Das Skalarprodukt und seine Anwendungen

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de

Schmalzgrube, März 1999

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt von Vektoren kann ein elegantes und nützliches Hilfsmittel beim Lösen von geometrischen Aufgaben sein. In den folgenden Situationen könnte die Benutzung des Skalarproduktes erfolgversprechend sein:

1. Nachweis von Identitäten, in denen *Quadrate von Streckenlängen* auftauchen,
2. Nachweis der *Orthogonalität* von Vektoren,
3. Berechnung oder Vergleich von *Winkelgrößen*.

In Hinblick auf Formel (3) macht das Skalarprodukt Aussagen über den Winkel zwischen den beiden Vektoren und über deren Länge.
Die *Übungen* sind gedacht zur Festigung des Umgangs mit dem Skalarprodukt während die *Aufgaben* einen Lösungsansatz bzw. eine Idee erfordern, wie es in der Olympiade üblich ist. Zu den Aufgaben mit • ist die Lösung selbst zu finden.

Das Skalarprodukt ist eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und wird für Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$ wie folgt definiert

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.} \tag{1}$$

Dabei sind $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$.
Vereinbarung: Vektoren werden bei uns prinzipiell als *Spalten*vektoren geschrieben. Da dies

viel Platz in Anspruch nimmt, benutzen wir die Transposition $^{\mathtt{t}}$, also $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a, b, c)^{\mathtt{t}}$. Entsprechende Formeln mit nur zwei Koordinaten gelten für das Skalarprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

Übung 1• Berechnen Sie die Skalarprodukte der folgenden Vektoren
a) $(1,2,3)^{\mathtt{t}} \cdot (1,1,-1)^{\mathtt{t}}$ b) $(1,1,1)^{\mathtt{t}} \cdot (4,5,6)^{\mathtt{t}}$ c) $(1,1,1)^{\mathtt{t}} \cdot (1,1,1)^{\mathtt{t}}$ d) $(2,3)^{\mathtt{t}} \cdot (1,2)^{\mathtt{t}}$

Eigenschaften des Skalarproduktes

1. Bilinearität (Distributivgesetze)

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} &= \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} \\ \vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \\ (\alpha \vec{x}) \cdot \vec{y} &= \vec{x} \cdot (\alpha \vec{y}) = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

2. Symmetrie (Kommutativität)

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

3. Positivität

$$\begin{aligned} &\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0, \\ &\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad \vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

   Bezeichnet $\|\vec{x}\|$ die *Länge* (oder auch *Norm*) des Vektors $\vec{x}$, dann gilt $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$.

4. Die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

5. Es sei γ der Winkel zwischen den (von Null verschiedenen) Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$. Dann gilt

$$\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}, \tag{2}$$

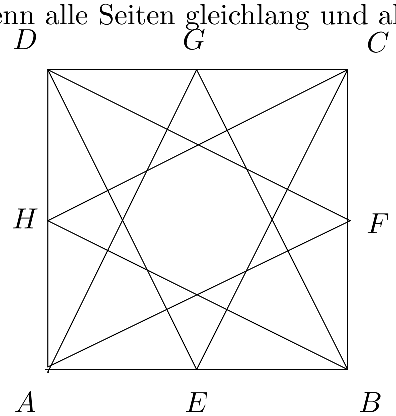
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \cos \gamma \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|. \tag{3}$$

Übung 2• Berechnen Sie die Längen der folgenden Vektoren
a) $(1,2,3)^{\mathtt{t}}$ b) $(1,1,-1)^{\mathtt{t}}$ c) $(1,1,1)^{\mathtt{t}}$ d) $(1,2)^{\mathtt{t}}$ e) $(2,3)^{\mathtt{t}}$.
Berechnen Sie den Kosinus des von den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossenen Winkels. Entscheiden Sie, ob der Winkel kleiner, gleich oder größer als 90° ist!
a) $\vec{x} = (1,2,3)^{\mathtt{t}}$, $\vec{y} = (1,1,-1)^{\mathtt{t}}$, b) $\vec{x} = (1,0)^{\mathtt{t}}$, $\vec{y} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})^{\mathtt{t}}$, c) $\vec{x} = (1,2)^{\mathtt{t}}$, $\vec{y} = (2,3)^{\mathtt{t}}$.

Aufgabe 1. Gegeben sei ein Einheitswürfel $ABCDEFGH$ sowie ein Punkt P auf $\overline{AB}$ mit $|\overline{PB}| = p$, $0 < p < 1$, und ein Punkt Q auf $\overline{DE}$, der von der Kante $\overline{AE}$ ebenfalls den Abstand p hat. Ermittle alle Werte von p, für die die Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{ED}$ aufeinander senkrecht stehen! Hinweis: Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.

