Summen von Quadratzahlen

12. September 2007

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Universität Leipzig

	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
4		8	13	20	29	40	53	68	85	104
9			18	25	34	45	58	73	90	109
16				32	41	52	65	80	97	116
25					50	61	74	89	106	125
36						72	85	100	117	136
49							98	113	130	149
64								128	145	164
81									162	181
100										200

M die Menge der Zahlen, die Summe von zwei Quadratzahlen sind.

$$M = \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrr} 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 8, & 9, & 10, & 13, \\ 16, & 17, & 18, & 20, & 25, & 26, & 29, & 32, & 34, \\ 36, & 37, & 40, & 41, & 45, & 49, & 50, & 52, & 53, \\ 58, & 61, & 64, & 65, & 68, & 72, & 73, & 74, & 80, \\ 81, & 82, & 85, & 89, & 90, & 97, & 98, & 100, & 101, \\ 104, & 106, & 109, & 113, & 116, & 117, & 121, & 122, & 125, \\ 128, & 130, & 136, & 137, & 145, & 146, & 149, & 157, & 162, \\ 164, & 169, & 170, & 173, & 178, & 181, & 185, & 194, & 196, \\ 197, & 200, & \ldots & & & & & & \end{array} \right\}$$

Primzahlen

in M: $2, 5, 13, 17, 29, 41, 37, 53, 61, 73, 89, 97, \ldots$

nicht in M: $3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, 59, 71, 79, 83, 87, \ldots$

Zweiquadratesatz (Fermat 1659): Eine ungerade Primzahl liegt in M genau dann, wenn sie den Rest 1 modulo 4 hat.

Beweis der Notwendigkeit

$n \mod 4$	0	1	2	3
$n^2 \mod 4$	0	1	0	1

Daher kann $n^2 + m^2$ die Werte

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 2 \mod 4$$

annehmen.

Eulers Produktformeln

$$\boxed{(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bd)^2}$$

Beispiel:

$$(3^2+2^2)(5^2+1^2) = (9+4)(1+25) = 13 \cdot 26 = 338$$
$$(3 \cdot 5 - 2 \cdot 1)^2 + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 5)^2 = 13^2 + 13^2 = 169 + 169 = 338$$

Folgerung: Die Menge der Zahlen, die Summe von zwei Quadraten sind, ist unter Mulitiplikation abgeschlossen.

Zweiquadratesatz - der allgemeine Fall

Sei $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ die Primfaktorzerlegung.

Satz: n liegt in M genau dann, wenn k_i gerade ist für $p_i = 3 \mod 4$.

Vierquadratesatz

7 ist nicht Summe von drei Quadratzahlen. Aber:

Vierquadratesatz (Lagrange 1770): Jede natürlich Zahl lässt sich als Summe von höchstens vier Quadratzahlen schreiben.

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1 \qquad 27 = 16 + 9 + 1 + 1$$

Beweisidee:

- Produktformel für Summen von vier Quadraten
- Für Primzahlen ist die Aussage wahr modulo 8.

Literatur: W. Scharlau, H. Opolka, Von Fermat bis Minkowski, Springer Verlag 1980.

Die Anzahlformel

$$50 = 49 + 1 = 25 + 25 = 25 + 16 + 9 = \ldots$$

Für $n > 1$ sei $r(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von vier Quadraten zu schreiben.

Beispiel: $r(1) = 8$, $r(2) = 24$

Der Satz von Jacobi (1828):

$$r(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \nmid d} d$$

Die rechte Seite ist positiv, also gilt der Vierquadratesatz!

Jacobis Beweisidee

$$\vartheta(q) := \sum_{m\in\mathbf{Z}} q^{m^2} = 1 + 2q^1 + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

Dann ist

$$\vartheta(q)^4 = \sum_{n\geq 0} r(n) q^n$$

Für $q = \mathrm{e}^{\pi i z}$, $z \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Im} z > 0$ ist $\vartheta(z)$ differenzierbar.

$$g_2^*(q) := 1 - 24 \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{d|n} d \right) q^{2n}$$

$$\boxed{\textbf{Beh:} \qquad \vartheta(z)^4 = \frac{1}{3}\left(4g_2^*(2z) - g_2^*(\tfrac{z}{2})\right)}$$

Das moderne Argument: Modulformen

Es gilt

$$\vartheta^4(z+2) = \vartheta^4(z) \qquad \vartheta^4(-z^{-1}) = -z^2\vartheta^4(z)$$

D.h. ϑ^4 ist eine **Modulform** vom Gewicht 2.

$$g_2^*(z+1) = g_2^*(z) \qquad g_2^*(-z^{-1}) = z^2 g_2^*(z)$$

D.h. $\frac{1}{3}\left(4g_2^*(2z) - g_2^*(\frac{z}{2})\right)$ ist Modulform wie ϑ^4.

Zwei Modulformen dieses Typs sind gleich, wenn die Koeffizienten von q^0, q^1, q^2 übereinstimmen.

Literatur: M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer Verlag 1998; Kapitel III §7 7.*