welchen Flächeninhalt müssen die entstehenden Teile haben ?"
(Die Aufgabe stammt aus der Mathematikolympiade der Klasse 5.)

107)
Drei Hundesprünge sind so weit wie 7 Fuchssprünge, also sind 6 Hundesprünge so weit wie 14 Fuchssprünge. Während dieser Zeit macht der Fuchs nur 9 Sprünge, sodass der Hund (mit 6 seiner Sprünge) 5 Fuchssprünge Vorsprung aufholt. 45 Fuchssprünge Vorsprung hat der Hund dann mit 54 Sprüngen aufgeholt. (Die Aufgabe stammt aus der 3. Stufe der Mathematikolympiade Klasse 7.)

108) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*



Um kein Dreieck zu übersehen, werden die Dreiecksbezeichnungen in lexikografischer Ordnung herausgesucht. Wir suchen zuerst alle Dreiecke AB.., dann AC.. usw. Wir finden ABG, ABR, ABS, ABT, ACD, ADG, AGR, BEF, BEG, BFG, BRS, BRT, BST, DET, DFS, DGR. Das sind 16 Dreiecke.

109) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Im Aufgabenteil a) kann man sehr gut erkennen, welche AG-Mitglieder das systematische Arbeiten bewußt anwenden und so tatsächlich alle möglichen Zerlegungen finden. Vor dem Bearbeiten von b) kann man schätzen lassen, wieviel Zerlegungen es für die 10 wohl geben wird. Die Schüler sollen zu der Einsicht kommen, dass das Aufschreiben aller Möglichkeiten unangemessen aufwendig ist. (Notfalls muss man sie mit diesem Aufschreiben beginnen lassen, bis die ersten AG-Mitglieder nach kurzer Zeit von sich aus den enormen Aufwand erkennen. Damit kann die Suche nach einer Gesetzmäßigkeit motiviert werden.) Für 4, 5 bzw. 6 erhält man:

4	5	6
= *1 + 1 + 1 + 1*	= **1 + 1 + 1 + 1 + 1**	= **1 + 1 + 1 + 1 + 1** + 1
= *1 + 1 + 2*	= **1 + 1 + 1 + 2**	= *1 + 1 + 1 + 1* + 2
= *1 + 2 + 1*	= **1 + 1 + 2 + 1**	= **1 + 1 + 1 + 2** + 1
= *2 + 1 + 1*	= **1 + 2 + 1 + 1**	= **1 + 1 + 2 + 1** + 1
= *2 + 2*	= **2 + 1 + 1 + 1**	= **1 + 2 + 1 + 1** + 1
	= **1 + 2 + 2**	= **2 + 1 + 1 + 1** + 1
	= **2 + 1 + 2**	= *1 + 1 + 2* + 2
	= **2 + 2 + 1**	= *1 + 2 + 1* + 2
		= **1 + 2 + 2** + 1
		= *2 + 1 + 1* + 2
		= **2 + 1 + 2** + 1
		= **2 + 2 + 1** + 1
		= *2 + 2* + 2

Es gilt:
Die Möglichkeiten für die Zahl 6 erhält man, indem zu den Zerlegungen der Zahl 4 (*kursiv*) ein Summand 2 oder zu den Zerlegungen der Zahl 5 (**fett**) noch ein Summand 1 hinzugefügt wird. Deswegen ist die Anzahl der Möglichkeiten für 6 gleich der Summen der Anzahlen für 4 und 5.

Die Schüler werden diese Gesetzmäßigkeit sicher nicht von sich aus in dieser Weise begründen. Die Chance, eine solche Gesetzmäßigkeit zu erkennen, wächst jedoch, wenn nicht nur für die Zerlegungen der Zahlen 4, 5 und 6, sondern auch weiterer angrenzender Zahlen betrachtet werden. Bevor man sich die Mühe macht, die Zerlegungen für 7, 8, ... aufwendig zu untersuchen, kann man mit viel weniger Aufwand die bereits in der Aufgabenstellung angeführten Zerlegungen für 1, 2 und 3 einbeziehen. Man erhält der Reihe nach 1, 2, 3, 5, 8, 13 Zerlegungen. Mit dem Impuls:"Um wieviel wächst die Anzahl der Zerlegungen jeweils?" soll erkannt werden, dass jede Zahl dieser Folge die Summe der

beiden vorangegangenen Anzahlen ist (und nach obiger Begründung sein muss). Für die Zahlen 7, 8, 9 ergeben sich ganz analog 8 + 13 = 21, 13 + 21 = 34 bzw. 21 + 34 = 55 Möglichkeiten. Für die Zahl 10 gibt es demnach 34 + 55 = 89 mögliche Zerlegungen.
(Die Aufgabe stammt aus der Mathematikolympiade Klasse 5.)

110) *(Folgern aus den Bedingungen)*
Das Öl wiegt netto 17500 g - 2700 g = 14800 g.
14800 : 925 = 16, also sind es 16 Liter Öl.
14800 : 400 = 37, also lassen sich 37 Flaschen damit füllen.

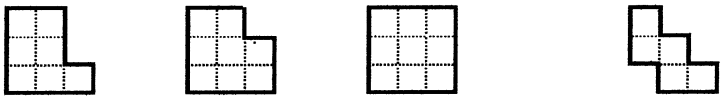
111) *(Findigkeit)*
Jeder reitet mit dem Pferd des anderen.

112)
Es gilt $\overline{AB} = 1$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{CD} = 10$ cm.

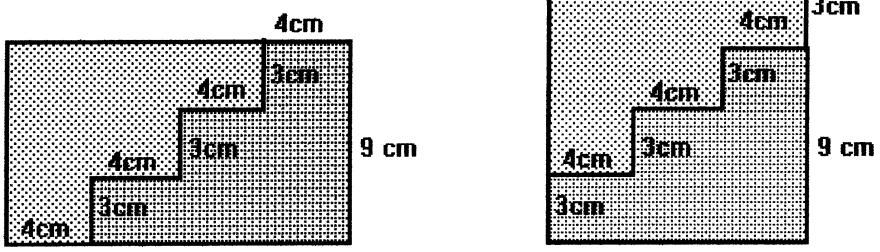
Damit ist $\overline{BC}$ 3 cm länger als $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ist 5 cm und $\overline{CD}$ doppelt so lang, und $\overline{AD}$ beträgt 15 cm.

113)
Stromabwärts schaffen sie 120 m pro Minute. Stromaufwärts sind es nur 80 m pro Minute. Damit brauchen sie für 1200 m 15 Minuten.

