Klausur für den Auswahlwettbewerb des BK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 63. Mathematik-Olympiade

Klasse 9/10

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

Aufgabe 1: (6 Punkte)
Ermitteln Sie die größte ganze Zahl k, so dass die Zahl

$$p(n) = n^{12} - n^8 - n^4 + 1$$

für alle ungeraden natürlichen Zahlen n durch 2^k teilbar ist.

Aufgabe 2: (7 Punkte)
Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$. Es seien M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD}$ und E der Lotfußpunkt von B auf CM. Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AE}$ gleichlang sind.

Aufgabe 3: (7 Punkte)
Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl. Auf einigen der Gitterpunkte eines $(n \times n)$-Gitters aus Einheitsquadraten werden Spielsteine platziert.

a) Zeigen Sie, dass es eine Möglichkeit gibt, $2n - 1$ Spielsteine so zu platzieren, dass keine vier von ihnen die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.

b) Zeigen Sie, dass sich unter $2n$ platzierten Spielsteinen stets vier finden lassen, welche die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.

Anmerkung: Als Parallelogramme sind nur „echte“ Parallelogramme zugelassen. Vier Punkte, die auf einer Geraden liegen, gelten nicht als Parallelogramm.