Komplexe Zahlen

Axel Schüler, Leipzig

schueler@mathematik.uni-leipzig.de

Juli 2003

Da die komplexen Zahlen nicht mehr im Lehrplan stehen, sollen hier die Grundlagen gelegt werden. Eine sehr schöne Einführung liefert das Buch von Pieper [1]. Ein weiterer Beitrag, der die geometrischen Anwendungen der komplexen Zahlen veranschaulicht, ist unter dem Titel „Komplexe Zahlen und Geometrie“ in der Kleinen Mathematischen Bibliothek zu finden.

1 Einführung der komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen als Zahlenpaare

Einige algebraische Gleichungen, wie etwa die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 8 = 0$, haben keine Lösungen im Bereich der reellen Zahlen. Die Lösungsformel liefert formal

$$x_1 = 2 + \sqrt{-4} \quad \text{und} \quad x_2 = 2 - \sqrt{-4}.$$

Wir werden sehen, dass dies trotzdem noch sinnvoll ist.

Definition 1 Eine *komplexe Zahl* ist ein geordnetes Paar (a, b) reeller Zahlen. „Geordnet“ bedeutet, dass $(a, b) \neq (b, a)$ falls $a \neq b$. Zwei komplexe Zahlen $x = (a, b)$ und $y = (c, d)$ heißen gleich, genau dann wenn $a = c$ und $b = d$. Wir definieren die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen wie folgt:

$$x + y := (a + c, b + d),$$
$$x \cdot y := (ac - bd, ad + bc).$$

Wir bezeichnen die Menge der komplexen Zahlen mit $\mathbb{C}$. Mit diesen Operationen werden die komplexen Zahlen ein *Körper*, d. h., die Addition und die Multiplikation sind assoziativ und kommutativ und sie sind miteinander verträglich, es gilt das Distributivgesetz: $z(u + v) = zu + zv$. Außerdem sind Addition und Multiplikation umkehrbar. Wir können subtrahieren und (außer durch 0) dividieren. Das neutrale Element der Addition, die Null, ist $(0, 0)$ und das neutrale Element der Multiplikation, die Eins, ist $(1, 0)$.

Falls $x = (a, b)$, so ist $-x = (-a, -b)$ und $\dfrac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. In der Tat gilt mit dieser Zahl $x \cdot 1/x = 1$.

Bemerkung. Für beliebige reelle Zahlen a und b gilt $(a, 0)+(b, 0) = (a+b, 0)$ und $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$. Dies zeigt, dass die komplexen Zahlen der Gestalt $(a, 0)$ die selben arithmetischen Eigenschaften haben wie die entsprechenden reellen Zahlen a. Wir können daher $(a, 0)$ mit a identifizieren. Dies liefert uns eine Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen Zahlen. Allerdings verliert man eine Eigenschaft der reellen Zahlen: man kann die komplexen Zahlen nicht anordnen; es gibt keine vernünftige Kleiner-Relation. Man beachte, dass wir die komplexen Zahlen ohne die „mystische“ Wurzel aus -1 eingeführt haben. Wir wollen nun zeigen, dass die komplexe Zahl (a, b) dasselbe ist wie $a + b\,\mathrm{i}$.

Definition 2 $\mathrm{i} = (0, 1)$.

Satz 1

(a) $\mathrm{i}^2 = -1$.

(b) Falls $a, b \in \mathbb{R}$, *dann ist* $(a, b) = a + b\,\mathrm{i}$.

Beweis: (a) $\mathrm{i}^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
(b) $a + b\,\mathrm{i} = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$. $\square$

Konjugiert komplexe Zahlen. Der Betrag einer komplexen Zahl

Definition 3 Sind a, b reelle Zahlen und $z = a + b\,\mathrm{i}$, dann heißt $\overline{z} := a - b\,\mathrm{i}$ die zu z *konjugiert-komplexe* Zahl. Die Zahlen a und b heißen *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von z und wir bezeichnen sie mit $a = \mathsf{Re}\, z$ bzw. $b = \mathsf{Im}\, z$.

Satz 2 *Sind z und w komplexe Zahlen, dann gilt*

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(c) $z + \overline{z} = 2\,\mathsf{Re}\, z$, $z - \overline{z} = 2\,\mathrm{i}\,\mathsf{Im}\, z$,

(d) $z\,\overline{z}$ *ist reell und nichtnegativ.*

Definition 4 Ist z eine komplexe Zahl, dann heißt $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ der*absolute Betrag* von z.

Für reelle Zahlen stimmt diese Definition mit der gewöhnlichen Betragsfunktion überein, denn für $x > 0$ ist $\sqrt{x\,\overline{x}} = \sqrt{x^2} = x$ und für $x < 0$ ist $\sqrt{x\,\overline{x}} = \sqrt{x^2} = -x$.

Satz 3 *Es seien z und w komplexe Zahlen. Dann gilt*

(a) $|z| > 0$ *außer für* $z = 0$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$,

(c) $|zw| = |z|\,|w|$,

(d) $|\mathsf{Re}\, z| \leq |z|$,

(e) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Beweis: (a) und (b) sind einfach. Es sei $z = a+b\,\mathrm{i}$ und $w = c+d\,\mathrm{i}$, mit reellen Zahlen a, b, c, d. Dann gilt

$$|zw|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z|^2\,|w|^2$$

oder $|zw|^2 = (|z|\ |w|)^2$. Nun folgt (c) durch Wurzelziehen.
Zum Beweis von (d) beachte man, dass $a^2 \leq a^2 + b^2$, also

$$|a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|\,.$$

Für (e) beachte man, dass $\overline{z}\,w$ konjugiert zu $z\,\overline{w}$ ist, so dass $z\,\overline{w} + \overline{z}w = 2\mathsf{Re}\,(z\,\overline{w})$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\,\overline{z} + z\,\overline{w} + \overline{z}\,w + w\,\overline{w}\\ &= |z|^2 + 2\mathsf{Re}\,(z\,\overline{w}) + |w|^2\\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\ |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.\end{aligned}$$

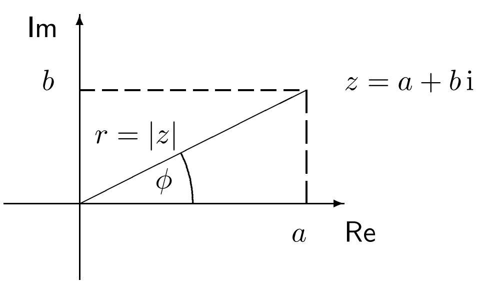
Schließlich folgt (e) durch Wurzelziehen. $\square$

Geometrische Bedeutung von Konjugation und Betrag

Spiegelt man eine komplexe Zahl $z = a+b\,\mathrm{i}$ an der reellen Achse, so erhält man die konjugierte Zahl $\overline{z} = a - b\,\mathrm{i}$. Der Betrag von z ist die Länge der Strecke vom Nullpunkt bis z. Nach dem Satz des Pythagoras ist also $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ oder $|z|^2 = z\overline{z}$. Offenbar ist z reell gdw. $z = \overline{z}$. Den Realteil a bzw. Imaginärteil b der komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ erhält man mit Hilfe der komplexen Konjugation wie folgt: $\mathsf{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ bzw. $\mathsf{Im}\,(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(z - \overline{z})$.

2 Die trigonometrische Form der komplexen Zahlen

Es gibt eine eineindeutige Beziehung zwischen den komplexen Zahlen und den Punkten der Ebene. Diese Ebene heißt dann *Gaußsche Zahlenebene.*



Nach dem Satz des Pythagoras ist $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ der Abstand der Zahl z vom Nullpunkt 0.
Den Winkel φ zwischen der positiven reellen Achse und dem Strahl $0z$ bezeichnen wir als *Argument* von z und schreiben $\varphi = \arg z$. Falls $z \neq 0$, ist das Argument φ durch z eineindeutig bis auf ein additives Vielfaches von $360°$ bestimmt.

Von der Elementargeometrie her ist klar, dass

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}.$$

Das heißt, mit $r = |z|$ haben wir $a = r\cos\varphi$ und $b = r\sin\varphi$. Setzt man dies in die kartesische Form $z = a + b\,\mathrm{i}$ ein, so hat man

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi). \tag{1}$$

Dies ist die *trigonometrische Form* von z oder *Polarkoordinatenform* von z.

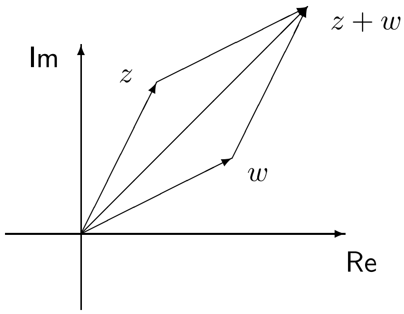
Beispiel 1

a) $z = 1 + \mathrm{i}$. Dann ist $|z| = \sqrt{2}$ und $\sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \cos\varphi$. Hieraus folgt $\varphi = \pi/4$.
Also ist die trigonometrische Form von z gleich $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + \mathrm{i}\sin\pi/4)$.

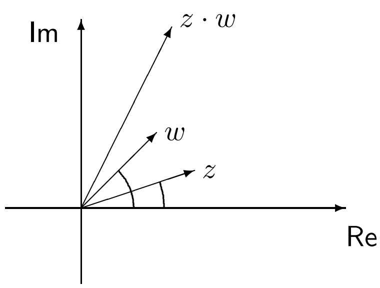
b) $z = -\mathrm{i}$. Es ist $|-\mathrm{i}| = 1$ und $\sin\varphi = -1$, $\cos\varphi = 0$.
Somit ist $\varphi = 3\pi/2$ und $-\mathrm{i} = 1(\cos 3\pi/2 + \mathrm{i}\sin 3\pi/2)$.

c) Die Berechnung von Real- und Imaginärteil aus den Polarkoordinaten ist einfacher:

$$z = 32(\cos 7\pi/6 + \mathrm{i}\sin 7\pi/6) = 32(-\sqrt{3}/2 - \mathrm{i}/2) = -16\sqrt{3} - 16\,\mathrm{i}.$$



Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition in der Ebene. Die geometrische Bedeutung der Ungleichung $|z + w| \le |z| + |w|$ lautet: die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite.



Die Multiplikation der komplexen Zahlen $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ und $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ in ihrer trigonometrischen Form liefert

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \\ &= rs(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \\ &\qquad\qquad \mathrm{i}(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ zw &= rs(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus ausnutzten.

Der Betrag eines Produkts komplexer Zahlen ist also das Produkt der Beträge, und das Argument des Produktes ist die Summe der Argumente.

Die geometrische Bedeutung der Multiplikation mit $w = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung der komplexen Ebene auf sich: Zunächst wird um den Nullpunkt um φ gedreht und dann mit dem Faktor r und Zentrum 0 gestreckt (oder gestaucht).

Analog erhält man für den Quotienten von komplexen Zahlen, falls $w \neq 0$,

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\left(\cos(\varphi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi-\psi)\right). \tag{3}$$

Satz 4 (Moivresche Formel) *Es sei $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ eine komplexe Zahl mit dem Betrag r und dem Argument φ. Dann gilt für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)). \tag{4}$$

Beweis: (a) Zunächst sei $n > 0$. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion über n. Für $n = 1$ gibt es nichts zu zeigen. Angenommen (4) gilt für ein festes n. Dann zeigen wir die

Behauptung für $n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung und (2) gilt

$$\begin{aligned} z^{n+1} = z^n \cdot z &= r^n(\cos(n\varphi) + \text{ i } \sin(n\varphi))r(\cos\varphi + \text{ i } \sin\varphi) \\ &= r^{n+1}(\cos(n\varphi + \varphi) + \text{ i } \sin(n\varphi + \varphi)). \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.
(b) Nun sei $n < 0$. Dann ist $z^n = 1/(z^{-n})$. Wegen $1 = 1(\cos 0 + \text{ i } \sin 0)$, (3) und dem Ergebnis von (a) haben wir

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}}\,(\cos(0 - (-n)\varphi) + \text{ i } \sin(0 - (-n)\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + \text{ i } \sin(n\varphi)).$$

Damit ist der Beweis erbracht. $\square$

Beispiel 2 Bestimme die trigonometrische Form von $z = \sqrt{3} - 3\,\mathrm{i}$ und berechne z^{15}.
Wir haben $|z| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, $\cos\varphi = 1/2$ und $\sin\varphi = -\sqrt{3}/2$. Daher ist $\varphi = -\pi/3$ und $z = 2\sqrt{3}(\cos(-\pi/3) + \sin(-\pi/3))$. Nach der Moivreschen Formel haben wir

$$\begin{aligned} z^{15} &= \left(2\sqrt{3}\right)^{15}\left(\cos\left(-15\frac{\pi}{3}\right) + \text{ i } \sin\left(-15\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{15}3^7\sqrt{3}\,(\cos(-5\pi) + \text{ i } \sin(-5\pi)) \\ z^{15} &= -2^{15}3^7\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3 Wurzeln komplexer Zahlen

Es sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Eine komplexe Zahl w heißt *n-te Wurzel aus z*, falls $w^n = z$. Im Gegensatz zu den positiven reellen Zahlen sind die Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht eindeutig bestimmt. Wir werden sehen, dass es genau n verschiedene Wurzeln gibt für jedes $z \neq 0$.
Es sei $z = r(\cos\varphi + \text{ i } \sin\varphi)$ gegeben, und $w = s(\cos\psi + \text{ i } \sin\psi)$ sei eine n-te Wurzel aus z. Nach der Moivreschen Formel ist dann $w^n = s^n(\cos n\psi + \text{ i } \sin n\psi)$. Ein Vergleich von w^n und z ergibt $s^n = r$ oder $s = \sqrt[n]{r} \geq 0$. Ferner ist $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ bzw.

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

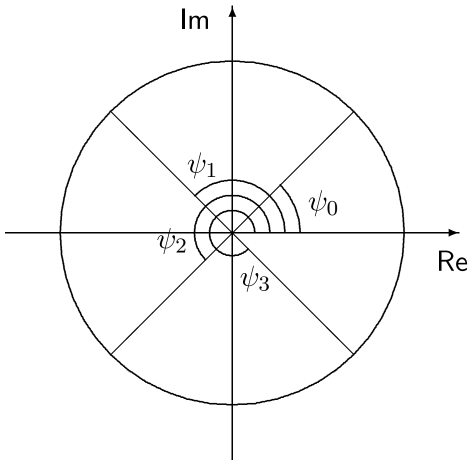
Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ erhalten wir *verschiedene* Werte $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ modulo 2π. Wir fassen dies zusammen.

Satz 5 *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = r(\cos\varphi + \text{ i } \sin\varphi) \neq 0$ eine komplexe Zahl. Dann sind die n Zahlen*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \text{ i } \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

genau die n verschiedenen n-ten Wurzeln aus z.

Beispiel 3 Berechne die vierten Wurzeln aus $z = -1$.



$$|z| = 1 \Rightarrow \quad |w| = \sqrt[4]{1} = 1, \; \arg z = \varphi = 180°.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \frac{\varphi}{4} = 45°,\\
\psi_1 &= \frac{\varphi}{4} + \frac{1 \cdot 360°}{4} = 135°,\\
\psi_2 &= \frac{\varphi}{4} + \frac{2 \cdot 360°}{4} = 225°,\\
\psi_3 &= \frac{\varphi}{4} + \frac{3 \cdot 360°}{4} = 315°.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos 45° + \mathrm{i} \sin 45° &&= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\\
w_1 &= \cos 135° + \mathrm{i} \sin 135° &&= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sqrt{2},\\
w_2 &= \cos 225° + \mathrm{i} \sin 225° &&= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sqrt{2},\\
w_3 &= \cos 315° + \mathrm{i} \sin 315° &&= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation der n-ten Wurzeln

Die n-ten Wurzeln von $z \neq 0$ bilden ein reguläres n-Eck in der komplexen Ebene. Die Ecken liegen alle auf einem Kreis um 0 mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$.
Als *n-te Einheiswurzeln* bezeichnet man die n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, also die n Zahlen

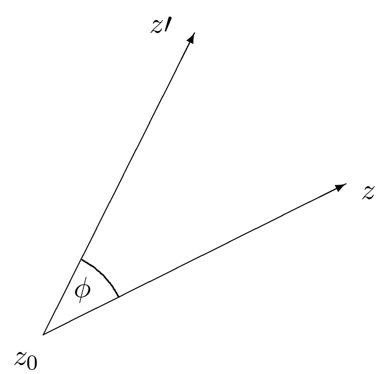
$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Diese Zahlen liegen auf dem Einheitskreis und es ist $w_0 = 1$.