114)
7 Kästchen 8 Kästchen 9 Kästchen noch möglich: 5 Kästchen



115) *(Findigkeit)*
Hilfreich ist die Frage, welche Seitenlänge das entstehende Quadrat haben muss. In das Rechteck passen 16 · 9 = 144 Kästchen mit der Seitenlänge 1 cm, also muss das Quadrat (wegen 12 · 12 = 144) eine Seitenlänge von 12 cm bekommen. Damit muss an der Oberkante ein 4 cm breites Stück abgeschnitten werden, das dann wiederum in die Restfigur eingepaßt werden muss. Nach unten ist eine Verlängerung um 3 cm erforderlich.



116) *(Findigkeit, Fallunterscheidung)*
Wenn nötig, hilft folgender Impuls: "Weiß der ortsfremde Wanderer wenigstens von einem der drei Wege, wohin er führt ?" (Ja, denn der Wanderer kommt auf dem Weg von Altdorf her). Wenn der Wegweiser "Altdorf" ihm entgegenzeigt, so ist dieser Wegweiser richtig, und er muss sich die beiden anderen Pfeile vertauscht denken. Wenn ein anderer Wegweiser als "Altdorf" ihm entgegenzeigt, so sind der auf ihn zeigende Wegweiser und der Wegweiser

"Altdorf" falsch, und er muss sich diese beiden vertauscht denken. (Die Aufgabe stammt aus einer früheren Mathematikolympiade für die Klassenstufe 8.)

117)
Optische Täuschung. Beide Strecken sind gleich lang.

118) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Es gibt viele verschiedene Eintragungen. In das Feld A dürfen aber die Zahlen 1, 2, 5, 7, 9 und 12 **nicht** eingetragen werden (1 ist zu klein; 2, 5 und 9 sind schon verwendet; 7 müßte zweimal eingetragen werden; 12 würde eine weitere 2 erfordern.). Wer sich damit nicht zufrieden gibt und die verbleibenden Möglichkeiten (3, 4, 6, 8, 10, 11) untersucht, wird nur für A = 6 und A = 8 Lösungen finden. Auch die Zahlen 3, 4, 10 und 11 sind im Feld A nicht möglich. Um dies nachzuweisen, ist zunächst die Beantwortung der Frage c) nötig : Die Summe der vier Eckfelder muss 22 betragen. Diese Vermutung kann man durch den Vergleich mehrerer gefundener Eintragungen erhalten. Begründet wird dieses Ergebnis damit, dass die Summe der verwendeten Zahlen 78 beträgt, die vierfache Seitensumme jedoch 100 ist. Die Differenz (22) entsteht dadurch, dass die Zahlen in den Eckfeldern für je zwei Seitensummen mit verwendet werden. Wird nun beispielsweise in das Feld A eine 3 eingesetzt, müßten wegen der Eckensumme 22 die beiden noch freien rechten Ecken die Summe 17 haben. Da einige Zahlen schon an anderen Stellen verbraucht sind, können in diesen Ecken nur noch 10 und 7 stehen. Zum Ausfüllen der restlichen Felder werden in jedem Fall Zahlen benötigt, die an anderer Stelle schon eingesetzt sind. Analoge Widersprüche ergeben sich beim Einsatz der Zahlen 4, 10 bzw. 11 im Feld A.

119) *(Tabellen)*
Wenn die AG-Mitglieder nicht von sich aus eine Tabelle vorschlagen, kann als Impuls die Frage nach einer geeigneten Veranschaulichung der Aufgabe helfen. Nächster Impuls: "Was soll veranschaulicht werden ?" (Zuordnung Schüler - unterrichtender Lehrer oder Zuordnung Schüler - Aufsicht)
In einer ersten Tabelle könnte man alle möglichen Zuordnungen zwischen Schülern und unterrichtenden Lehrern ermitteln. Danach lassen sich (in einer zweiten Tabelle) die Aufsichten ermitteln. Für den Einstieg in das Ermitteln der Zuordnung Schüler - Lehrer kann als weiterer Impuls die Frage nach der *informativsten Bedingung* helfen. Dies ist hier Aussage (6), denn Herr Fink und Herr Specht können beide nicht Lehrer des Jungen Frank sein. Eine mögliche Reihenfolge der weiteren Schlußfolgerungen ist (hier ohne Tabellen) nachstehend angegeben. Die Aussagen (7), (8) und (9) gewinnt man aus einer Tabelle Schüler - Lehrer, die Aussagen (10), (11), (12) aus einer Tabelle Schüler - Aufsicht.
Wegen (6) gilt:
(7) Frank wird weder von Herrn Specht noch von Herrn Fink, sondern von **Herrn Vogel** unterrichtet.
Wegen (2) und (6) gilt:
(8) Herr Fink unterrichtet weder Renate noch Frank, sondern **Petra**.
Wegen (7) und (8) gilt:
(9) Herr Specht unterrichtet **Renate.**
Wegen (5), (1) und (9) gilt für die Aufsicht:
(10) Herr Specht kann nur Petra beaufsichtigen.
Wegen (3) und (10) gilt:
(11) Herr Vogel beaufsichtigt Renate.
Wegen (10) und (11) gilt:
(12) Herr Fink beaufsichtigt Frank.
Nicht verwendet wurde die Bedingung (4). Sie hat keinen Einfluß auf die Lösung und kann weggelassen werden. Es läßt sich jedoch noch eine Bedingung weglassen ! Die Aussage (11) gewinnt man auch ohne (3). Wegen (1) und Feststellung (7) kann Herr Vogel nicht bei

Frank Aufsicht führen. Damit ergibt sich Bedingung (3) automatisch und muss nicht extra angegeben werden.
Es darf aber auch hier nicht vergessen werden, dass eine Probe erforderlich ist. Wenn eine Bedingung nicht benötigt wurde, heißt dies noch nicht, dass sie für die Lösung ohne Bedeutung ist. Es muss wieder überprüft werden, ob keine der gegebenen Bedingungen in irgendeinem Widerspruch zur ermittelten (möglichen) Lösung steht.

Komplizierter ist ein *zweiter Lösungsweg*, wenn zuerst die Aufsichten ermittelt werden, weil man dazu nicht ohne Kenntnis der Fachlehrerzuordnung auskommt:
Aus (1),(3) und (5) folgt, dass weder Herr Vogel noch Herr Specht Franks Aufsicht sind. Also gilt:
(7*) Herr Fink führt bei Frank Aufsicht.
Die übrigen Aussagen über Aufsichten führen noch nicht zu einer Zuordnung der anderen beiden Aufsichten, also müssen erst Fachlehrerzuordnungen betrachtet werden:
(Damit bietet es sich an, den begonnenen Lösungsweg abzubrechen und doch zuerst nach den kompletten Fachlehrerzuordnungen zu suchen. Ansonsten kann es wie folgt weitergehen.)
Wegen (6) werden die Mädchen von Herrn Specht und Herrn Fink unterrichtet, wegen (2) ist Herr Fink aber nicht Renates Lehrer. Also gilt
(8*) Herr Specht unterrichtet Renate (und führt wegen (1) nicht bei ihr Aufsicht).
Wegen (7*), (1) und (8*) gilt
(9*) Herr Specht führt bei Petra Aufsicht.
Die restlichen Zuordnungen ergeben sich jetzt leicht. Wegen (7*) und (9*) gilt
(10*) Herr Vogel führt bei Renate Aufsicht.
Wegen (7*) und (8*) und (1) gilt
(11*) Herr Fink unterrichtet weder Frank noch Renate, sondern **Petra.**
Übrig bleibt
(12*) Herr Vogel unterrichtet Frank.

120) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten, Folgern aus den Bedingungen)*
Es gibt zunächst zwei (naheliegende) Lösungswege. Wenn Schüler einen der beiden vorgeschlagen, sollte man sofort nach der "umgekehrten" zweiten Möglichkeit fragen und beide zur Diskussion stellen. Nachträglich kann man den Aufwand gegenüberstellen und begründen lassen, warum der zweite Weg kürzer sein musste.
1. Lösungsweg: Für die Anzahl j der Jungen werden der Reihe nach die Vielfachen von 3 eingesetzt, dann m = j-3 ermittelt und überprüft, ob m durch 4 teilbar ist.
2. Lösungsweg: Für die Anzahl m der Mädchen werden der Reihe nach die Vielfachen von 4 eingesetzt, dann j = m+3 ermittelt und überprüft, ob j durch 3 teilbar ist.

1. Lösungsweg

j	m = j - 3	j + m < 35 ?	m durch 4 teilbar ?
3	0	ja	ja
6	3	ja	nein
9	6	ja	nein
12	9	ja	nein
15	12	ja	ja
18	15	ja	nein
21	18	nein	nein
		(Abbruch)	

2. Lösungsweg

m	j = m + 3	j + m < 35 ?	j durch 3 teilbar ?
4	7	ja	nein
8	11	ja	nein
12	15	ja	ja
16	19	nein	nein
		(Abbruch)	

Im ersten Lösungsweg muss man den Fall m = 0 noch aus dem Aufgabentext heraus ausschließen, dann erhält man wie auch im zweiten Lösungsweg als einzige Möglichkeit : j = 15, m = 12.

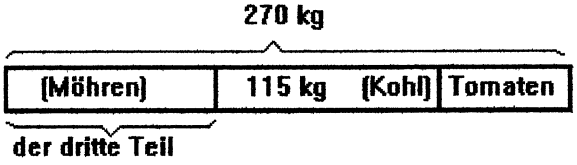
Man achte darauf, dass nicht etwa im Antwortsatz diese Teilanzahlen anstatt der geforderten Gesamtzahl angegeben werden ! Die Antwort muss lauten: "27 Kinder gehen in die Klasse."
Sehr leistungsstarke Schüler finden vielleicht einen eleganteren *3. Lösungsweg:*
Weil j durch 3 teilbar ist, muss auch j - 3 = m durch 3 teilbar sein. Wenn m durch 3 und durch 4 teilbar ist, kommt für m nur ein Vielfaches von 12 in Frage, wobei 24, 36... schon zu groß sind. Also gilt m=12 und j = 15.

121)
a) Es wurden 15 Würfel entnommen.
b) Der ursprüngliche Quader hatte einen Oberflächeninhalt von 168 Quadraten. Davon gingen durch das Entnehmen von Würfeln 16 Quadrate verloren, und hinzu kamen 32 Quadrate, die vorher im Inneren des Körpers lagen. Jetzt besteht die Oberfläche aus 168 - 16 + 32 = 184 Quadraten.

122)
Die nächste "Spiegelzahl" nach 15951 ist 16061, die Differenz beträgt 110. Wenn man nach genau zwei Stunden diesen Kilometerstand erreichen will, muss man 55 km je Stunde zurücklegen.

123) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Um die Fragen beantworten zu können, muss geklärt werden, um welche Zeit die Beobachtung von Klaus gemacht werden konnte. Wenn der Zeiger, der bei "sieben Minuten vor halb" stand, der große Zeiger war, so musste es 7.23 Uhr oder 19.23 Uhr gewesen sein. (Der kleine Zeiger würde in diesem Fall erst 7.24 Uhr bzw. 19.24 Uhr ganz genau bei "sieben Minuten nach halb" stehen, aber mit bloßem Auge ist der Unterschied nicht zu erkennen.) Anderenfalls war es 4.37 Uhr oder 16.37 Uhr (wobei der kleine Zeiger eine Minute früher ganz genau bei "sieben Minuten vor halb" gestanden hätte). Von 4.37 Uhr bis 7.23 Uhr wartet man 2h 46 min, und von 7.23 Uhr bis 16.37 Uhr wartet man 9 h 14 min.

124) *(Skizzen, Tabellen)*
Mit Hilfe von Skizzen und Tabellen ist die Aufgabe leicht zu lösen und gut zu veranschaulichen. Zunächst erhält man das Teilergebnis 65 kg für die Masse der Tomaten. Die Tabelle hilft beim Ermitteln des Preises.



Masse	Preis
500 g	0,99 €
1 kg	1,98 €
65 kg	**65 · 1,98 €**

Für 65 · 1,98 € sollen die Schüler selbst den Rechenvorteil finden:

65 · 1,98 € = 65 · 2 € - 65 · 0,02 €
= 130 € - 1,30 €
= **128,70 €.**

125)
Eine vollständige Fallunterscheidung liefert mit Sicherheit die Antwort (der Reiseführer und der befragte Einheimische könnten jeweils vom Stamm der Ehrlichen oder vom Stamm der Lügner sein, das gibt vier mögliche Kombinationen). Von diesen vier Fällen wird der Forscher nur in den beiden Fällen, wo der Reiseführer ehrlich ist, die genannten Antworten übermittelt bekommen. Das kann man jedoch auch ohne eine aufwendige Fallunterscheidung ermitteln: Sowohl der Ehrliche als auch der Lügner antworten stets, dass sie ehrlich wären. Also hat auch der vom Reiseleiter befragte Einheimische so geantwortet, und der Reiseleiter hat die Antwort wahrheitsgemäß übermittelt.

