Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats *Februar 2020:*
a)

$$9 \cdot 10 = 90 = 2 \cdot 45$$
$$12 \cdot 13 = 156 = 2 \cdot 78$$
$$5 \cdot 5 = 30 = 2 \cdot 15$$
$$24 \cdot 25 = 600 = 2 \cdot 300$$
$$20 \cdot 21 = 420 = 2 \cdot 210$$
$$33 \cdot 34 = 1122 = 2 \cdot 561$$

Für zwei beliebige Zahlen n und $n+1$, muss immer entweder n oder $n+1$ gerade sein. Wenn man eine gerade Zahl $a = 2x$ mit irgendeiner anderen Zahl b multipliziert, erhält man immer eine gerade Zahl: $a \cdot b = 2x \cdot b = 2 \cdot (xb)$.
b)

1	2	3	4
10	11	12	13
33	34	35	36

In jeder Reihe gibt es zwei Zahlen, die durch zwei teilbar sind und eine Zahl, die durch vier teilbar ist. Daraus schließen wir, dass jede vierte Zahl durch vier teilbar ist, oder anders gesagt: Jede zweite *gerade* Zahl ist durch vier teilbar. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden Zahlen $n + (n+1) + (n+2) + (n+3) = 4n + 6$ ist immer eine gerade Zahl.
Wir betrachten das Produkt $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$. Entweder ist die Zahl n gerade, dann ist auch das Produkt $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ gerade. Wenn n ungerade ist, bedeutet das, dass $n-1$ und $n+1$ gerade sein müssen. Also ist auch das Produkt wieder gerade. Jede dritte Zahl ist durch drei teilbar, also ist eine der drei Zahlen $n-1, n$ oder $n+1$ durch drei teilbar und deswegen ist auch $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ durch drei teilbar.
c) Da p eine Primzahl ist, muss p ungerade sein, also sind $p-1$ und $p+2$ gerade Zahlen. In Aufgabenteil b) haben wir gesehen, dass jede zweite gerade Zahl durch vier teilbar ist. Also ist entweder $p-1$ oder $p+1$ durch vier teilbar. Die andere Zahl ist durch zwei teilbar. Also zum Beispiel $p-1 = 4x$ und $p+1 = 2y$. Dann ist $(p-1)(p+1) = 4x \cdot 2y = 8xy$, also ist $(p-1)(p+1)$ durch 8 teilbar.
Jede dritte Zahl ist durch drei teilbar, also ist eine der Zahlen $p-1, p$ oder $p+1$ durch drei teilbar. Da p aber eine Primzahl ist, muss es $p-1$ oder $p+1$ sein. Also ist auch $(p-1)(p+1)$ durch drei teilbar.
Warum ist $p \cdot p - 1$ durch 24 teilbar?
Es gilt $(p-1)(p+1) = p \cdot p + p - p - 1 = p \cdot p - 1$. Wir wissen nun schon, dass $(p-1)(p+1)$ durch drei teilbar ist, also $(p-1)(p+1) = 3x$. Außerdem ist $(p-1)(p+1)$ auch durch acht teilbar, also muss x durch acht teilbar sein.

$$(p-1)(p+1) = 3x = 3 \cdot (8 \cdot y) = 24y$$