Lösung. Wir plazieren den Würfel in einem rechtwinkligen Koordinatensystem, so dass $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $D = (0,1,0)$ und $E = (0,0,1)$ gilt. Nach Voraussetzung sind dann $P = (1-p,0,0)$ und $Q = (0,p,1-p)$.
Jetzt berechnen wir das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{DE} = (Q-P) \cdot (E-D) = (p-1,p,1-p)^{\mathtt{t}} \cdot (0,-1,1)^{\mathtt{t}} = -p+1-p = 1-2p$. Die Vektoren sind demnach genau dann senkrecht, wenn $1-2p = 0$ bzw. $p = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 2. Gegeben sei das untenstehende Quadrat $ABCD$ mit den Seitenmittelpunkten E, F, G und H. Verbindet man die Seitenmittelpunkte jeweils mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Quadrates, so entsteht als symmetrische Schnittpunktefigur ein Achteck. Entscheiden Sie, ob dieses Achteck regelmäßig ist! (Hinweis: Ein n-Eck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleichlang und alle Innenwinkel gleichgroß sind.)



Lösung. Aus Symmetriegründen ist das entstandene 8-Eck gleichseitig. Wir prüfen die Gleichheit der Winkel über den Vergleich ihrer Kosinus. Da der Winkel zwischen Vektoren definitionsgemäß immer zwischen $0°$ und $180°$ liegt und die Kosinusfunktion in diesem Bereich eineindeutig ist, stimmen die Winkel genau dann überein, wenn ihre Kosinus übereinstimmen. Wir bezeichnen $\angle(DE, AG) = \alpha$ und $\angle(HC, GA) = \beta$. Ferner seien $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ und $D = (0,1)$. Dann gilt
$\cos\alpha = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AG} \|\overrightarrow{DE}\|^{-1} \|\overrightarrow{AG}\|^{-1} = (E-D) \cdot (G-A)(\frac{5}{4})^{-1} = (\frac{1}{2},-1)^{\mathtt{t}} \cdot (\frac{1}{2},1)^{\mathtt{t}} \frac{4}{5} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$.
Weiter hat man
$\cos\beta = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{GA} \frac{4}{5} = (C-H)^{\mathtt{t}} \cdot (A-G)^{\mathtt{t}} \frac{4}{5} = (1,\frac{1}{2})^{\mathtt{t}} \cdot (-\frac{1}{2},-1)^{\mathtt{t}} \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$. Folglich ist das 8-Eck *nicht* regelmäßig.

Aufgabe 3• Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ und ein Punkt P. Beweisen Sie, dass gilt

$$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2.$$

(Verwenden Sie, dass $\overline{XY}^2 = \overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.)

Aufgabe 4. Über der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrates $ABCD$ wird nach innen ein gleichseitiges Dreieck ABE errichtet. Ermittlen Sie die Größe des Winkels $\angle EDC$!

Lösung. Das Koordinatensystem liege so wie in Aufgabe 2. Dann gilt $E = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Dann gilt $\overrightarrow{DE} = E - D = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1)^{\mathtt{t}}$, $\overrightarrow{DC} = (1,0)^{\mathtt{t}}$ und weiter

$$\cos\angle EDC = \frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}}{\|\overrightarrow{DE}\|\|\overrightarrow{DC}\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\sqrt{3}+1}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Der Taschenrechner liefert die Vermutung $\angle EDC = 15°$. Zum Beweis benutzt man $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ sowie den Doppelwinkelsatz $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$. Also $\cos 15° = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Aufgabe 5• Gegeben sei ein Rhombus $ABCD$ mit $\angle BAC = 60°$ und k sei der Inkreis von $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M. Ferner gelte $\overline{MD} = 1$. Man zeige, dass für jeden Punkt P auf k gilt

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 11.$$

Übung 3. Ein Vektor heißt *Einheitsvektor* oder *normiert*, wenn er die Länge 1 hat. Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Einheitsvektors $\vec{a}$, der senkrecht auf den Vektoren $\vec{b} = (1,1,0)^{\mathtt{t}}$ und $\vec{c} = (0,1,1)^{\mathtt{t}}$ steht!

Lösung. Die Koordinaten des gesuchten Vektors seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathtt{t}}$. Die Orthogonalität von $\vec{a}, \vec{b}$ bzw. $\vec{a}, \vec{c}$ sowie die Normiertheit von $\vec{a}$ (Länge gleich 1) lassen sich unter Verwendung des Skalarprodukts wie folgt schreiben

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = 1.$$

Nach Einsetzen der Koordinaten hat man

$$a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 + a_3 = 0, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Die ersten beide Gleichungen liefern $a_2 = -a_3 = -a_1$. Einsetzen in die letzte Gleichung liefert *zwei* Lösungen, $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ sowie $\vec{a} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Bemerkung: Auf einer Ebene des Raumes gibt es immer zwei senkrechte Vektoren der Länge Eins, die entgegengesetzt gerichtet sind.

Übungen•

4. Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = (3,-2,2)^{\mathtt{t}}$ und $\overrightarrow{BC} = (-1,0,-2)^{\mathtt{t}}$ sind die benachbarten Seiten eines Parallelogramms $ABCD$. Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Diagonalen!

5. Für welchen Wert z stehen die Vektoren $\vec{a} = (6,0,12)^{\mathtt{t}}$ und $\vec{b} = (-8,13,z)^{\mathtt{t}}$ senkrecht aufeinander?

