Aufgabenserie für Klasse 11/12
zum Auswahlseminar des BOK Leipzig
zur Qualifikation für die Teilnahme
an der 3. Stufe der 53. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Dem Bezirkskomitee Leipzig zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler steht für die in den Klassenstufen 9 – 12 sachsenweit zentral ausgerichtete 3. Stufe der Mathematikolympiade (MO) eine beschränkte Anzahl von Plätzen zur Verfügung. Die Entscheidung über die Zusammensetzung der Leipziger Mannschaft fällt auf einem Auswahlseminar auf der Basis der Ergebnisse der 2. Stufe sowie einer Auswahlklausur. Neben der weiteren Qualifizierung unserer Kandidaten soll damit auch die Vergleichbarkeit und Transparenz im Auswahlverfahren verbessert werden.

Sie haben sich durch Ihren Erfolg bei der zweiten Stufe der MO für diese Auswahlklausur qualifiziert, die während des **Auswahlseminars am 18. 1. 2014** geschrieben wird.

Zur Vorbereitung auf das Seminar schicken wir Ihnen heute zusammen mit der Einladung zum Auswahlseminar eine Hausaufgabenserie. Lösungen können Sie **bis zum 10. 1. 2014** an

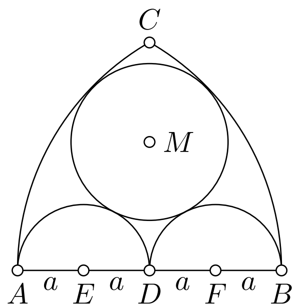
Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Die Lösungen werden korrigiert und während des Auswahlseminars besprochen.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)



Im nebenstehenden Bild mögen sich die Kreise um A bzw. um B mit dem Radius $|AB| = 4\,a$ im Punkt C schneiden. Es sei D der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und k_3 und k_4 die Halbkreise über den Durchmessern $\overline{AD}$ bzw. $\overline{DB}$, die in derselben Halbebene liegen wie C. Schließlich sei k_5 der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, der k_1 und k_2 von innnen und k_3 und k_4 von außen berührt.

Berechnen Sie r in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die die beiden Gleichungen $x^2 + a\,x + 1 = 0$ und $x^2 + x + a = 0$ wenigstens eine gemeinsame reelle Lösung haben.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Von einer dreiseitigen Pyramide sei bekannt, dass die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a ist, dass die Seitenflächen gleichschenklige Dreiecke mit gleichen Schenkellängen s sind und dass die Höhe h der Pyramide gleich dem arithmetischen Mittel aus a und s ist.

Man untersuche, welche Werte dabei das Verhältnis $v = s : a$ annehmen kann.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Ermitteln Sie alle Tripel (a, b, c) reeller Zahlen, welche der folgenden Bedingung genügen:

Die durch $p(x) = x^3 - a\,x^2 + b\,x - c$ definierte Funktion p hat die Nullstellen $p(a) = 0$, $p(b) = 0$ und $p(c) = 0$.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Vom Polynom

$$p(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass für vier verschiedene ganzzahlige x der Wert $p(x) = 7$ angenommen wird.

Man beweise, dass dann für alle ganzzahliges x gilt $p(x) \neq 14$.

Aufgabe 7: (7 Punkte)

a) Finden Sie alle dreistelligen Zahlen mit Quersumme 21, die ein Vielfaches von 21 sind. (2 Punkte)

b) Finden Sie die kleinste Zahl mit Quersumme 119, die ein Vielfaches von 119 ist.

Forschungsauftrag: Finden Sie die kleinste Zahl mit Quersumme 2014, die ein Vielfaches von 2014 ist.