126) *(Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)*
Von Bedeutung für die systematische Untersuchung ist nur, welche Häuser auf dem Weg in die Sackgasse hinein angelaufen werden. Die dabei übersprungenen Häuser kommen dann automatisch und ohne Möglichkeit zur Variierung der Reihenfolge auf dem Rückweg dran. Deshalb werden die auf dem Rückweg belieferten Häuser in der nachfolgenden Aufzählung nur mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet.
a) ABC, ACb, BCa, Cba (4 Möglichkeiten)
b) ABCD, ABDc, ACDb, ADcb, BCDa, BDca, CDba, Dcba (8 Möglichkeiten)
Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt in der weiteren Festigung des systematischen Arbeitens durch die Anwendung eines Ordnungsprinzips (die aufsteigenden Teile der Buchstabenfolgen werden zweckmäßigerweise lexikografisch geordnet).
Man sollte jedoch leistungsstarke Schülern auch auffordern, nach einer Gesetzmäßigkeit in der Anzahl der Möglichkeiten zu suchen. Ein Vergleich der Anzahlen bei a) und b) könnte zu verschiedenen Vermutungen führen (z.B.: "mit jedem Haus erhöht sich die Anzahl um 4" oder "die Anzahl verdoppelt sich"). Bevor man die Vermutungen recht arbeitsaufwendig an fünf Häusern überprüft, wird man statt einer Vergrößerung zunächst eine Verkleinerung der Häuserzahl vorschlagen und für nur zwei Häuser A und B genau 2 Möglichkeiten (AB und Ba) erhalten, was die Vermutung einer Verdoppelung zu bestätigen scheint. Wenn ein Schüler jetzt von sich aus vorschlägt, den Grenzfall "nur ein Haus A" auch noch zu untersuchen, so ist dies ein Anzeichen für beachtliches Abstraktionsvermögen. Man sollte dann allerdings die Schüler entscheiden lassen, ob sie sich die Mühe machen wollen und die gewonnene Vermutung tatsächlich für fünf Häuser A, B, C, D und E überprüfen wollen. Da die Kinder wissen, dass sie höchstwahrscheinlich 16 Möglichkeiten zu finden haben, wird der Ehrgeiz groß sein, tatsächlich alle zu finden. Dann kann man abwechselnd jedes AG-Mitglied nur eine Möglichkeit nennen lassen. Die AG-Mitglieder, die gerade nicht an der Reihe sind, werden Einspruch erheben, wenn jemand mit seiner genannten Möglichkeit gegen die lexikografische Ordnung verstößt.
Diese Aufgabe wurde schon in der Mathematikolympide der Klassenstufe 6 verwendet.

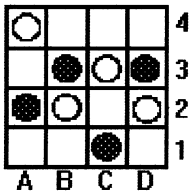
127) *(Findigkeit)*

a)	b)
$(5 + 5) \cdot (5 + 5) = 100$	$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$
$(5 \cdot 5 - 5) \cdot 5 = 100$	$5 \cdot 5 \cdot (5 - 5 : 5) = 100$
	$5 \cdot (5 + 5 + 5 + 5) = 100$

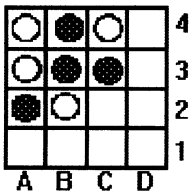
128) *(Findigkeit)*
Auf beide Waagschalen werden je zwei Beutel mit gleicher Gesamtmasse gelegt, z.B. 20+60 Murmeln und 30+50 Murmeln. Bei Gleichheit der Massen liegt die leichtere Murmel im 40-er Beutel.
Ist beispielsweise die (20+60)-er Seite leichter, muss die Entscheidung zwischen diesen beiden Beuteln in einer zweiten Wägung durch den Vergleich von (30+60) bzw. (40+50) Murmeln fallen. Nun wäre bei Gleichheit die leichten Murmel im 20-er Beutel, oder die (30+60)-er Seite ist leichter, und die leichte Murmel liegt im 60-er Beutel. Wenn bei der ersten Wägung die (30+50)-er Seite leichter ist, erfolgt in der zweiten Wägung ebenfalls ein Vergleich von (30+60) bzw. (40+50) Murmeln.

129) *(Findigkeit)*
Aus der waagerechten Reihe wird die rechte Münze genommen und auf die Münze im Schnittpunkt beider Reihen gelegt.

130)
a)



Schwarz kann die Niederlage nicht verhindern. Wenn der Stein B3 auf B4 gezogen wird, um den weißen Stein von A4 nicht auf B4 zu lassen, kann Weiß von C3 auf C2 ziehen und gewinnt. Wenn Schwarz hingegen das Feld C2 besetzt, zieht Weiß von A4 auf B4 und gewinnt ebenfalls.



Wenn Weiß am Zug ist, muss es das Feld B2 oder C4 verlassen, worauf Schwarz entweder senkrecht von B2 bis B4 oder diagonal (A2-B3-C4) drei Steine in eine Reihe bekommt. Wenn Schwarz selbst am Zug ist, macht der Stein C3 einen (belanglosen) Zug, und Weiß muss wieder B2 oder C4 räumen.

b) Da es jeweils zwei Spiele sind (Hin- und Rückspiel), ist jeder der 10 Spieler gegen jeden der anderen 9 Spieler genau einmal "Gastgeber", sodass es 90 Spiele werden.
Anmerkung: Wenn man mit der AG dieses Spiel durchführt, sollte man möglichst in kleineren Gruppen (3 bis 5 Teilnehmer je Gruppe) spielen. Jede Paarung führt zwei Spiele durch, das Resultat (2:0, 1:1 oder 0:2) wird an der Tafel in einen vorbereiteten Spielplan eingetragen. Zum Schluß spielen die Gruppenersten in einer Finalrunde den Sieger aus, und die übrigen spielen um die Plätze 5 bis 8 usw. Das Aufstellen eines Spielplanes für Gruppen mit 3, 4 oder 5 Mitspielern können die AG-Mitglieder selbst bewerkstelligen. Zum Vergleich: Bei 5 Mitspielern lauten die Ansetzungen

A - B, C - D, spielfrei: E
A - C, B - E, spielfrei: D
A - E, B - D, spielfrei: C
A - D, C - E, spielfrei: B
B - C, D - E, spielfrei: A

Nachbetrachtungen

Beim Korrekturlesen meines Entwurfs für diese Anleitung hat Herr Dr. König sowohl bei der Behandlung einzelner Aufgaben sowie bei deren Anordnung abweichende Vorschläge geäußert. Einige dieser Vorschläge habe ich in Form von Änderungen oder Ergänzungen bei der Besprechung der Aufgaben übernommen. An der Reihenfolge meiner Aufgaben habe ich aber festgehalten, denn nur bei dieser Reihenfolge liegen mir die entsprechenden Erfahrungswerte einer mehrjährigen Erprobung vor. Die breite Streuung von Aufgaben gleichen Typs über das gesamte Schuljahr gewährleistet, dass auch Schüler, die nicht über das ganze Schuljahr hinweg die AG besuchen, irgendwann mit den verschiedenen behandelten Aufgabentypen, Hilfsmitteln und Verfahren vertraut gemacht werden und diese bei späteren Aufgaben wieder anwenden können. Zwei **Änderungsvorschläge** von Dr. König habe ich nicht in den Hauptteil übernommen, möchte sie jedoch nachträglich vorstellen.