6. Vom Parallelogramm $ABCD$ sind die folgenden Koordinaten bekannt: $A = (3,2,1)$, $B = (0,-1,-1)$ und $C = (-1,1,0)$. Ermitteln Sie die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$!

Aufgabe 6. Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \geq 3$ und ein regelmäßiges n-Eck $P_1P_2\cdots P_n$ mit Umkreis k vom Radius r. Zeigen Sie, dass für alle Punkte P auf k die Summe

$$\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2 + \cdots + \overline{PP_n}^2$$

einen konstanten Wert hat, der nur von r und n nicht aber von der Lage des Punktes P auf k abhängt, und ermittlen Sie diesen Wert!

Lösung. Der Mittelpunkt des regulären n-Ecks $P_1P_2\cdots P_n$ sei O. Wir schreiben $\vec{p_i} = \overrightarrow{OP_i}$, $i = 1,\ldots,n$ und $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$. Dann gilt wegen der Regelmäßigkeit des n-Ecks

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} + \cdots + \vec{p_n} = \vec{0}. \tag{4}$$

Ferner ist $\overrightarrow{PP_i} = \vec{p_i} - \vec{p}$. Wegen $\overline{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ hat die gesuchte Summe hat nun den Wert

$$\begin{aligned} s =&(\vec{p_1} - \vec{p}) \cdot (\vec{p_1} - \vec{p}) + (\vec{p_2} - \vec{p}) \cdot (\vec{p_2} - \vec{p}) + \cdots + (\vec{p_n} - \vec{p}) \cdot (\vec{p_n} - \vec{p}) \\ =&(\vec{p_1}^{\,2} - 2\vec{p_1} \cdot \vec{p} + \vec{p}^{\,2}) + \cdots + (\vec{p_n}^{\,2} - 2\vec{p_n} \cdot \vec{p} + \vec{p}^{\,2}) \\ =&(\vec{p_1}^{\,2} + \cdots + \vec{p_n}^{\,2}) - 2(\vec{p_1} + \cdots + \vec{p_n}) \cdot \vec{p} + n\vec{p}^{\,2}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir in der ersten Klammer, dass $\vec{p_i}^{\,2} = r^2 = \vec{p}^{\,2}$ gilt, und in der zweiten Klammer (4). Damit ergibt sich $s = nr^2 + nr^2 = 2nr^2$. Aus der letzten Formel erkennt man die Unabhängigkeit der Summe s von der Lage des Punktes P auf dem Kreis k.

Aufgabe 7• Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 5\overline{AB}^2$. Zeigen Sie, dass die Seitenhalbierenden durch A und B aufeinander senkrecht stehen!

Aufgabe 8• Gegeben seien zwei kongruente Kreise k_1, k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 vom Radius 1, wobei M_2 auf k_1 und M_1 auf k_2 liegen. Ferner seien A ein Punkt auf k_1 und B und C liegen auf k_2 bezüglich M_1M_2 symmetrisch zueinander.
Zeigen Sie, dass $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \geq 2$!

Aufgabe 9• Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC schneiden sich im Punkte M. Beweisen Sie, dass

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = 3(\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2).$$

Aufgabe 10. Es sei O der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, D der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ und E der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ACD. Beweisen Sie, dass $OE \perp CD$ genau dann, wenn $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Lösung. Es sei O der Koordinatenursprung; $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ und $\vec{e} = \overrightarrow{OE}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Radius des Umkreises gleich 1. Dann gilt also $\vec{a}^{\,2} = \vec{b}^{\,2} = \vec{c}^{\,2} = 1$. Ferner haben wir $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Als Schwerpunkt des Dreiecks ADC hat E den Ortsvektor $\vec{e} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{6}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{b}$. Nun gilt $OE \perp CD$ genau dann, wenn $\vec{e} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Das heißt,

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{e}(\vec{d} - \vec{c}) \\ &= (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{b}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}) \\ &= (\frac{1}{4}\vec{a}^{\,2} + \frac{1}{4}\vec{a}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\vec{c}) + (\frac{1}{6}\vec{a}\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{b}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{c}^{\,2}) + (\frac{1}{12}\vec{a}\vec{b} + \frac{1}{12}\vec{b}^{\,2} - \frac{1}{6}\vec{b}\vec{c}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\vec{a}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}). \end{aligned}$$

Andererseits gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$ genau dann, wenn $(\vec{b} - \vec{a})^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2$. Da die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Länge 1 haben, ist die letzte Gleichung äquivalent zu $-2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{c} \cdot \vec{a}$ bzw. zu $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = 0$. Damit ist der Beweis erbracht.

Aufgabe 11• Die Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC schneiden sich im Punkte H. Auf den Strecken $\overline{HB}$ und $\overline{HC}$ sind die Punkte B_1 und C_1 derart gewählt, dass

$$\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°.$$

Beweisen Sie, dass $\overline{AB_1} = \overline{AC_1}$!

Comments

todo: geometric markup

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet
graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules