Komplexe Zahlen und Geometrie

Dr. Axel Schüler, Univ. Leipzig

März 1998

Zusammenfassung

Ziel dieses Beitrages ist es, die komplexen Zahlen bei einfachen geometrischen Aufgaben einzusetzen. Besonderes Augenmerk gilt dabei der *Drehung* um einen Winkel φ. Sie läßt sich durch Multiplikation mit $e^{\mathrm{i}\,\varphi}$ beschreiben.

Im ersten Teil wiederholen wir Grundeigenschaften der komplexen Zahlen.

Im zweiten Teil übersetzen wir geometrische Begriffe, wie Gerade, Kreis, Länge einer Strecke, Teilungsverhältnis und Drehung um einen Winnkel in die Sprache der komplexen Zahlen.

Im dritten Teil werden Beispiele und Aufgaben betrachtet.

Komplexe Zahlen

Die kartesischen Koordinaten.

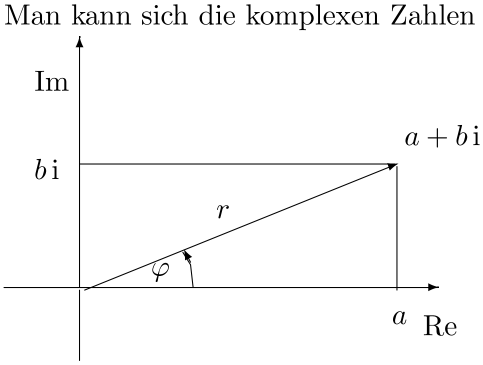
Komplexe Zahlen sind Paare (a, b) reeller Zahlen, kurz $a + b\,\mathrm{i}$, für die unter Beachtung von $\mathrm{i}^2 = -1$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$(a + b\,\mathrm{i}) \pm (c + d\,\mathrm{i}) = a \pm c + (b \pm d)\,\mathrm{i}$$

und gemäß dem Distributivgesetz

$$(a + b\,\mathrm{i})\cdot(c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}\,.$$

Es gelten die Kommutativgesetze und Assoziativgesetze der Addition und der Multiplikation. Man kann sich die komplexen Zahlen als Punkte der Gaußschen Zahlenebene vorstellen.



Konjugation und Betrag.

Spiegelt man eine komplexe Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ an der reellen Achse, so erhält man die *komplex konjugierte* Zahl $\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$. Der *Betrag* von z ist die Länge der Strecke vom Nullpunkt bis z. Nach dem Satz des Pythagoras ist also $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ oder $|z|^2 = z\overline{z}$. Offenbar ist z reell gdw. $z = \overline{z}$. Den *Realteil* a bzw. *Imaginärteil* b der komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ erhält man mit Hilfe der komplexen Konjugation wie folgt:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z}).$$

Die *Division* komplexer Zahlen läßt sich nun durch Erweitern mit $\overline{z}_2$ auf die Standardform $a + b\,\mathrm{i}$ zurückführen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \overline{z}_2.$$

Polarkoordinaten.

Die komplexe Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ kann alternativ durch ihren Betrag r und ihr *Argument* φ, den Winkel von der reellen Achse bis zum „Leitstrahl" durch z dargestellt werden. Es ist dann $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ bzw. in Exponentialschreibweise $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. In der letzten Formel wird φ im Bogenmaß gemessen, etwa $60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Die Zahl $e = 2,7182818\ldots$ ist die Eulersche Konstante. Die Multiplikation komplexer Zahlen ist in der Exponentialschreibweise besonders einfach, da das Potenzgesetz gilt:

$$r_1 e^{\mathrm{i}\varphi} \cdot r_2 e^{\mathrm{i}\psi} = r_1 r_2 e^{\mathrm{i}(\varphi + \psi)}.$$

Die Argumente der beiden komplexen Zahlen werden addiert, das heißt, z_1 wird um dem Winkel ψ (entgegen dem Uhrzeiger) um den Ursprung gedreht. Die Beträge werden wie gewöhnliche positive reelle Zahlen miteinander multipliziert.

Geometrie

Kreis mit Radius r um den Punkt z_0 der Ebene: $|z - z_0| = r$.

