Aufgabenserie für Klasse 9/10 zum Auswahlseminar des BK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 57. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 13. 1. 2018** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 40 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 4. 1. 2018** an

Dr. A. Schüler, Hauptmannstraße 3, 04109 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Beweisen Sie: Unter je fünf Punkten in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten gibt es stets zwei, deren Mittelpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Beweisen Sie, dass $p^{12} - 1$ für jede Primzahl $p \geq 7$ durch 360 teilbar ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Über zwei Kreise k_1 und k_2 und deren Mittelpunkte M_1 und M_2 wird vorausgesetzt, dass M_1 auf k_2 liegt und sich diese beiden Kreise in zwei Punkten schneiden. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht.

Aufgabe 4: (9 Punkte)

Bernd hat in seiner Sparbüchse Ein- und Zwei-Euro-Münzen (und keine anderen). Wenn er zwei davon zufällig herausnimmt, so hat er mit genau 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit exakt drei Euro herausgenommen. Von einer früheren Zählung her weiß er noch, dass er mindestens 170 Münzen in der Sparbüchse hat. Kann er sich mit dem Geld in der Sparbüchse seinen großen Wunsch, einen Computer für 289 Euro, kaufen?

Aufgabe 5: (11 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für ganze Zahlen $n > 1$ stets $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ gilt.

b) Es sei $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{2017^2}$ die Summe der Kehrwerte der ersten 2017 Quadratzahlen.

   Beweisen Sie, dass $S < 2$ gilt.

c) Die Zahlen $D_k = \frac{k\,(k+1)}{2}$ für $k \geq 1$, also $D_1 = 1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 6$, $D_4 = 10, \ldots$, bezeichnet man als *Dreieckszahlen.*

   Beweisen Sie, dass die Summe der Kehrwerte der ersten 2017 Dreieckszahlen ebenfalls kleiner als 2 ist.

Anmerkung: D_k ist gleich der Summe der ersten k natürlichen Zahlen. Dies entspricht der Anzahl der Kugeln in einer ebenen Anordnung als Dreieck, in der die erste Reihe eine Kugel, die zweite Reihe zwei Kugeln usw. enthält. Daher der Name *Dreieckszahlen.*

Legt man aus Kugeln auf ähnliche Weise Quadrate, so ergibt sich eine Summenformel für die der ersten k ungeraden Zahlen. Das Ergebnis sind die (auch im herkömmlichen Verständnis) *Quadratzahlen.*

Hinweis zu c): Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3, 4$ die Summen $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, stellen Sie eine Vermutung auf für allgemeines n auf und beweisen Sie diese.