Aufgabenserie für Klasse 11/12
zum Auswahlseminar des BK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 57. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler stehen für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) maximal 22 Plätze zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 13. 1. 2018** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Es können 40 Punkte erreicht werden. Lösungen können Sie **bis zum 4. 1. 2018** an

Prof. B. Kirchheim, Alfred-Kästner-Straße 88, 04275 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars mit Musterlösungen versehen zurückgegeben.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgaben

Aufgabe 1: (8 Punkte)

Gegeben sind im dreidimensionalen Raum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d. h. je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.

Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass $p^{12} - 1$ für jede Primzahl $p \geq 11$ durch 2520 teilbar ist.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge (über den reellen Zahlen) des folgenden Systems aus 2017 Gleichungen.

$$\begin{aligned}
x_1\, x_2\, x_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
x_2\, x_3\, x_4 &= x_2 + x_3 + x_4 \\
x_3\, x_4\, x_5 &= x_3 + x_4 + x_5 \\
&\dots \\
x_{2015} x_{2016} x_{2017} &= x_{2015} + x_{2016} + x_{2017} \\
x_{2016} x_{2017} x_1 &= x_{2016} + x_{2017} + x_1 \\
x_{2017} x_1\, x_2 &= x_{2017} + x_1 + x_2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (9 Punkte)

Bernd hat in seiner Sparbüchse Ein- und Zwei-Euro-Münzen (und keine anderen). Wenn er zwei davon zufällig herausnimmt, so hat er mit genau 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit exakt drei Euro herausgenommen. Von einer früheren Zählung her weiß er noch, dass er mindestens 170 Münzen in der Sparbüchse hat. Kann er sich mit dem Geld in der Sparbüchse seinen großen Wunsch, einen Computer für 289 Euro, kaufen?

Aufgabe 5: (11 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass für jedes reelle $q \neq 1$ und $n \geq 1$ natürlich gilt

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

b) Professor K's Schreibmaschine ist defekt, die Ziffer 9 kann nicht mehr getippt werden. Zeigen Sie, dass die Summe (einer beliebigen endlichen Menge) aller Kehrwerte, der Zahlen, die Professor K (ohne Wiederholung!) tippen kann, kleiner als 80 ist.

c) Doktor L benutzt einen modernen Laserdrucker und studiert Summen der Form

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{l}, \qquad \text{wobei } 1 \leq k < l \text{ natürliche Zahlen sind.}$$

Beweisen Sie, dass keine dieser Summen eine ganze Zahl sein kann.