

Die LSGM - Aufgabe des Monats

Lösung des Monats Juni 2010:

a) Die Länge des Rechtecks sei a , die Breite des Rechtecks b und die Breite des Weges c . Demnach ist $a = 90 \text{ dm} = 9 \text{ m}$ und $b = \frac{45 \text{ m}^2}{9 \text{ m}} = 5 \text{ m}$.

Der Flächeninhalt des Weges A_W lässt sich als Flächeninhalt des großen Rechtecks A_R (Schulgarten und Weg) minus den Flächeninhalt des Schulgartens A_S bestimmen. Das große Rechteck besitzt die Seitenlängen $a + 2c$ und $b + 2c$ und damit den Flächeninhalt $A_R = (a + 2c) \cdot (b + 2c) = a \cdot b + a \cdot 2c + 2c \cdot b + 4c^2$. Der Flächeninhalt des Schulgartens ist $A_S = a \cdot b$.

Demnach gilt $A_W = A_R - A_S = 2c \cdot a + 2c \cdot b + 4c^2$.

Einsetzen der Variablen ergibt mit $c = 0,9 \text{ m}$: $A_W = 2 \cdot 0,9 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} + 2 \cdot 0,9 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot (0,9 \text{ m})^2 = 16,2 \text{ m}^2 + 9 \text{ m}^2 + 3,24 \text{ m}^2 = 28,44 \text{ m}^2$.

Der Flächeninhalt des Weges steigt bei einer Vergrößerung von c an, sodass größere Wegbreiten größere Wegflächen ergeben und kleinere Wegbreiten kleinere Wegflächen. Der Wert von c für einen Flächeninhalt von $35,64 \text{ m}^2$ kann demnach durch Probieren eindeutig ermittelt werden.

Bei $c = 1,1 \text{ m}$ erhält man $A_W = 2 \cdot 1,1 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} + 2 \cdot 1,1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot (1,1 \text{ m})^2 = 19,8 \text{ m}^2 + 11 \text{ m}^2 + 4,84 \text{ m}^2 = 35,64 \text{ m}^2$.

b) Man berechne nun zunächst den Flächeninhalt des Weges:

$$A_W = 2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 9 \text{ m} + 2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 5 \text{ m} + 4 \cdot (1 \text{ m})^2 = 18 \text{ m}^2 + 10 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 32 \text{ m}^2.$$

Nun stellt sich die Frage, ob es billiger ist die Fläche mit kleinen Steinen oder mit großen Steinen auszulegen. Die kleinen Steine besitzen eine Fläche von $20 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,02 \text{ m}^2$. Man benötigt demnach $\frac{1 \text{ m}^2}{0,02 \text{ m}^2} = 50$ Steine um eine Fläche von einem Quadratmeter zu belegen. Dies kostet dann $50 \cdot 0,45 \text{ €} = 22,5 \text{ €}$. Die großen Steine haben eine Fläche von $30 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 0,3 \text{ m} \cdot 0,2 \text{ m} = 0,06 \text{ m}^2$, sodass man $\frac{1 \text{ m}^2}{0,06 \text{ m}^2} \approx 17$ Stück (aufgerundet) für eine Fläche von einem Quadratmeter benötigt, welche dann $17 \cdot 1 \text{ €} = 17 \text{ €}$ kosten würden.

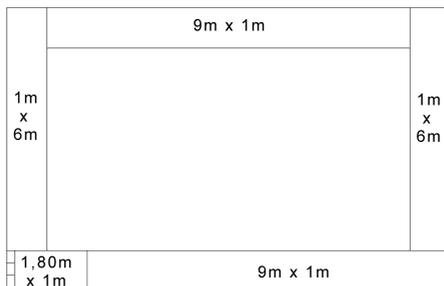
Demnach erhält man den geringsten Preis, wenn man einen möglichst großen Anteil der Fläche mit großen Steinen belegt.

Für die Wegfläche benötigt man $\frac{32 \text{ m}^2}{0,06 \text{ m}^2} = \frac{1600}{3} \approx 533,3$ große Steine. Diese Anzahl ist nicht ganzzahlig. Demnach ist eine Pflasterung nur mit großen Steinen nicht möglich.

Wenn ein kleiner Stein verwendet wird, so ist die restliche Fläche $32 \text{ m}^2 - 0,02 \text{ m}^2 = 31,98 \text{ m}^2$. Diese Fläche lässt sich nun mit großen Steinen auslegen, denn $\frac{31,98 \text{ m}^2}{0,06 \text{ m}^2} = 533$.

Somit müssen 533 große Steine und ein kleiner Stein gekauft werden.
 Der Gesamtpreis ist dann $1 \cdot 0,45 \text{ €} + 533 \cdot 1 \text{ €} = 533,45 \text{ €}$.

Ein Nachweis, dass die Fläche tatsächlich mit diesen Steinen belegt werden kann, war nicht gefordert. Dieser ist am einfachsten durch Zerlegung der Wegfläche in Rechtecke möglich, bei denen die Seitenlängen durch die jeweilige Seitenlänge der Pflastersteine teilbar ist (d.h. der Quotient eine ganze Zahl ist), da man dann die Steine in Reihen in das Rechteck legen kann (siehe folgende Skizze).



c) Es gilt $A_W = 2c \cdot a + 2c \cdot b + 4c^2 = (2a + 2b) \cdot c + 4c^2 = u \cdot c + 4c^2$, wobei u den Umfang des Schulgartens bezeichne. Demnach ist $u \cdot c = A_W - 4c^2$ und damit $u = \frac{A_W - 4c^2}{c} = \frac{32m^2 - 4m^2}{1m} = 28m$ der Umfang des Schulgartens.

Im Folgenden sind verschiedene Maße des Schulgartens dargestellt, welche diesen Umfang ergeben:

a (in m)	b (in m)	u (in m)	$A_S = a \cdot b$ (in m^2)
1	13	28	13
3	11	28	33
5	9	28	45
6	8	28	48
7	7	28	49
8	6	28	48
9	5	28	45
11	3	28	33
13	1	28	13

Die Maße für den maximalen Flächeninhalt des Schulgartens sind $7m$ Länge und $7m$ Breite.