

**Aufgabenserie für Klasse 9/10  
zum Auswahlseminar des BK Leipzig  
zur Qualifikation für die Teilnahme  
an der 3. Stufe der 54. Mathematikolympiade**

### Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9–12 sachenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie der Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 17. 1. 2015** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf die Klausur schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2015** an

**Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig**

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und die Aufgaben während des Auswahlseminars besprochen.

### Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

#### **Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Verbindet man alle Eckpunkte eines ebenen  $n$ -Ecks  $A_1A_2 \dots A_n$  ( $n > 2$ ) mit einem Punkt  $S$  außerhalb der Ebene des  $n$ -Ecks, so erhält man eine  $n$ -seitige Pyramide. Die  $2n$  Kanten einer solchen Pyramide werden mit den Zahlen  $1, 2, \dots, 2n$  beschriftet, wobei jede der  $2n$  Zahlen genau einmal verwendet wird. Unter der Kantensumme  $K$  einer Fläche  $A$  versteht man die Summe der Zahlen, mit denen die Kanten der Fläche  $A$  beschriftet sind.

- a) Beweisen Sie, dass es für kein  $n > 2$  eine Beschriftung der  $n$ -seitigen Pyramide derart gibt, dass die Kantensumme aller Seitenfläche und die Kantensumme der Grundfläche paarweise übereinstimmen, d.h. dass für kein  $n > 2$  die folgende Gleichung erfüllt wird:

$$K(A_1A_2 \dots A_n) = K(A_1A_2S) = K(A_2A_3S) = \dots = K(A_nA_1S).$$

- b) Untersuchen Sie, ob die Aussage (a) auch dann gilt, wenn nur gefordert wird, dass die Kantensummen aller Seitenflächen übereinstimmen sollen, dass also

$$K(A_1A_2S) = K(A_2A_3S) = \dots = K(A_nA_1S)$$

gilt.

**Aufgabe 2:** (7 Punkte)

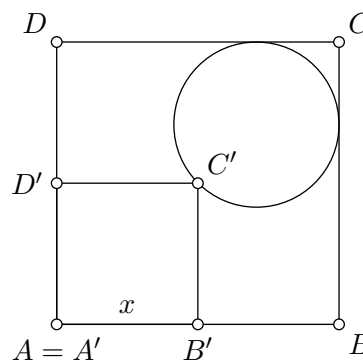
Bestimmen Sie alle Paare  $(n, k)$  natürlicher Zahlen ( $k, n > 0$ ), für welche die Gleichung

$$(n + 1)^k - 1 = n!$$

erfüllt ist.

**Aufgabe 3:** (7 Punkte)

Gegeben sei ein Quadrat  $ABCD$  mit der Seitenlänge 1. Im Innern dieses Quadrates werden ein Quadrat  $A'B'C'D'$  mit der Seitenlänge  $x$  sowie ein Kreis so eingezeichnet, dass  $A$  und  $A'$  zusammenfallen,  $B'$  auf der Seite  $\overline{AB}$ ,  $D'$  auf der Seite  $\overline{AD}$  und  $C'$  im Innern von  $ABCD$  liegt sowie der Kreis die Seiten  $\overline{BC}$  und  $\overline{CD}$  berührt und durch den Eckpunkt  $D'$  geht (s. Skizze).



Untersuchen Sie, ob bei geeigneter Wahl von  $|A'B'| = x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  die Summe der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrates  $A'B'C'D'$  einen minimalen Wert annimmt und geben Sie gegebenenfalls diesen Wert  $x$  und den minimalen Flächeninhalt an.

**Aufgabe 4:** (7 Punkte)

Über zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$  und deren Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  wird vorausgesetzt, dass  $M_1$  auf  $k_2$  liegt und sich diese beiden Kreise in zwei Punkten schneiden. Ferner sei der Schnittpunkt von  $k_1$  mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt  $M_1$  hat und durch  $M_2$  geht,  $S$  genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit diesen Kreisen hat, seien  $P_1$  und  $P_2$  genannt.

Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets  $P_2S$  auf  $M_1S$  senkrecht steht.

**Aufgabe 5:** (7 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass man unter neun aufeinanderfolgenden, rot bzw. blau gefärbten Zahlen stets 3 gleichfarbige finden kann, die eine arithmetische Folge bilden.
- b) Untersuchen Sie, ob die Aussage auch für acht aufeinanderfolgende Zahlen richtig ist.

*Hinweis:* Drei Zahlen  $a, b$  und  $c$  bilden eine arithmetische Folge, wenn es eine Zahl  $d$  gibt, so dass  $b - a = c - b = d$  gilt.