Aufgabenserie für Klasse 11/12 des BOK Leipzig zur Vorbereitung auf die Teilnahme an der 3. Stufe der 50. Mathematikolympiade

Vorbemerkungen

Sie haben sich für die dritte Stufe der 50. Mathematikolympiade qualifiziert. Leider können wir in diesem Schuljahr aus finanziellen Gründen kein Auswahlseminar anbieten. Es besteht jedoch die Möglichkeit, vom 19. bis 24. 2. 2011 an der LSGM-Winterschule in Grimma teilzunehmen, um sich intensiver auf die Landesrunde vorzubereiten. Dazu liegt diesem Schreiben eine Einladung bei.

Außerdem haben wir einige Aufgaben zur Vorbereitung auf die Landesrunde zusammengestellt. Die angegebene Punktzahl entspricht dem Schwierigkeitsgrad der Aufgabe. Sie können Ihre Lösungen **bis zum 20. 1. 2011** an

Prof. H.-G. Gräbe, Herwigstraße 30, 04279 Leipzig

schicken. Wir korrigieren diese und schicken sie zusammen mit Musterlösungen zurück.

Die Aufgaben

Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen ist deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzustellen. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es, sie als bekannten Sachverhalt ohne Beweisangabe anzuführen.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Wie viele geordnete Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen gibt es mit $0 < a < 2011,\ 0 < b < 2011$ und

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}\,? \tag{1}$$

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots11}_{2\,n} - \underbrace{222\ldots22}_{n}} = \underbrace{333\ldots33}_{n}$$

für natürliche Zahlen $n > 0$, wobei die Zahl unter der geschweiften Klammer jeweils die Anzahl der Ziffern der jeweiligen Zahl über der Klammer angibt.

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Von einem Dreieck ABC sind die Längen der Höhen h_a durch A, h_b durch B sowie die Länge s_a der Seitenhalbierenden durch A gegeben.

a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal.

   Geben Sie dazu eine Beschreibung, wie das Dreieck schrittweise konstruiert werden kann, und führen Sie die Konstruktion entsprechend Ihrer Beschreibung für die Streckenlängen $h_a = 5\,\text{cm}$, $h_b = 6\,\text{cm}$, $s_a = 7\,\text{cm}$ aus.

b) Zeigen Sie, dass im so konstruierten Dreieck die entsprechenden Transversalen auch wirklich die vorgegebenen Längen haben. (Korrektheitsnachweis)

c) Untersuchen Sie, ob es weitere Dreiecke gibt, in denen die entsprechenden Transversalen die vorgegebenen Längen haben. (Vollständigkeits- bzw. Einzigkeitsnachweis)

d) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen an die gegebenen Streckenlängen ein solches Dreieck ABC überhaupt existiert. (Bestimmung der Ausführbarkeit der Konstruktion – Determination)

Aufgabe 4: (7 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es nicht triviale Pythagoräische Tripel $(a; b; c)$ und $(b; c; d)$ gibt, d. h. positive ganze Zahlen a, b, c, d, für die $a^2 + b^2 = c^2$ und $b^2 + c^2 = d^2$ gilt.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

$ABCD$ sei eine dreiseitige Pyramide (Tetraeder), in der die Seitenflächen ABD, ACD und BCD jeweils rechtwinklige Dreiecke mit rechten Winkel bei D sind.

Wir betrachten die Menge aller solchen Tetraeder mit gleichem Volumen V.

Untersuchen Sie, ob es unter diesen Tetraedern eines mit kleinster Kantensumme u gibt und bestimmen Sie u gegebenenfalls in Abhängigkeit von V.