Etwas Geometrie. Ein *Kreis* mit Radius r um den Punkt z_0 der Ebene ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = r$.
Eine *Gerade* durch z_1 und z_2 ist die Menge

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{z - z_1}{z - z_2} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine *Drehung* von z um z_0 um den Winkel φ entgegen dem Uhrzeiger: $z' - z_0 = (z - z_0)(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$



Aufgaben

Aufgabe 1 Berechne

$$\textbf{(a)}\ (1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}), \qquad \textbf{(b)}\ \frac{1}{1+\mathrm{i}}\,\frac{12-5\,\mathrm{i}}{5+12\,\mathrm{i}}, \qquad \textbf{(c)}\ \left(1+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^{2003}.$$

Aufgabe 2 Löse die folgenden Gleichungen:

$$\textbf{(a)}\ z^2+2\,\mathrm{i}=0. \qquad \textbf{(b)}\ z^2+3(1+\mathrm{i})z+5\,\mathrm{i}=0.$$

Aufgabe 3 Für $z\,\overline{z}=1$ berechne man $|1+z|^2+|1-z|^2$.

Aufgabe 4 Es seien $z_1,\ldots,z_n$ komplexe Zahlen. Beweise:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+\cdots+|z_n|\,.$$

Aufgabe 5 **(a)** Berechne den Realteil, den Imaginärteil und den absoluten Betrag der komplexen Zahlen

$$(1-7\,\mathrm{i})(4+3\,\mathrm{i}), \quad \frac{2+3\,\mathrm{i}}{1-4\,\mathrm{i}}, \quad (1-7\,\mathrm{i})^2, \quad 5\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

(b) Bestimme die trigonometrische Form von

$$-2\,\mathrm{i}\,, \quad 1-\mathrm{i}\,, \quad -\sqrt{3}-\mathrm{i}\,.$$

Aufgabe 6 Welche Teilmengen der komplexen Ebene werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben?

$$\textbf{(a)}\ |z-1|\le 3, \qquad \textbf{(b)}\ (z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})\ge 1, \qquad \textbf{(c)}\ z+\overline{z}\ge -1.$$

Aufgabe 7 Benutze die Moivresche Formel um

$$\cos(3\alpha), \quad \sin(4\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(5\alpha)$$

durch $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ auszudrücken.
Schreibe $\cos 18^\circ$ und $\sin 202{,}5^\circ$ als Wurzelausdruck.

Aufgabe 8 Für welche $z\in\mathbb{C}$ gilt

$$\textbf{(a)}\ z^6+8\,\mathrm{i}=0, \qquad \textbf{(b)}\ z^2+\mathrm{i}=0.$$

Aufgabe 9 Finde den Fehler in der folgenden Rechnung: Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a>b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-b} &= \sqrt{(-1)(b-a)} = \sqrt{-1}\sqrt{b-a}\\
\sqrt{a-b} &= \sqrt{-1}\sqrt{(-1)(a-b)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{a-b} \qquad \Big|\cdot\frac{1}{\sqrt{a-b}}\\
1 &= \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \mathrm{i}^2\\
1 &= \mathrm{i}^2.
\end{aligned}$$

Literatur

[1] H. Pieper, *Die komplexen Zahlen. Theorie – Praxis – Geschichte*, Mathematische Schülerbücherei, no. 110, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991.

Attribution Section

schueler (2004-09-14): Contributed to KoSemNet
graebe (2004-09-14): Prepared along the KoSemNet rules
graebe (2005-02-02): editorial revision