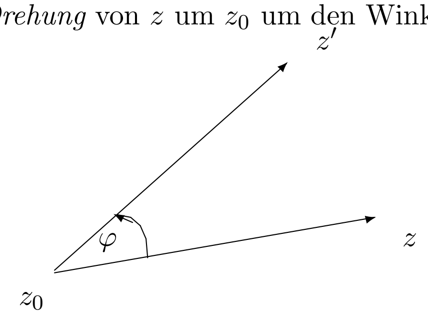
Gerade durch z_1 und z_2: $\frac{z - z_1}{z - z_2} \in \mathbf{R}$.

Teilverhältnis. Die Strecke $\overline{AB}$ werde von innen und von außen durch Punkte P bzw. Q im Verhältnis t geteilt, das heißt,

$$\overline{AP} : \overline{PB} = t = -\overline{AQ} : \overline{QB}.$$

Die gerichtete Strecke $\overline{XY}$ ist, als Vektor im $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$, gleich $Y - X$. Daher hat man nach Umstellen $P = \frac{1}{1+t}(A + tB)$, $t \neq -1$, und $Q = \frac{1}{1-t}(A - tB)$, $t \neq 1$.

Drehung von z um z_0 um den Winkel φ entgegen dem Uhrzeiger:



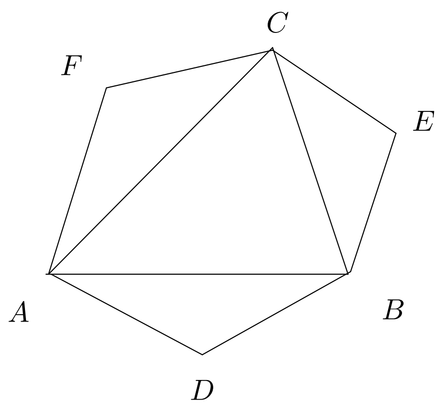
$$\boxed{z' - z_0 = (z - z_0)e^{\mathrm{i}\varphi}} \qquad (*)$$

Anwendung der Drehung bei geometrischen Beweisen

Beispiel 1 : Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke ABC', BCA' bzw. ACB' mit den Mittelpunkten D, E bzw. F errichtet.

Zeigen Sie, daß das Dreieck DEF gleichseitig ist!

Beweis:



Wir fassen A, B und C als Punkte der komplexen Ebene auf und berechnen daraus D, E und F. Es entsteht D durch Drehung von B um A um $-30°$ (im Bogenmaß $-\frac{\pi}{6}$) und anschließender Stauchung mit dem Faktor $\overline{AD} : \overline{AB} = 1 : \sqrt{3}$, denn die Höhe h im gleichseitigen Dreieck ABC' ist nach Pythagoras $\frac{1}{2}\sqrt{3}|AB|$ und $\overline{AD} = \frac{2}{3}h$. Nach Formel $(*)$ gilt also

$$\begin{aligned} D - A &= (B-A)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}, & (1)\\ D - B &= (A-B)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}, & (2)\\ E - B &= (C-B)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}, & (3)\\ F - A &= (C-A)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}}. & (4) \end{aligned}$$

Dabei steht ein positives Vorzeichen vor dem Drehwinkel, wenn entgegen dem Uhrzeiger gedreht wird, ein negatives Vorzeichen, wenn mit dem Uhrzeiger gedreht wird. Wir müssen zeigen, daß gilt $(E-D)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = F - D$, das heißt, F entsteht durch Drehung von E um D um $60° = \frac{\pi}{3}$ entgegen dem Uhrzeiger.
Wir bilden die Differenzen der Gleichungen $(3)-(2)$ und $(4)-(1)$:

$$\begin{aligned} E - D &= \frac{1}{\sqrt{3}}((-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})B - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}A + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}C),\\ F - D &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}B + (-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})A + e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}C). \end{aligned}$$

Beachtet man $-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = -\cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6} + \cos(-\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{6}) = -2\frac{1}{2}\mathrm{i} = -\mathrm{i}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(E-D)-(F-D) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\big((-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})A+(-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}+e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})B+(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})C\big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}((-\mathrm{i}+\mathrm{i})A + (-\mathrm{i}+\mathrm{i})B) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 2 : Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC werden nach außen Quadrate $BDEC$ und $ACFG$ errichtet. Ferner sei M der Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Beweisen Sie, daß die Strecken $\overline{FE}$ und $\overline{CM}$ aufeinander senkrecht stehen und daß die erste doppelt so lang ist wie die zweite Strecke!

Beweis: Wir fassen die Punkte A, B, C, M, D, E und F als Punkte der komplexen Ebene auf. Man erhält F durch Drehung von A um C um $-\frac{\pi}{2}$ und E durch Drehung von B um C um $\frac{\pi}{2}$. Folglich gilt

$$F - C = e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}(A - C) \quad \text{und} \quad E - C = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}(B - C).$$

Wegen $\mathrm{i} = -e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$ erhalten wir als Differenz der beiden Gleichungen

$$F - E = \mathrm{i}\,(-A + C - B + C).$$

Wegen $M = \frac{1}{2}(A + B)$ ergibt sich hieraus $\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(F - E) = M - C$. Das ist aber gerade die zu zeigende Behauptung. $\square$

Die folgende Olympiadeaufgabe besitzt eine einfache elementargeometrische Lösung, auf die man unter Zeitdruck aber möglicherweise nicht kommt. Die oben beschriebene Methode benötigt hingegen *überhaupt keine* Idee, nur die Umsetzung der geometrischen Figur in komplexe Zahlen. Wir formulieren die Olympiadeaufgabe, beweisen jedoch ihre Verallgemeinerung (Beispiel 4).

Beispiel 3 (351046): Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und auf ihr Punkte X und Y. Über den Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{XB}$ werden „nach oben“ Quadrate mit den Mittelpunkten K bzw. L errichtet. Über den Strecken $\overline{AY}$ und $\overline{YB}$ werden „nach unten“ Quadrate mit den Mittelpunkten M bzw. N errichtet.

Beweisen Sie, daß die Strecken $\overline{LM}$ und $\overline{KN}$ orthogonal und gleichlang sind!

Beispiel 4 : Über den Seiten eines Vierecks $ABCD$ werden nach außen Quadrate mit den Mittelpunkten E, F, G bzw. H errichtet.

Beweisen Sie, daß die Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$ orthogonal und gleichlang sind.

Beweis: Der Punkt E entsteht durch Drehung von B um A um $-45°$ und anschließender Stauchung mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$E - A = \frac{1}{\sqrt{2}}(B - A)e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}.$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned} G - D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C - D)e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}, \\ H - A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D - A)e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}, \\ F - B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(C - B)e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist $E - G = \mathrm{i}\,(H - F)$. Dann sind die beiden Strecken orthogonal und gleichlang. Aus den obigen Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} E - G &= (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}})A + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}B - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}C + (-1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}})D, \\ H - F &= (1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}})A + (-1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}})B - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}C + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}D. \end{aligned}$$

Beachtet man $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} E - G - \mathrm{i}\,(H - F) \;&=\; A(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} - \mathrm{i} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}) + B(\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} + \mathrm{i} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}) \\ &\quad + C(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}}) + D(-1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}}). \end{aligned}$$

Nun gilt aber $-e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} + e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} = 2e^{\mathrm{i}\,\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1 + \mathrm{i}\,)$ und $e^{-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} - e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}} = \mathrm{i}\,\sqrt{2}$. Daher sind alle Koeffizienten vor A, B, C bzw. D Null, und es gilt die Behauptung. $\square$

Aufgaben

1. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und ein Punkt P in seinem Innern mit $\angle PAB = \angle PBA = 15°$.

   Zeigen Sie, daß das Dreieck CPD gleichseitig ist!

2. Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden nach außen Quadrate mit den Mittelpunkten E, F, G bzw. H errichtet.

   Beweisen Sie, daß $EFGH$ ein Quadrat ist!

3. Über den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC sind nach außen Dreiecke ABR, BCP und CAQ errichtet. Dabei sind $\angle RAB = \angle RBA = 15°$, $\angle PBC = \angle QAC = 45°$ und $\angle PCB = \angle QCA = 30°$.

   Zeigen Sie, daß das Dreieck PQR rechtwinklig gleichschenklig ist!

Hinweis : Benutzen Sie zur Berechnung der benötigten Streckungsverhältnisse den Sinussatz. Zeigen Sie zunächst, daß $\overline{AR} : \overline{AB} = \overline{AQ} : \overline{AC}$ gilt.

Comments

todo: geometric markup

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet
graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules