Aufgabenserie für Klasse 9/10 zum Auswahlseminar des BK Leipzig zur Qualifikation für die Teilnahme an der 3. Stufe der 55. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden. Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des Auswahlseminars am 16.1.2016 geschrieben wird. Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 9. 1. 2016** an

Prof. Dr. K.-D. Kürsten, Am Gutspark 16, 04316 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

> Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Von einem Dreieck ABC seien die Längen a und b zweier Seiten und die Länge w der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.

Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Man weise nach, dass für reelle Zahlen a, b und c stets gilt

$$\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq 2 \cdot \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Man weise nach, dass $p^6 - 1$ für jede Primzahl p größer als 3 durch 72 teilbar ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Summe von fünf aufeinanderfolgenden Quadratzahlen keine Quadratzahl sein kann.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Tausend rationale Zahlen x_1, x_2, ..., x_{1000} seien durch die Festsetzung bestimmt, dass

$$x_1 = 3$$

ist und dass für alle $n = 1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$$

gelten soll.

Beweisen Sie, dass (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n = 1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung

$$x_n > 2$$

gilt.

Aufgabe 6: (10 Punkte)

Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm und $r_4 = 1$ cm mögen so in einer Ebene E_1 liegen, dass sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren. Außerdem berühre k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und habe mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.

Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4. Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen. Ferner seien die Maße $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 3$ cm, $h_3 = 2$ cm gegeben.

a) (5 Punkte) Wie groß sind die Abstände der Punkte M_1 bis M_4 zum Schnittpunkt P der Geraden durch M_2 und M_3 mit der Geraden durch M_1 und M_4?

b) (5 Punkte) Wie groß ist h_4, wenn S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen?