Rekursive Folgen

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:Axel.Schueler@math.uni-leipzig.de

15.05.2005

1 Rekursive Folgen

1.1 Einleitung

Rekursive Folgen umfassen viele aus dem Unterricht bekannte Folgen: geometrische Folgen (cq^n), $c, q \in \mathbb{R}$, arithmetische Folgen $(c + dn)_{n\in\mathbb{N}}$, $c, d \in \mathbb{R}$ gegeben, periodische Folgen, wie z. B. $(-1, 1, -1, 1, \cdots)$ oder arithmetische Folgen höherer Ordnung, wie quadratische Folgen (n^2) oder kubische Folgen, wie $(an^3 + bn^2 + cn + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Die vorliegende kleine mathematische Theorie ist abgeschlossen, einfach und klar. Ihre Grundzüge wurden vom französischen Mathematiker MOIVRE (1720), von DANIEL BERNOULLI und LEONHARD EULER entwickelt bzw. weiter entwickelt.

Das lateinische *recurro* bedeutet „umkehren“ oder „zurückgehen“. Grob gesprochen erhält man das Glied a_n einer rekursiven Folge, indem man a_n aus einer festen Anzahl vorhergehender Glieder berechnet, etwa $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Ist hingegen a_n als Funktion von n allein (und nicht in Abhängigkeit von a_{n-1}, a_{n-2} usw.) gegeben, so sagt man, dass die Folge (a_n) *explizit* gegeben ist, z. B. ist $a_n = \sqrt{n^3 - 1}$ eine explizite Bildungsvorschrift.

Die folgenden Aufgabenstellungen treten häufig bei rekursiven Folgen auf:

- Man ermittle aus der rekursiven Vorschrift die explizite Bildungsvorschrift. Dies ist in dieser Allgemeinheit eine sehr schwierige, in vielen Fällen unlösbare Aufgabenstellung. Wir werden aber sehen, dass sie für die große Klasse der *linearen rekursiven Folgen mit konstanten Koeffizienten* vollständig lösbar ist.

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

- Man beweise, dass die Glieder einer rekursiv oder explizit gegebenen Folge ganzzahlig, durch 3 teilbar, paarweise teilerfremd, usw. sind.

- Man bestimme Einerziffer, die Zehnerziffer, die ersten 5 Nachkommastellen eines Folgenelements.

- Man beweise die Periodizität einer Folge.
- Mitunter sind mehrere gekoppelte rekursive Folgen gegeben und man soll eine der oben genannten Aufgaben lösen (siehe MO 441134).

1.2 Beispiele

Beispiel 1 (a) $a_n = a_{n-1}$, $a_1 := a$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Hier erhält man die *konstante Folge* $(a, a, a, \cdots)$.
(b) $a_{n+2} = a_n$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben. Man erhält hier eine *periodische Folge* der Periodenlänge 1, falls $a = b$ nämlich die konstante Folge oder eine der Periode 2, nämlich $(a, b, a, b, \cdots)$.
(c) $a_n = (a_{n-1})^2$, $a_1 = 2$. Man erhäl die Folge $(2, 4, 16, 256, \cdots)$ mit der expliziten Vorschrift $a_n = 2^{2^{n-1}}$. Dies ist ein Beispiel für eine nicht-lineare Rekursionsformel. Der Beweis, dass dies tatsächlich die explizite Bildungsvorschrift ist, erfolgt durch *vollständige Induktion.* Offenbar ist $a_1 = 2^{2^0} = 2^1 = 2$ — der Induktionsanfang ist erfüllt. Nun gelte die explizite Formel für ein festes n. Wir zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt, also $a_{n+1} = 2^{2^n}$.
Beweis : Nach der Rekursionsformel und der Induktionsvoraussetzung ist

$$a_{n+1} = (a_n)^2 \underset{\text{Ind.Vor}}{=} \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 = 2^{2^{n-1}\cdot 2} = 2^{2^n},$$

was zu zeigen war. □
(d) $a_{n+1} = q\, a_n$, $a_1 = c$. Wir lösen die Rekursion auf, indem wir in der Rekursionsformel nacheinander $n - 1$, $n - 2, \ldots, 1$ anstelle von n einsetzen. Wir erhalten dadurch $n - 1$ Gleichungen: $a_n = qa_{n-1}$, $a_{n-1} = qa_{n-2}$,..., $a_2 = qa_1$. Setzt man diese Gleichungen nacheinander in sich ein, so erhält man

$$a_{n+1} = qa_n = q^2 a_{n-1} = q^3 a_{n-2} = \cdots = q^n a_1 = c\, q^n.$$

Wir erhalten somit die geometrische Folge mit dem Faktor q und dem Anfangsglied c. Der genaue Beweis erfolgt wie oben durch vollständige Induktion.
(e) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Diese Rekursionsformel wird durch eine beliebige arithmetische Folge (erster Ordnung) $a_n = c + d(n - 1)$, $c, d \in \mathbb{R}$, erfüllt. In der Tat ist

$$2a_{n+1} - a_n = 2(c + dn) - (c + d(n - 1)) = c + 2dn - dn + d = c + d(n + 1) = a_{n+2}.$$

Man erkennt, dass es zu einer expliziten Vorschrift durchaus mehrere Rekursionen geben kann. So erfüllt $a_n = 1$ neben der Rekursion (e) auch die in (a).
(f) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$. Dies ist die FIBONACCI-Folge. Ihre ersten Glieder lauten

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Wir werden später die explizite Vorschrift ermitteln und zeigen, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $m \mid a_n$. Viele weitere interessante Eigenschaften über die Fibonacci-Zahlen findet man in [Wor77].

Beispiel 2 Wir betrachten die Folge $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, der Quadratzahlen und wollen umgekehrt zu dieser expliziten Bildungsvorschrift eine rekursive Vorschrift finden. Zunächst ist

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_n + 2n + 1.$$

Vergrößert man hier n um 1, so erhält man

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2n + 3.$$

Bildet man nun die Differenz aus diesen beiden Gleichungen, so hat man

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2 \quad \text{bzw.} \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2.$$

Erhöht man erneut n um 1, so hat man

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} - a_{+1} + 2$$

und Differenzbildung liefert

$$a_{n+3} - a_{n+2} = 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n.$$

Somit genügt die Folge der Quadratzahlen einer linearen rekursiven Gleichung *dritter Ordnung*. Analog kann man sich überlegen, dass die Folgen (n^3) der Kuben einer linearen Rekursion vierter Ordnung genügt:

$$a_{n+4} = 4a_{n+3} - 6a_{n+2} + 4a_{n+1} - a_n.$$

Beispiel 3 Wir wollen die Ziffernfolge $0, a_1a_2a_3\cdots$ bei der Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl

$$\frac{761}{1332} = 0,57\overline{132}\cdots$$

betrachten. In diesem Beispiel ist $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = a_6 = a_9 = \cdots = 1$, $a_4 = a_7 = a_{10} = \cdots = 3$ und $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 2$. Offensichtlich ist für alle $n \geq 3$

$$a_{n+3} = a_n.$$

Dies ist wieder eine lineare rekursive Folge dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Beispiel 4 Dividiert man ein Polynom $p(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_rx^r$ durch ein Polynom $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_sx^s$, $q_0 \neq 0$, so erhält man i. a. als Quotient eine sogenannte *Potenzreihe*

$$r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots ,$$

die nicht notwendig abbricht. Die Koeffizienten (a_n) des Quotienten $r(x)$ genügen der linearen Rekursion

$$a_{n+s}q_0 + a_{n+s-1}q_1 + \cdots + a_nq_s = 0, \quad n + s \geq r + 1.$$

Dies folgt durch Koeffizientenvergleich vor x^{n+s} nach Ausmultiplizieren der Gleichung $p(x) = q(x)r(x)$.
Zum Beispiel ist

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots ,$$

wobei (a_n) die FIBONACCI-Folge ist. Die Funktion auf der linken Seite bezeichnet man dann auch als *erzeugende Funktion* für die Folge (a_n).

Beispiel 5 Genügt (a_n) der linearen Rekursion (1) der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten $c_1, \ldots, c_k$, so genügt die Folge der Partialsummen

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

einer linearen Rekursion (1) der Ordnung $k + 1$. Es gilt nämlich

$$s_{n+k+1} = (1 + c_1)s_{n+k} + (c_2 - c_1)s_{n+k-1} + \cdots + (c_k - c_{k-1})s_{n+1} - c_k s_n.$$

2 Lösung der allgemeinen linearen Rekursion (1)

Die erste wichtige Tatsache ist, dass alle Folgen, die (1) erfüllen einen *linearen Raum* bilden.

Satz 1 Wenn (x_n) und (y_n) die Rekursion (1) erfüllen, so auch die Folgen

$$(x_n + y_n) \quad \text{und} \quad (\lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit anderen Worten, die Summe $z_n = x_n + y_n$ von Lösungen (x_n) und (y_n) ist wieder eine Lösung und skalare Vielfache von Lösungen sind wieder Lösungen.
Beweis: Bildet man die Summe von

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \cdots + c_k x_n, \quad y_{n+k} = c_1 y_{n+k-1} + c_2 y_{n+k-2} + \cdots + c_k y_n,$$

so hat man

$$x_{n+k} + y_{n+k} = c_1(x_{n+k-1} + y_{n+k-1}) + c_2(x_{n+k-2} + y_{n+k-2}) + \cdots c_k(x_n + y_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analog gilt

$$\lambda x_{n+k} = c_1(\lambda x_{n+k-1}) + c_2(\lambda x_{n+k-2}) + \cdots + c_k(\lambda x_n),$$

so dass $z_n = \lambda x_n$ auch (1) erfüllt. Die Angabe des Lösungsraumes ist daher äquivalent zur Angabe einer *Basis* von linear unabhängigen *Fundamentallösungen*. Wir werden sehen, dass die Dimension des Lösungsraumes stets mit der Ordnung k der Rekursion überein stimmt. □

2.1 Der Ansatz — geometrische Folgen

Als Ansatz versuchen wir Lösungen der Form $a_n = q^n$ (also geometrische Folgen) zu finden. Setzt man dies in (1) ein, so hat man

$$\begin{aligned} q^{n+k} &= c_1 q^{n+k-1} + \cdots + c_k q^n \quad |: q^n & (2)\\ q^k &= c_1 q^{k-1} + \cdots + c_{k-1} q + c_k \\ q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k &= 0. & (3) \end{aligned}$$

Das Polynom $\chi(q)$ auf der linken Seite bezeichnet man als *charakteristisches Polynom* der Rekursion (1). Es ist ein Polynom vom Grade k, das nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau k komplexe Nullstellen (gezählt in ihrer Vielfachheit) $q_1, q_2, \cdots, q_k$ besitzt.

2.1.1 Alles einfache Nullstellen

Im einfachsten Fall sind diese k Nullstellen alle voneinander verschieden. Dann erfüllen die k voneinander verschiedenen geometrischen Folgen

$$(q_1^n),\ (q_2^n), \ldots, (q_k)^n$$

alle die Rekursion (1). Nach Satz 1 ist dann auch

$$x_n = A_1 q_1^n + A_2 q_2^n + \cdots + A_k q_k^n \tag{4}$$

mit beliebigen Koeffizienten $A_1, \ldots, A_k$ eine Lösung der Rekursion.
Wir wollen zeigen, dass diese k Lösungen tatsächlich eine Basis bilden, d. h., dass sich *jede* rekursive Folge (1) in der obigen Form (4) mit gewissen Koeffizienten A_i, $i = 1, \ldots, k$ schreiben lässt. Dies liefert gleichzeitig eine Vorschrift, wie man die explizite Bildungsvorschrift erhält, wenn (x_n) die Rekursion erfüllt und zusätzlich die k Anfangsglieder $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ gegeben sind.
Zunächst werden in (4) nacheinander $n = 0, 1, \ldots, k-1$ eingesetzt; man erhält aus den ersten k Folgenglieder ein $k \times k$ lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten A_i:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & + & A_2 + \cdots & + & A_k & = & x_0, \\ q_1 A_1 & + & q_2 A_2 + \cdots & + & q_k A_k & = & x_1, \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ q_1^{k-1} A_1 & + & q_2^{k-1} A_2 + \cdots & + & q_k^{k-1} A_k & = & x_k. \end{array}$$

Man kann zeigen, dass dieses GS für beliebige Wahl der Anfangsglieder $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ eine eindeutige Lösung $(A_1, A_2, \ldots A_k)$ besitzt. Somit haben wir eine Folge (x'_n) gefunden, die die Rekursion (1) erfüllt und außerdem in den ersten k Gliedern von (x_n) überein stimmt. Da durch diese beiden Vorgaben die Folge jedoch schon eindeutig bestimmt ist, gilt $(x'_n) = (x_n)$.

Beispiel 6 Die Fibonacci-Folge $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$ hat die charakteristische Gleichung $q^2 = q + 1$ mit den beiden rellen Lösungen $q_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$a_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Beachtet man $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, so hat man

$$0 = A + B, \quad 1 = \frac{1}{2} (A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2} (A - B)\,.$$

Dies liefert $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(q_1^n - q_2^n \right).$$

2.1.2 Mehrfache Nullstellen

Angenommen, das charakteristische Polynom lautet $\chi(x) = (x - q)^m \chi_1(x)$, $m \leq k$, hat also eine m-fache Nullstelle q. Wir zeigen, dass dann die m Folgen

$$(q^n), (nq^n), \cdots, (n^{m-1}\, q^n)$$

(1) erfüllen.

Wir zeigen dies für $m = 2$. Die wesentliche Eigenschaft, die benutzt wird: Ist q eine m-fache Nullstelle von $\chi(x)$, so ist q eine $(m-1)$-fache Nullstelle der Ableitung $\chi'(x)$. Insbesondere gilt für $m = 2$

$$kq^{k-1} = c_1(k-1)q^{k-2} + \cdots + c_{k-2} \cdot 2q + c_{k-1}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit q^{n+1} und addiert man hierzu das n-fache von (2)

$$nq^{n+k} = nc_1q^{n+k-1} + nc_2q^{n+k-2} + \cdots + nc_kq^n,$$

so erhält man

$$(n+k)q^{n+k} = c_1(n+k-1)q^{n+k-1} + c_2(n+k-2)q^{n+k-2} + \cdots + c_knq^n,$$

mit anderen Worten, $b_n = n\,q^n$ erfüllt die Rekursion (1).

Beispiel 7 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Es ist $\chi(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ mit doppelter Nullstelle $q = 1$. Somit bilden (1) und (n) ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Wenn man beide Methoden (einfache Nullstellen und mehrfaache Nullstellen) koppelt, erhält man zu jeder charakteristischen Gleichung ein Fundamentalsystem von k unabhängigen Folgen, die den Lösungsraum aufspannen.

Bemerkung: Die Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ einer linearen rekursiven Folge k-ter Ordnung bilden eine lineare rekursive Folge $(k+1)$ter Ordnung.

3 Aufgaben

Aufgabe 1 Es sei (a_n) die Fibonacci-Folge und

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{2}{10000} + \cdots.$$

Zeige, dass die Reihe konvergiert und dass $s = \frac{1}{89}$ ist.

Beweis: Da die Fibonacci-Folge im wesentlichen wie q^n wächst mit $q = (\sqrt{5}+1)/2$ und $q/10 < 1$, kann die Reihe durch eine konvergente geometrische Reihe majorisiert werden, also konvergiert sie.

Sei $b_n = \frac{a_n}{10^{n+1}}$. Dann haben wir eine Rekursion für b_n, $b_{n+2} = \frac{1}{10}b_{n+1} + \frac{1}{100}b_n$. Summiert man diese Gleichung auf für $n = 1, \ldots, k$, so hat man

$$s_{k+2} - b_1 - b_2 = \frac{1}{10}(s_{k+1} - b_1) + \frac{1}{100}s_k.$$

Bildet man nun den Limes $k \to \infty$, so hat man

$$s - 0.011 = 0.11s - 0.001 \Longrightarrow 0.89s = 0.1 \Longrightarrow s = \frac{1}{89}.$$

□

Aufgabe 2 Man finde eine explizite Formel für

$$a_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{1+24a_n}\right), \quad a_1 = 1.$$

Lösung:

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3 \cdot 4^n}.$$

Wenn man die ersten Glieder berechnet, könnte man vermuten, dass a_n stets *rational* ist, dass

$$b_n := \sqrt{1+24a_n}$$

stets eine rationale Zahl ist. Mit dieser Substitution wäre $a_n = (b_n^2 - 1)/24$. Setzt man dies in die Rekursion ein, so hat man nach einigen Umformungen eine binomische Formel:

$$b_{n+1}^2 = 9/4 + b_n^2/4 + 3/2 b_n = (3/2 + b_n/2)^2.$$

Da alle Glieder positiv sind, kann man die Wurzel ziehen und hat $b_{n+1} = b_n/2 + 3/2$.
Setzt man dies immer nacheinander in sich selbst ein und beachtet $b_1 = 5$, so hat man $b_n = 3 + 1/2^{n-2}$. Dies liefert die Lösung für a_n.

Aufgabe 3 Es sei a_n die Anzahl der Möglichkeiten, ein Rechteck vom Format $2 \times n$ in Dominosteine vom Format 2×1 zu zerlegen.
Man bestimme a_n.

Aufgabe 4 Gegeben sei eine Folge (a_n) mit $a_1 = A$, $a_2 = B$ und

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + C}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Beweisen Sie, dass aus der Ganzzahligkeit von

$$A,\ B,\ \frac{A^2 + B^2 + C}{AB}$$

folgt, dass alle Folgenglieder a_n ganzzahlig sind.

Teleskopsummen

Aufgabe 5 Es sei $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n}\, a_n$, $n \geq 1$.
Ermitteln Sie eine explizite Bildungsvorschrift für (a_n) und berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lösung: (a) Zunächst bestimmt man die ersten Folgenglieder; man erkennt schnell, dass es alles Brüche sind mit Zähler 1, deren Nenner schnell wachsen.

n	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{144}$

Man kommt somit leicht auf die Vermutung $a_n = \dfrac{1}{(n-1)!(n+1)}$, die man mit vollständiger Induktion beweist: Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ stimmt die Vermutung. Angenommen, die Aussage gilt für ein festes n. Wir habe zu zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt: $a_{n+1} = \dfrac{1}{n!(n+2)}$.
In der Tat gilt wegen der gegenen Rekursionsformel und nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+2n}\,a_n = \frac{n+1}{n(n+2)}\,\frac{1}{(n-1)!(n+1)} = \frac{1}{n!(n+2)},$$

was zu zeigen war.
(b) Durch Erweitern von a_n mit n hat man $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$. Die gesuchte unedliche Reihe ließe sich berechnen, wenn man sie als „Teleskopsumme“ darstellen könnte. Das ist aber der Fall, denn

$$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Da der Subtrahend für $n \to \infty$ gegen 0 geht, ist $\sum_n a_n = 1$.

Aufgabe 6 Man ermittle die Summe der unendlichen Reihe

$$s = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots .$$

Lösung: Mit Hilfe der *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)x(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+1}$$

erhält man $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$, $D = -\frac{1}{6}$, so dass

$$\frac{1}{n}n + 1n + 2n + 3 = \frac{1}{6}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2} - \frac{1}{6}\frac{1}{n+3}.$$

Summiert man von $n = 1$ bis ∞, so bleiben die ersten 6 Summanden stehen (von $n = 1, 2, 3$ kommend)

$$s = \left(\frac{1}{6}1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{6}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{3} \right) + \frac{1}{6}\frac{1}{3} = \frac{1}{18}.$$

Aufgabe 7 Es sei $w_1 = 1$ und $w_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{w_n}$, für $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass stets gilt

$$\sqrt{n} \leq w_n \leq \sqrt{n} + 1.$$

Beweis: Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n. Offenbar gelten beide Ungleichungen für $n = 1$, denn $1 \leq w_1 = 1 \leq 2$. Angenommen, beide Ungleichungen gelten für ein festes n. Das heißt,

$$\sqrt{n} \leq w_n \leq \sqrt{n} + 1 \tag{5}$$

Wir müssen dann zeigen, dass sie auch für $n+1$ gelten, dass also

$$\sqrt{n+1} \leq w_{n+1} \leq \sqrt{n+1}+1 \tag{6}$$

gilt. Dazu benutzen wir im wesentlichen die Monotonie und die Positivität der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Durch Reziprokenbildung von (5) drehen sich sie Relationszeichen um und wir haben:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} &\geq \frac{1}{w_n} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad | \cdot n \qquad | +1 \\
\sqrt{n}+1 &\geq \frac{n}{w_n}+1 \geq 1+\frac{n}{\sqrt{n+1}} \\
\sqrt{n}+1 &\geq w_{n+1} \geq 1+\frac{n}{\sqrt{n+1}}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ können wir auf der linken Seite fortsetzen zu $\sqrt{n+1}+1 \geq w_{n+1}$, was den ersten Teil der Induktionsbehauptung (6) beweist.
Offenbar gilt für alle reellen Zahlen A und B mit $A > B \geq 1$, $(A-B)(A-1) \geq 0$. Dies gilt insbesondere für $A = \sqrt{n+1}$ und $B = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, also

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-1) = n+1-\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 0.$$

Bringt man alle Summanden bis auf den ersten auf die rechte Seite, so hat man

$$\begin{aligned}
n &\geq \sqrt{n}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-1 = (\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) \\
\Longrightarrow \frac{n}{\sqrt{n}+1} &\geq \sqrt{n+1}-1 \\
\Longrightarrow 1+\frac{n}{\sqrt{n}+1} &\geq \sqrt{n+1}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit (7) folgt der zweite Teil $w_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$ der Induktionsbehauptung (6). $\square$

Aufgabe 8 (A 156) Gegeben sei die Folge (x_n) mit $x_0 = 5$ und

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \quad n \geq 0.$$

Beweise, dass

$$45 < x_{1000} < 45,1.$$

Beweis : Wir zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{25+2n} < x_n < 0,1+\sqrt{25+2n}. \tag{8}$$

Aus $x_n = x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}$ folgt durch quadrieren $x_n^2 = x_{n-1}^2+2+\frac{1}{x_{n-1}^2} > x_{n-1}^2+2$. Durch Auflösen dieser Rekursion hat man

$$x_n^2 > x_0^2+2n = 25+2n$$

und die linke Seite der Ungleichung folgt. Da (x_n) streng monoton wachsend ist, gilt $x_n \geq x_0 = 5$ und somit $-\frac{1}{x_{n-1}} \geq -0,2$. Also ist

$$x_{n-1} = x_n - \frac{1}{x_{n-1}} \geq x_n - 0,2.$$

Hieraus und mit $2x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = (x_{n-1} + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 2$ folgt

$$2 \geq (x_n - 0,2 + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_n^2 - x_{n-1}^2 - 0,2(x_n - x_{n-1}).$$

Durch Auflösen dieser Rekursion hat man

$$x_n^2 - 0,2x_n - 2n - 24 \leq 0.$$

Da $0,1 + \sqrt{2n + 24,01}$ eine Wurzel der entsprechenden quadratischen Gleichung ist, ist

$$x_n \leq 0,1 + \sqrt{2n + 24,01} < 0,1 + \sqrt{2n + 25}.$$

Für $n = 1000$ erhält man genau die Behauptung. $\square$

Aufgabe 9 Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ von ganzen Zahlen mit

$$3a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Beweisen Sie, dass $5a_n^2 + 4(a_0^2 + a_1^2 - 3a_0a_1)$ stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 10 Gegeben sei die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Beweisen Sie, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Aufgabe 11 Gegeben sei die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} + 1}{a_{n-3}}, \quad n \geq 4.$$

Beweisen Sie, dass alle Folgenglieder ganzzahlig sind.

Aufgabe 12 Es seien (x_n) und (y_n) rekursive Folgen, gegeben durch

$$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$y_1 = 1,\ \ y_2 = 7,\ y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass außer $x_1 = y_1 = 1$ die beiden Folgen keine gemeinsamen Folgenglieder besitzen.

Beweis: Wir betrachten beide Folgen modulo 8 und erhalten

$$x_n \equiv 1, 1, 3, 5, 3, 5, \cdots \pmod 8,$$
$$y_n \equiv 1, -1, 1, -1, \cdots \pmod 8.$$

Folglich können nur die ersten Folgenglieder übereinstimmen. $\square$

Aufgabe 13 Es sei $f(x)$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $f(0) = f(1) = 1$ und $a_1 \in \mathbb{Z}$ beliebig gegeben. Ferner sei $a_{n+1} = f(a_n)$ für alle $n \geq 1$.
Beweisen Sie, dass die Folgenglieder paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 14 (einfach) Gegeben sei die ganzzahlige Folge $a_n = n^2 + 1$.
Beweisen Sie, dass es unter den Folgengliedern unendlich viele zusammengesetzte Glieder der Form $a_n = a_k\, a_l$ gibt.

Beweis: Etwa $a_{l^2+l+1} = a_l\, a_{l+1}$ oder $a_{2l^3+l} = a_l\, a_{2l^2}$. $\square$

Aufgabe 15 Zeigen Sie, dass es unter den Zahlen $2^n - 3$, $n \in \mathbb{N}$, unendlich viele gibt, die paarweise teilerfremd sind.

Aufgabe 16 (einfach) Die Folge a_n ist bestimmt durch $a_1 = 1337$ und $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ für ganze Zahlen $n > 0$.
Bestimme den Wert von a_{2004}.

Lösung: Durch Rückwärtsarbeiten findet man Schritt für Schritt

$$\begin{array}{lll} a_{2004} = 1002 - a_{1002}, & a_{1002} = 501 - a_{501}, & a_{501} = a_{500} = 250 - a_{250}, \\ a_{250} = 125 - a_{125}, & a_{125} = a_{124} = 62 - a_{62}, & a_{62} = 31 - a_{31}, \\ a_{31} = a_{30} = 15 - a_{15}, & a_{15} = a_{14} = 7 - a_7, & a_7 = a_6 = 3 - a_3, \\ a_3 = a_2 = 2 - a_1. & & \end{array}$$

Setzt man dies nacheinander ineinander ein, so hat man

$$\begin{aligned} a_{2004} &= 1002 - 501 + 250 - 125 + 62 - 31 + 15 - 7 + 3 - 1 + a_1 \\ &= 501 + 125 + 31 + 8 + 2 + a_1 = 667 + 1337 = 2004. \end{aligned}$$

Aufgabe 17 Die reellen Zahlen $x_1, x_2, \cdots$ seien durch die Bildungsvorschrift

$$x_1 = 1, \quad x_{k+1} = \frac{1}{1 + x_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gegeben. Man untersuche, ob $x_{2004}^2 + x_{2004} - 1$ positiv, negativ oder gleich 0 ist.

Lösung: Es sei $f(x) = x^2 + x - 1$ mit den Nullstellen $q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $q = q_1$. Man zeigt:

$$x_{2n} < q, \quad x_{2n+1} > q.$$

Somit gilt für alle geraden Folgenglieder $f(x_{2n}) < 0$ und für alle ungeraden Folgenglieder $f(x_{2n-1}) > 0$.

Aufgabe 18 Bestimme die Einerziffer und die erste Ziffer nach dem Komma von b_{2005}, wenn

(a) $b_n = (2 + \sqrt{3})^n$.
(b) $b_n = (3 + \sqrt{7})^n$.

