Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats *Oktober 2017*:
Für Pfennig wird als Abkürzung *Pf* und für Taler *Tl* geschrieben.

a) Drei mögliche Werte sind $2, 4$ und 6: Das herausgegebene Geld sind

	1 Pf	2 Pf	3 Pf	4 Pf	5 Pf	6 Pf
Münzen bei 2 Pf pro Tl	1	2				
Münzen bei 4 Pf pro Tl	1	2	$1+2$	4		
Münzen bei 6 Pf pro Tl	1	2	3	$1+3$	$2+3$	6

b) Für die Anzahl der Pfennige in einem Taler schreiben wir A. Es sind also A Pfennige ein Taler. Es müssen also alle Zahlen von 1 bis A aus höchstens zwei verschiedenen Teilern von A zusammengesetzt sein, unter anderem auch die Zahl $A-1$ (siehe Hinweis). Der größte echte Teiler von A ist höchstens $\frac{A}{2}$, der zweitgrößte höchstens $\frac{A}{3}$. Ist die Zahl A nicht durch 2 und 3 teilbar, sind die größten echten Teiler sogar noch kleiner. Die größte Zahl, die sich aus höchstens zwei verschienden Teilern von A zusammensetzen lässt, ist also kleiner oder gleich

$$\frac{A}{2}+\frac{A}{3}=\frac{3A+2A}{6}=\frac{5}{6}A.$$

Diese Zahl muss aber mindestens so groß wie $A-1$ sein, ansonsten kann man $A-1$ nicht wie gewünscht zusammensetzen. Es gilt also

$$A-1\leq\frac{5}{6}A.$$

Zieht man nun $\frac{5}{6}A$ von beiden Seiten ab, erhält man

$$\frac{1}{6}A-1\leq 0,$$

addiert man 1 auf beiden Seiten, erhält man

$$\frac{1}{6}A\leq 1,$$

und multipliziert man zum Schluss mit 6, erhält man die Gleichung

$$A\leq 6.$$

Das zeigt also, dass der Wert eines Talers in Pfennigen unter Berücksichtigung der Wünsche des Sultans kleiner also 7 sein muss.

c) Gäbe es eine ungerade solche Zahl A, so könnte man aus ihren Teilern auch die Zahl 2 zusammensetzen, da die einzige ungerade Zahl kleiner als 2 die 1 ist. Diese ist aber ausgeschlossen, da ein Taler und ein Pfennig nicht gleich viel wert sein sollen. Da A aber ungerade ist, ist 2 kein Teiler von A und so müsste man 2 aus kleineren Zahlen zusammensetzen. Die einzige kleinere Zahl ist aber 1 und diese müsste man zu sich selbst addieren, um 2 zu erhalten. Es darf aber jeder Teiler nur einmal vorkommen. Also gibt es keine ungeraden solchen Zahlen.