a) Reihenfolge der Aufgaben

Zur bewußteren Vermittlung von Hilfsmitteln und Verfahren kann man jeweils mehrere ausgewählte Aufgaben eines Themenkreises nacheinander behandeln. Erst nachdem man in mehreren AG-Zusammenkünften alle in Frage kommenden Themen behandelt hat, werden die übrigen, bisher nicht behandelten Aufgaben als "vermischte Aufgaben" gestellt. Dann müssen die Kinder selbst herausfinden, zu welchem Thema die gerade behandelte Aufgabe

gehört und welche Hilfsmittel erfolgversprechend sein können. Wer eine getrennten Behandlung verschiedener Themenkreise bevorzugt, kann die Aufgaben wie folgt einordnen:

I. Wozu Tabellen nützlich sind
3), 4), 13), 23), 49), 42), 50), 77), 103), 70), 105), 96)

II. (Systematisches Erfassen aller Möglichkeiten)
27), 55), 11), 12), 53), 59), 108), 126), 85), 76), 44), 16), 71), 104), 116), 125)

III. Der Schüler Gauß erfindet ein Additionsverfahren
29), 30), 40), 84), 87), 88)

IV. Hier können Skizzen helfen
7), 98), 112), 14), 35), 73)

V. Aufgaben mit Pfiff
92), 15), 129), 101), 102), 111), 95), 106), 115), 74), 128), 72)

VI. Vermischte Aufgaben
(alle übrigen Aufgaben)

b) Das Gaußsche Additionsverfahren

Ursprünglich war die Vermittlung dieses Verfahrens überhaupt nicht vorgesehen. Bei der Suche nach Aufgaben für die AG Klasse 4 stieß ich aber immer wieder auf Sachverhalte, wo die natürlichen Zahlen von 1 bis ... addiert werden mussten oder wo dies für eine rationelle Lösung günstig war. Diese Häufigkeit veranlasste mich letztendlich, das Verfahren in der AG gezielt suchen zu lassen. Da einige AG-Mitglieder von sich aus eine Paarbildung vornahmen (vergl. Lösung zu Nr. 29), behielt ich diesen Weg der Vermittlung bei. Als Abkürzung dieser Paarbildung wurde dann die Formel
$1 + 2 + 3 + ... + n = n \cdot (n+1) : 2$ mitgeteilt und deren Gültigkeit an Beispielen gezeigt.
Wem es nicht reicht, mit dieser Formel ein handhabbares Werkzeug für viele Aufgaben zu vermitteln, der kann bei Aufgabe 29) und allen anderen Aufgaben dieses Typs wie folgt vorgehen:
Es sei $s = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$. In umgekehrter Reihenfolge der Summanden gilt
$s = n + (n-1) + ... + 2 + 1$. Addiert man beide Zeilen, so erhält man
$2 \cdot s = (n+1)+(n+1)+ ... + (n+1) + (n+1)$, das sind n Summanden (n+1).
Aus $2 \cdot s = n \cdot (n+1)$ folgt dann $s = n \cdot (n+1) : 2$. Vermittelt wird hier nicht die Formel an sich, sondern das Verfahren der zweimaligen Summenbildung. Dieses Verfahren führt auch zur Lösung, wenn es sich nicht um aufeinanderfolgende Summanden, sondern nur um Summanden gleichen Abstands handelt oder wenn der erste Summand größer als 1 ist. Dies soll am Beispiel der Aufgabe 40b) verdeutlicht werden.

$s = 42 + 43 + 44 + ... 1998 + 1999 + 2000$
(es sind 1959 Summanden)
$s = 2000 + 1999 + 1998 + ... 44 + 43 + 42$

Die doppelte Summe besteht aus 1959 Summanden(paaren) von je 2042, das sind 4000278. Die einfache Summe ist dann halb so groß, also 2000139.

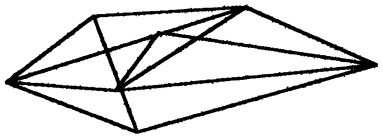
Seit dem ersten Druck unserer Aufgabensammlung habe ich einige weitere Aufgaben entdeckt, die für die Behandlung in einer AG der Klasse 4 geeignet scheinen. Nachfolgend sind diese Aufgaben als Zusatzaufgaben vorgestellt.

Zusatzaufgaben

Z 1)
Ein Radfahrer fährt nacheinander über drei Kreuzungen. An jeder Kreuzung kann man entweder geradeaus oder nach links oder nach rechts fahren. Hinterher macht er drei Angaben:
(1) An der ersten Kreuzung bin ich nach rechts gefahren.
(2) An der zweiten Kreuzung bin ich nicht rechts abgebogen.
(3) An der dritten Kreuzung bin ich nicht links abgebogen.
Nun weiß man allerdings, dass der Radfahrer zweimal gelogen hat, und dass er jede der drei Richtungen (links, rechts, gerade) nur ein einziges Mal eingeschlagen hat.
Welche Richtung hat der Radfahrer an jeder der 3 Kreuzungen gewählt ?

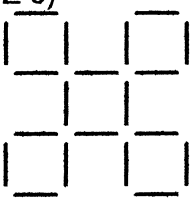
Z 2)
Die Schwiegermutter des Vaters des Sohnes traf die Schwiegermutter der Mutter des Sohnes. Wer traf wen ?

Z 3)
Wie viele Dreiecke sind in der abgebildeten Figur enthalten ?



Z 4)
Ein Holzwürfel von 30 cm Kantenlänge soll in Holzwürfel von 10 cm Kantenlänge zersägt werden. Mit wieviel Schnitten schafft man das, wenn das Sägen im Paket -also mehrere Teile gleichzeitig - nicht gestattet sein soll ?

Z 5)

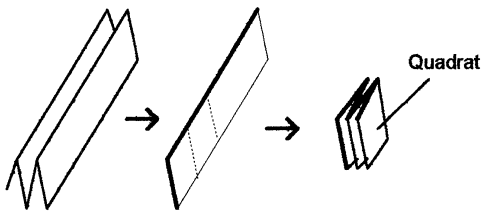


Es sind 3 Hölzchen so umzulegen,
dass einmal 7 gleichgroße und
einmal 9 Quadrate entstehen.

Z 6)
Gegeben ist ein Briefmarkenblock mit 4 mal 2 Briefmarken. Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Block entlang der Perforation in zwei Teile zu zerreißen? Die Teile dürfen unterschiedlich groß sein.