Lösung: (b) Wir betrachten die rekursive Folge zweiter Ordnung

$$a_n = (3 + \sqrt{7})^n + (3 - \sqrt{7})^n$$

mit $q_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$. Wegen $q_1 + q_2 = 6$ und $q_1 q_2 = 2$ lautet die charakteristische Gleichung für (a_n), $0 = x^2 - 6x + 2$ und somit gilt

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 2a_n, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 32.$$

Wegen der Rekursion gilt $a_n \in \mathbb{N}$ und wegen $c_n = (3 - \sqrt{7})^n < 0,1$, hat $b_n = a_n - c_n$ als erste Stelle nach dem Komma stets eine 9. Um die Einerstelle von b_{2005} zu ermitteln betrachten wir $a_n \pmod 1)0$. Diese Folge ist periodisch mit der Periodenlänge 24:

$$(a_n \pmod{10}) = (2,6,2,0,6,6,4,2,4,0,2,2,8,8,0,4,4,6,8,6,0,8,8,2,6,\cdots).$$

Somit gilt $a_n \equiv a_{n+24} \pmod{10}$, also wegen $2005 \equiv 13 \pmod{24}$ haben wir $a_{2005} \equiv a_{13} \equiv 4 \pmod{10}$. Somit ist die Einerstelle von b_{2005} gleich $4 - 1 = 3$.
Bemerkung. Da als Reste modulo 10 nur die fünf geraden Zahlen $0, 2, 4, 6, 8$ in Frage kommen, gibt es maximal $5^2 = 25$ Paare (r_1, r_2) von Resten modulo 10, die hier auftreten. Erstaunlicher Weise treten alle Paare tatsächlich auf bis auf $(0, 0)$, welches ein Orbit für sich ist.

(a) Analog zu (b). Die Rekursion lautet hier $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$. Die Periodenlänge modulo 10 ist hier gleich 3.

Aufgabe 19 Es sei $m \in \mathbb{N}$ eine fixierte natürliche Zahl.
(a) Beweise, dass es eine FIBONACCI-Zahl a_n gibt, die durch m teilbar ist.
(b) Zeige, dass es eine FIBONACCI-Zahl gibt, die auf m Neunen endet.

Beweis: (a) Wir betrachten wieder sämtliche Paare von Resten (a_n, a_{n+1}) modulo m. Da es höchstens $m \times m = m^2$ solcher Paare gibt, ist die Periodenlänge von $(a_n \pmod m)$ höchstens m^2. Nun ist aber

$$a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad a_{-2} = -1.$$

Daher treten die Reste 0, 1 und -1 modulo m stets auf.
(b) Man betrachte als Modul 10^m und die Folgenglieder, welche kongruent -1 modulo 10^m sind. $\square$

Aufgabe 20 Wie lautet die Einerziffer von a_{2005} bei der Fibonacci-Folge (a_n)?

Aufgabe 21 Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist gegeben durch die Anfangsbedingungen $a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{3}$ und die Rekursionsbeziehung

$$a_n = \frac{2}{3}\, a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass es ein Folgenglied $a_n > 0,99999$ gibt.

Lösung: Die charakteristische Gleichung der linearen Rekursion zweiter Ordnung $q^2 = \frac{2}{3}q - 1$ hat die komplexen Wurzeln

$$q_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{9}{9}} = \frac{1}{3}\left(1 \pm 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Man beachte, dass $q_1 q_2 = 1$ und $q_2 = \overline{q_1}$, $q = q_1$, beide auf dem Einheitskreis liegen. Der Ansatz $a_n = A q_1^n + B q_2^n$ führt auf $1 = A + B$ und $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}(A + B) + \frac{1}{3}\, 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\,(A - B)$ und somit auf $A = B = \frac{1}{2}$. Somit gilt

$$a_n = \frac{1}{2}\left(q^n + \overline{q^n}\right) = \mathsf{Re}\,(q^n).$$

Ist $q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ eine N-te Einheitswurzel, so ist $a_N = 1$ und die Behauptung ist gezeigt. Ist hingegen φ kein rationales Vielfaches vom 2π, etwa $\varphi = 2\pi\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ stets $N, M \in \mathbb{N}$, so dass $0 < N\alpha - M < \varepsilon$ (rationale Zahlen sind dicht in $\mathbb{R}$ und approximieren die irrationalen). Somit gilt $2\pi M < N\varphi < 2\pi M + 2\pi\varepsilon$. Das liefert

$$\mathsf{Re}\,\left(\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\varepsilon}\right) < \mathsf{Re}\, q^N < 1.$$

und beweist die Behauptung, da die linke Seite beliebig dicht an 1 heran kommt.

Aufgaben aus dem bulgarischen Aufgabenbuch

§3 Folgen, Nr. 2 Rekursive Folgen.

Aufgabe 22 (A 150, schwer) Es sei x_n eine rekursive Folge von Polynomen in x, gegeben durch

$$x_{n+1} = x \cdot x_n - x_{n-1}, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = x.$$

Beweisen Sie, dass das Polynom

$$(x^2 - 4)(x_n^2 - 4)$$

ein vollständiges Quadrat ist.

Beweis: Das Auflösen der Rekursion liefert $x_n = q_1^n + q_2^n$, wobei

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2 - 4}\right)$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $q^2 - xq + 1 = 0$ sind. Somit gilt

$$x_n^2 - 4 = (q_1^n + q_2^n)^2 = q_1^{2n} + 2 + q_2^{2n} - 4 = (q_1^n - q_2^n)^2 = (q_1 - q_2)^2(q_1^{n-1} + q_1^{n-2}q_2 + \cdots + q_2^{n-1})^2.$$

Weil $(q_1 - q_2)^2 = x^2 - 4$ und $x_n^2 - 4$ beides Polynome sind, ist auch

$$A(x) = q_1^{n-1} + q_1^{n-2}q_2 + \cdots + q_2^{n-1}$$

ein Polynom mit ganzen Koeffizienten (Welche Rekursion?). Also gilt

$$(x^2 - 4)(x_n^2 - 4) = (x^2 - 4)^2 A(x)^2 = ((x^2 - 4)A(x))^2.$$

□

Aufgabe 23 (A 149) Die Folge a_n sei gegeben durch $a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 4$, $a_2 = 14$. Beweisen Sie, dass das Dreieckk mit den Seitenlängen $a_n - 1$, a_n, $a_n + 1$ einen ganzzahligen Flächeninhalt besitzt.

Beweis: Das folgt mit der HERONschen Dreieicksformel und der obigen A 150 mit $x = 4$. □

Aufgabe 24 (A 153) Beweisen Sie, dass es genau eine Folge $(a_0, a_1, \dots)$ von positiven Zahlen gibt mit $a_0 = 1$ und $a_{n+2} = -a_{n+1} + a_n$.

Beweis: In der expliziten Darstellung $a_n = Aq_1^n + Bq_2^n$ mit $q_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$ ist $0 < q_1 < 1$ und $q_2 < -1$. Daher muss der Koeffizient B vor q_2^n verschwinden und es bleibt $A = 1$ wegen $a_0 = 1 = Aq_1^0$. □

Aufgabe 25 (A 168) Es sei (a_n) eine Folge mit $0 \le a_n \le 1$ und $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man beweise, dass $0 \le a_n - a_{n+1} \le \frac{2}{n+1}$.

Aufgabe 26 (MO 331336) Man ermittle für jede natürliche Zahl n die größte Zweierpotenz, die ein Teiler der Zahl $\left[(4+\sqrt{18})^n\right]$ ist.
Hinweis. Für eine reelle Zahl r bezeichnet $[r]$ die größte ganze Zahl, kleiner oder gleich r, also $[r] \le r < [r] + 1$ und $[r] \in \mathbb{Z}$.

Lösung : Es sei $a_n = (4+\sqrt{18})^n + (4-\sqrt{18})^n$. Dann gilt $a_0 = 2$, $a_1 = 8$ und $a_{n+2} = 8a_{n+1} + 2a_n$, $n \ge 2$. Wegen $-1 < 4 - \sqrt{18} < 0$ ist $b_n = (4+\sqrt{18})^n$ für gerades n immer etwas kleiner und für ungerades n immer etwas größer als die nächstgelegene ganze Zahl a_n. Da a_n immer gerade ist, ist $[b_n]$ für gerades n immer ungerade. Für ungerades $n = 2k-1$ vermutet man nach erstem Probieren, dass die maximale Zweierpotenz 2^{k+2} ist und in a_{2k} ist sie 2^{k+1}. Dies beweist man mit vollständiger Induktion mittels Rekursionsformel.

Aufgabe 27 (MO 381323) Eine Zahlenfolge (x_n) sei durch das rekursive Bildungsgesetz

$$x_{n+1} = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) x_n^2 - \frac{n^3}{3} + 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und ihr Anfangsglied $x_1 = 1$ gegeben. Bestimmen Sie x_{1999}.

Aufgabe 28 (60th William Putnam Mathematical Competition 1999) A-3. Betrachten Sie die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_m$$

für ein gewissens $m \in \mathbb{N}$.

Lösung : Man hat für (a_n) die Rekursion 2.Ordnung:

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2.$$

Definiert man $b_{2n} := a_n^2 + a_{n-1}^2$ und $b_{2n+1} := a_n(a_{n-1} + a_{n+1})$, so hat man $2b_{2n+1} + b_{2n} = b_{2n+2}$ und $2b_{2n} + b_{2n-1} = b_{2n+1}$, so dass (b_n) dieselbe Rekusion wie (a_n) erfüllt. Ferner ist $b_0 = 1$ und $b_1 = 2$ und damit $a_n = b_n$.

Literatur

[Eng98] A. Engel. *Problem-solving strategies*. Springer, New York, 1998.

[Mar77] A. I. Markuschewitsch. *Rekursive Folgen*. Number xi in Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 4 edition, 1977.

[Wor77] N. N. Worobjow. *Die Fibonaccischen Zahlen*. Number 1 in Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1977.

Attribution Section

schueler (2005-04-14): Contributed to KoSemNet