

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats April 2013:

a) Bei Emelie waren 43 Ostereier versteckt. (Da die Anzahl die Summe von fünf verschiedenen Primzahlen ist und selbst eine Primzahl ist (also insbesondere nicht gerade sein kann), ist sie Summe von fünf verschiedenen ungeraden Primzahlen. Die kleinste Zahl die Summe von fünf derartigen Primzahlen ist, ist $3+5+7+11+13 = 39$. Weiterhin ist die Zahl Summe von zwei Primzahlen, wobei eine Primzahl 2 sein muss, da die Summe sonst gerade ist. Also ist die gesuchte Zahl mindestens 39, eine Primzahl kleiner als 50 und die Zahl zwei kleiner ist ebenfalls prim. Dafür kommt nur die 43 in Frage.) Es gilt $43 : 2 = 21 + \frac{1}{2}$, $43 : 3 = 14 + \frac{1}{3}$, $43 : 5 = 8 + \frac{3}{5}$ und $43 : 7 = 6 + \frac{1}{7}$. Also ist 43 durch keine der Zahlen teilbar. Mögliche Zerlegungen in solche Summen sind zum Beispiel: $43 = 41 + 2$, $43 = 3 + 11 + 29$, $43 = 2 + 3 + 7 + 31$ und $43 = 3 + 5 + 7 + 11 + 17$.

b) Zunächst kann die Anzahl der Ostereier nicht 10 oder 49 sein, da die kleinere Hausnummer zweistellig ist und die 49 im Aufgabentext ausgeschlossen wird. Demnach ist die Hausnummer genau eins kleiner als die Anzahl der Ostereier und das Doppelte des Produkts der Ziffern genau um eins größer als die Anzahl. Sei die Hausnummer von der Form $10a + b$ mit den Ziffern a und b , so ist das Doppelte des Produkts der Ziffern genau $2ab$ und es müsste $10a + b = 2ab - 2$ gelten.

1.Fall: $a = 1$. Dann ist $10 + b = 2b - 2$, also $b = 12$. Da b eine Ziffer ist, entsteht ein Widerspruch.

2.Fall: $a = 2$. Dann ist $20 + b = 4b - 2$, also $b = \frac{22}{3}$. b ist aber eine natürliche Zahl.

3.Fall: $a = 3$. Dann ist $30 + b = 6b - 2$, also $b = \frac{32}{5}$. b ist aber eine natürliche Zahl.

4.Fall: $a = 4$. Dann ist $40 + b = 8b - 2$, also $b = \frac{42}{7} = 6$. Die Hausnummer ist demnach 46.

Somit ist die Anzahl der Ostereier bei Robert genau 47.

Alternativ kann man natürlich auch die 40 Zahlen einzeln untersuchen.

c) Wäre die Quersumme von Saskias Anzahl eine Primzahl, so würde sie nach Aufgabenstellung das Produkt der beiden Ziffern teilen. Dann wäre die Primzahl aber Teiler von einer der beiden Ziffern. Somit wäre diese Ziffer mindestens so groß wie die Primzahl, da sie ein Vielfaches ist. Da keine der Ziffern 0 ist, ergibt sich, dass die Quersumme größer als sie selbst sein müsste. Dies ist ein Widerspruch.

Die gesuchte Anzahl der Ostereier ist 36.

(Man kann beide Fragen in diesem Aufgabenabschnitt durch Untersuchen aller möglichen Zahlen lösen. Bei der Suche nach der Anzahl lohnt es sich eine Fallunterscheidung nach den möglichen Quersummen zu machen. Ähnlich wie oben kann man auch zeigen, dass die Quersumme kein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlen sein darf. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Fälle.)