Z 7)
Ich habe mir eine Zahl gemerkt. Ihre Quersumme ist 26. Das Produkt aller Ziffern ist gerade. Aus den Ziffern dieser Zahl lassen sich (durch Umordnen der Reihenfolge) 12 verschiedene Zahlen bilden. Streicht man die erste Ziffer weg, so entsteht eine Primzahl. Die 3. und 4. Ziffer sind gleich. Wie lautet die gesuchte Zahl ?

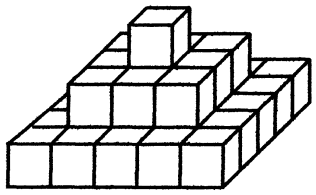
Z 8)
Ein rechteckiges Plakat hat einen Umfang von 378 cm. Es wird mit 4 parallelen Knicken zickzackförmig zusammengefaltet. Senkrecht zu diesen 4 Knicken wird es jetzt in der anderen Richtung mit 3 parallelen Knicken ebenfalls zickzackförmig zusammengefaltet. Jetzt ist ein Quadrat entstanden. Wie lang und wie breit war das Plakat ?



Z 9)
a) Olaf wohnt an einer Straßenbahnlinie. Die Bahnen fahren in beiden Richtungen immer pünktlich alle 8 Minuten. Olaf zieht die Gardine beiseite und öffnet das Fenster. Drei Minuten später fährt gerade die erste Bahn an seinem Fenster vorbei. Kurz danach kommt auch die Bahn aus der Gegenrichtung. Als Olaf geraume Zeit später das Fenster schließt, fährt gerade die insgesamt 37. Bahn an seinem Fenster vorbei.
Ermittle die Dauer der Zeit, in der das Fenster offen war (Angabe in Stunden und Minuten)!

b) Olaf behauptet: "Als ich 6 Minuten nach dem Schließen des Fensters auch die Gardine wieder zugezogen habe, kam gerade die 38. Bahn." Untersuche, ob das stimmen kann!

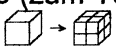
Z 10)
Aus quadratischen Holzwürfeln sollen mehrstufige Türme gebaut werden, bei denen jede Schicht eine quadratische Grundfläche hat und unter der darüberliegenden Schicht an allen vier Seiten um eine Würfelbreite übersteht. Die Abbildung zeigt einen solchen Turm mit drei Stufen, für den genau 35 Würfel benötigt werden.



a) Wieviel Würfel werden für einen vierstufigen Turm benötigt?

b) Gibt es einen mehrstufigen Turm, der aus genau 147 Würfeln besteht ?
(Wenn ja, mit wieviel Schichten? Wenn nein, warum nicht?)

c) Der dreistufige Turm in der Abbildung wird blau angemalt (auch auf der Unterseite) und danach wieder in einzelne Würfel zerlegt.
Gib in einer Tabelle an, wie viele der 35 Teilwürfel an keiner, an einer, an zwei, an drei, an vier bzw. an 5 Seitenflächen blau gefärbt sind !

d) Nun wird jeder der 35 (zum Teil blau gefärbten) Würfel aus Aufgabe c) in 8 kleinere Teilwürfel zerschnitten: 
Wie viele der entstandenen 280 Teilwürfel haben gar keine blaue Fläche ?

Z 11)
Ergänze in jeder Zeile der Tabelle die fehlenden Eintragungen !

	x	y	z	3·x + 5·y - 2·z	3·x + (y-z)	3·x - (y-z)
a)	17	30	14			35
b)		50	21	304		67
c)		9			26	10
d)	5			105	30	

Z 12)
Olaf, Sven, Paul und Nico geben am Beginn eines Sportfestes Tips ab, wie der 100-m-Lauf ausgehen wird.
Olaf sagt "Nico wird gewinnen."
Sven sagt "Paul oder Nico werden gewinnen."
Paul sagt "Von euren beiden Vorhersagen ist eine wahr und eine falsch."
Nico sagt: "Paul wird nicht gewinnen".
Hinterher stellt der Sportlehrer fest, dass drei dieser 4 Vorhersagen falsch waren.
Wer kann das Rennen gewonnen haben ?

Lösungen zu den Zusatzaufgaben:

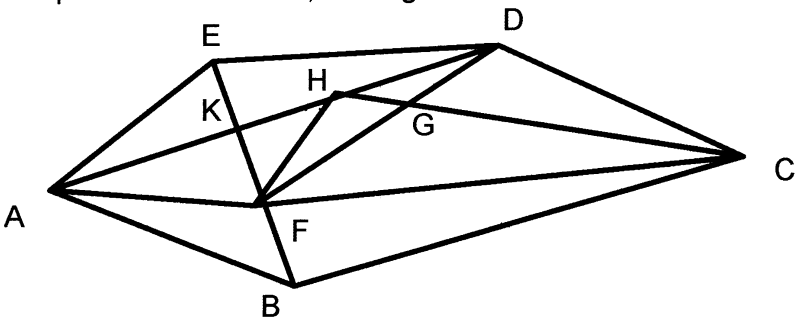
zu Z 1)
Fallunterscheidung:

	1. Fall	2. Fall	§. Fall
Aussage 1	W	F	F
Aussage 2	F	W	F
Aussage 3	F	F	W

Fall 1 ergibt einen Widerspruch, weil dann der Radfahrer an der ersten und zweiten Kreuzung jeweils nach rechts gefahren wäre.
Fall 2 ergibt einen Widerspruch, weil der Radfahrer an der 3. Kreuzung nach links und an den ersten beiden Kreuzungen nicht nach rechts gefahren wäre. Somit wäre er nie links abgebogen.
Im Fall 3 ist der Radfahrer an der 2. Kreuzung nach rechts gefahren. An der 3. Kreuzung hatte er eine andere Richtung, aber nicht links. Also ist er dort geradeaus gefahren. An der 1. Kreuzung fuhr er dann links. Bei dieser Verteilung sind tatsächlich zwei Aussagen falsch und eine wahr.
Da Fall 1 und Fall 2 keine Lösungen liefern, ist Fall 3 der einzig mögliche Fall.

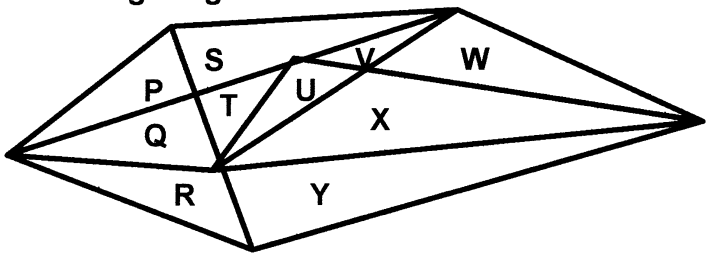
zu Z 2)
Es trafen sich die beiden Großmütter des Sohnes.

zu Z 3)
1. Lösungsweg:
Eckpunkte bezeichnen, lexikografisches Ordnen



ABE, ABF, ABK, ADE, ADF, AEF, AEK, AFH, AFK, BCF, CDF, CDG, CDH, CFG, CFH, DEF, DEK, DFH, DFK, DGH, FHK, FGH **22 Dreiecke**

2. Lösungsweg: Teildreiecke bezeichnen und zusammensetzen:



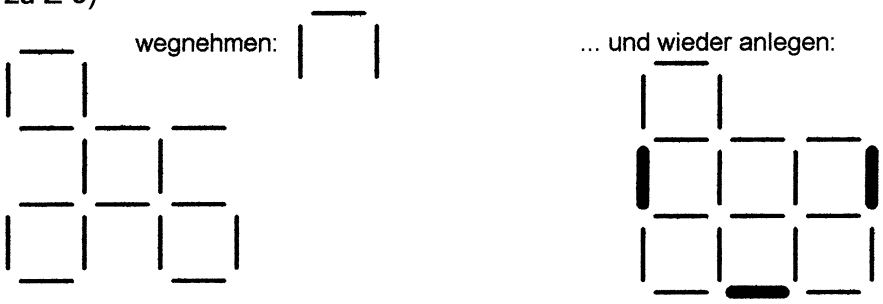
Grunddreiecke:	P bis Y	(10 Dreiecke)
aus 2 Grunddreiecken:	P+Q, P+S, Q+R, Q+T, U+V, U+X, V+W, W+X	(8 Dreiecke)
aus 3 Grunddreiecken:	P+Q+R, T+U+V	(2 Dreiecke)
aus 4 Grunddreiecken:	Q+T+U+V, S+T+U+V	(2 Dreiecke)
	gesamt:	**22 Dreiecke**

Man sollte (eventuell in Gruppenarbeit) nach beiden Wegen arbeiten lassen, um Kontrollmöglichkeiten für nicht gefundene Dreiecke zu schaffen.

zu Z 4)

1 Würfel in drei Schichten zerschneiden:	2 Schnitte
3 Schichten in je drei Stangen zerschneiden:	
2 Schnitte, je dreimal	6 Schnitte
9 Stangen in je drei Würfel zerschneiden:	
2 Schnitte, je 9 mal	18 Schnitte
gesamt:	**26 Schnitte**

zu Z 5)

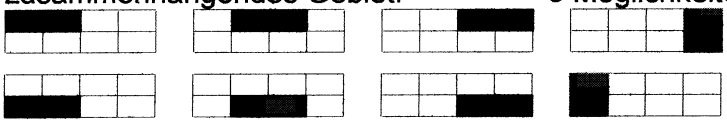


Es sind 7 gleich große Quadrate entstanden. Da die neue Figur auch 2 Zweierquadrate enthält, hat sie insgesamt 9 Quadrate, womit beide Teile der Aufgabe erfüllt sind.

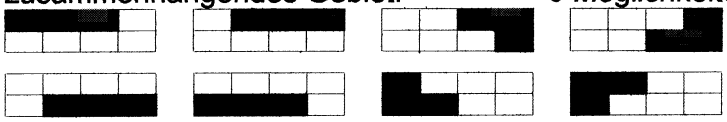
zu Z 6)

1 Marke abtrennen: 8 Möglichkeiten

2 zusammenhängende Marken abtrennen (und die restlichen 6 Marken bilden ein zusammenhängendes Gebiet: 8 Möglichkeiten



3 zusammenhängende Marken abtrennen (und die restlichen 5 Marken bilden ein zusammenhängendes Gebiet: 8 Möglichkeiten



In je zweimal 4 Marken trennen: 4 Möglichkeiten

Es gibt **28** Zerlegungen.

zu Z 7)

Die vierstellige Zahl erfüllt folgende Bedingungen:

1) Die Quersumme ist 26.
2) Das Produkt aller Ziffern ist gerade.
3) Aus den Ziffern dieser Zahl lassen sich 12 verschiedene Zahlen bilden.
4) Streicht man die erste Ziffer weg, so entsteht eine Primzahl.
5) Die 3. und 4. Ziffer sind gleich.

Für die Diskussion der Aufgabe ist es günstig, geeignete Bezeichnungen einzuführen. Vierstellige Zahlen bezeichnet man in Arbeitsgemeinschaften höherer Klassenstufen wie folgt:

$z = \overline{a\,b\,c\,d}$, wobei a, b, c und d für die verwendeten Ziffern stehen.

(Der Strich darüber ist nötig, um von der Schreibweise abcd = a·b·c·d zu unterscheiden.) Zuerst wird man feststellen, dass sich diese allgemeine Darstellung mit der 5. Bedingung konkretisieren lässt in

5) $z = \overline{a\,b\,c\,c}$.

Andere der Bedingungen lassen sich wie folgt ausdrücken:

4) $\overline{b\,c\,c}$ ist Primzahl.
1) a + b + c + c = 26
2) a·b·c·c ist eine gerade Zahl.

Aus 4) folgt **c ist ungerade.**
Aus 1) folgt **a + b ist gerade** (also beide gerade oder beide ungerade)
Aus 2) folgt **Mindestens eine der Zahlen a, b, c ist gerade.**
Also sind **a und b beide gerade** und **c ist ungerade**.
Die Ableitung dieser Feststellung bereitet trotz der übersichtlichen Aufbereitung den Schülern oft ungeahnte Schwierigkeiten. Gleiches gilt für die Begründungen der Schritte. Ein häufiger Fehler ist (auch noch in Klasse 7) übrigens die Begründung "c muss ungerade sein, weil (alle) Primzahlen ungerade sind". Die Primzahl 2 ist das Gegenbeispiel!
Bei Vorhandensein einer Primzahlentafel kann man jetzt nach allen dreistelligen Primzahlen der Form b c c suchen. Zum Festigen des systematischen Probierens ist es günstiger, alle Möglichkeiten der Ziffern zu erfassen. Als Ausgangspunkt dieser Betrachtungen eignet sich c (kommt zweimal vor).
Für c = 1 gilt (wegen der Quersumme 26) a + b = 24.
Dies ist wegen a, b < 10 unmöglich. c=3 ist gleichermaßen unmöglich. Zu untersuchen sind also noch die Fälle c=5, c=7 und c = 9. Findige Schüler merken vielleicht noch, dass c = 5 nicht gelten darf (bcc ist Primzahl).
Jetzt lohnt der Einsatz einer Tabelle:

c	a+b	abcd		bcd	Primzahl ?
5			unmöglich		
7	12	8477		477	
7	12	6677		677	
7	12	4877		877	
9	8	6299		299	
9	8	4499		499	
9	8	2699		699	

Die Untersuchung der möglichen Primzahlen sollte arbeitsteilig erfolgen.
699 und 477 sind durch 3 teilbar, und 299 ist durch 13 teilbar.
Übrig bleiben als Primzahlen 677, 877 und 499. Mögliche Lösungen sind also 6677, 4877 und 4499.
Die einzige bisher nicht verwendete Bedingung
"Aus den Ziffern dieser Zahl lassen sich 12 verschiedene Zahlen bilden" kann nun zur Probe herangezogen werden. Was besagt diese Bedingung überhaupt? Aus vorherigen Aufgaben dürfte den Schülern bekannt sein, dass sich 4 verschiedene Buchstaben a, b, c und d in 24 verschiedenen Reihenfolgen anordnen lassen: abcd, abdc, acbd, ... , dcba. Wenn nun d durch ein zweites c ersetzt wird, ist die Reihenfolge c...d von der Reihenfolge d...c nicht mehr zu unterscheiden. Also halbiert sich die Anzahl der möglichen

Anordnungen von 24 auf 12. Die Bedingung besagt also: Genau zwei der vier Ziffern sind gleich (und Bedingung 5 sagt uns, dass dies die beiden letzten sind). Die ersten beiden Ziffern dürfen dann nicht auch noch gleich sein, denn aus den Ziffern x, x, y, y lassen sich nur 6 verschiedene Zahlen bilden (xxyy, xyxy, xyyx, yxxy, yxyx, yyxx) ! Also sind 6677 und 4499 keine Lösungen. Wenn dies vorher erkannt wird, ersparen sich die Schüler viel Arbeit beim Primzahltest.
Die einzige Lösung ist **4877**.

zu Z 8)
Wenn man das Plakat wieder auseinanderfaltet, ist es aus (nicht 12, sondern) 20 quadratischen Teilflächen zusammengesetzt. (Mit 4 Faltungen bekommt man 5 Teile, mit 3 Faltungen 4 Teile). Dann besteht der Umfang aus $2 \cdot (4 + 5) = 18$ Quadratseitenlängen.
Ein Quadrat hat eine Länge von 378 cm : 18 = 21 cm. (Um die Division mit zweistelligen Zahlen zu umgehen, kann man auch den halben Umfang 189 cm durch 9 teilen.)
Das Plakat ist dann viermal so breit und fünfmal so lang.
Länge und Breite betragen also **84 cm** bzw. **105 cm**.

zu Z 9)
a) Von der 37 Bahnen fuhren 19 in die eine Richtung und dazwischen 18 in die Gegenrichtung. Zwischen der ersten und letzten Bahn liegen 18 Zeitabstände von je 8 Minuten. Das Fenster war 3 min + 18 · 8 min = 147 min geöffnet. Das sind 2 h 27 min.
b) Vor der allerersten Bahn kam 3 Minuten lang keine Bahn der Gegenrichtung. Also muss jede Bahn der Gegenrichtung in den ersten 5 Minuten des 8-Minuten-Zwischenraums kommen. Olafs Aussage ist (bei pünktlichem Fahrbetrieb) **falsch**.

zu Z 10)
a) Ein vierstufiger Turm besteht aus 1 + 9 + 25 + 49 = **84** Würfeln.
b) Da ein fünfstufiger Turm bereits 84 + 81 = 165 Würfel braucht und $84<147<165$ gilt, gibt es **keinen** solchen Turm.

c)

gefärbte Flächen	Anzahl Würfel
5	1
4	4
3	16
2	4
1	9
0	1
Probe: gesamt	35

d) Durch die Zerlegung entstehen aus den 3 Schichten 6 Halbschichten. Die Anzahl der ungefäbten Würfel der einzelnen Halbschichten ist (von oben nach unten) 0 + 0 + 4 + 16 + 36 + 0, insgesamt also **56.**

zu Z 11)

	x	y	z	3·x + 5·y - 2·z	3·x + (y-z)	3·x - (y-z)
a)	17	30	14	**173**	**67**	35
b)	**32**	50	21	304	**125**	67
c)	**6**	9	**1**	**61**	26	10
d)	5	**20**	**5**	105	30	**0**

a) und b) sind sicher einfach zu lösen.
Bei c) liegt der Schlüssel zur Lösung darin, dass 3·x genau in der Mitte zwischen 3·x + (y - z) und 3·x - (y - z) liegt. 3·x muss also 18 und damit x = 6 sein.
Bei d) ist 3·x = 15 . Das Ergebnis 30 der vorletzten Spalte kommt von 15 + 15, also gilt (y - z) = 15, und in die letzte Spalte kommt 15 - 15 = 0.
Man weiß zwar nun, dass (y - z) = 15 gilt, aber y und z selbst kann man in Klasse 4 nur durch systematisches Probieren (15 und 0, 16 und 1, 17 und 2 usw.) ermitteln, wobei man genau für **y = 20 und z = 5** im Term 3·x + 5·y - 2·z das geforderte Ergebnis 105 erhält.

zu Z 12)
1. Lösungsweg: Vollständige Fallunterscheidung der möglichen Sieger
Fall 1: Olaf gewinnt. Drei Tips waren falsch. (1., 2. und 3. Tip)
Fall 2: Sven gewinnt. Drei Tips waren falsch. (1., 2. und 3. Tip)
Fall 3: Paul gewinnt. Zwei Tips war falsch. (1. und 4. Tip)
Fall 4: Nico gewinnt. Nur ein Tip war falsch. (3. Tip)
Im 1. und 2. Fall ist die Bedingung "3 falsche Tips" erfüllt. **Sieger war Olaf oder Sven.**

2. Lösungsweg: Vollständige Fallunterscheidung der möglichen Wahrheitswerte
Fall 1: Nur die 1. Aussage ist wahr, der Rest falsch. Dann wäre auch die 3. Aussage wahr.
Fall 2: Nur 2. Aussage ist wahr, der Rest falsch. Da die 3. Aussage falsch sein soll, müssen die 1. und die 2. Aussage beide falsch oder beide wahr sein. Weil die 2. Aussage wahr ist, ist dann auch die 1. Aussage wahr.
Fall 3: Nur 3. Aussage ist wahr, der Rest falsch. Dann wäre aber auch die 1. oder 2. Aussage war.
Fall 4: Nur 4. Aussage ist wahr, der Rest falsch. Weil die 2. Aussage falsch ist, ist der Sieger weder Paul noch Nico, sondern Olaf oder Sven.
Da in den ersten drei Fällen nie 3 Aussagen falsch sind, kann nur der 4. Fall Lösungen liefern.
Probe: Bei diesen beiden möglichen Siegern ist tatsächlich nur eine Aussage wahr, und die ersten drei Aussagen sind falsch.