Trugschlüsse im Zusammenhang mit dem Begriff der Stetigkeit

Wolfgang Moldenhauer und Axel Schüler

Juli 2002

Durch den ständigen Umgang mit stetigen Funktionen im Unterricht vergisst die Mehrzahl der Schüler, dass es Funktionen gibt, die diese Eigenschaft nicht haben. Im Folgenden möchten wir für einen daraus entstehenden Trugschluss ein Beispiel vorstellen. Die Anregung für diese Arbeit verdanken wir einer Arbeit von Ilse (s. [3]) und dem besagten Trugschluss der Schüler. Für die Schüler eines Korrespondenzzirkels bestand die Aufgabe, folgenden Satz zu beweisen:

> Es seien f und g für alle reellen Zahlen definierte Funktionen. f sei periodisch mit der rationalen Periode a und g periodisch mit der irrationalen Periode b. Man zeige, dass die Funktion $f+g$ genau dann periodisch ist, wenn f oder g konstant ist.

Wir wollen zunächst die Schülerlösung vorstellen und dann anschließend Fehler aufdecken. Es besteht somit für den interessierten Leser die Möglichkeit, bei der Fehlersuche seine Kenntnisse zu überprüfen.
Es liegt eine *genau-dann-wenn*-Aussage vor, so dass der Beweis aus zwei Teilen besteht:

Schülerbeweis

1. Ist f oder g konstant, so ist $f+g$ periodisch.
Dieser Nachweis gelingt leicht. Es sei O. B. d. A. $f(x)=c$ (c sei konstant), so ist

$$F(x)=f(x)+g(x)=c+g(x)=c+g(x+b)=f(x+b)+g(x+b)=F(x+b),$$

d. h. $f+g$ ist periodisch mit der Periode b.
2. Ist $f+g$ periodisch, so ist f oder g konstant.
Diese Beweisführung ist aufwändiger. Es sei $F(x)=f(x)+g(x)$ periodisch mit der Periode c. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&F(x+c)=f(x+c)+g(x+c)=F(x)=f(x)+g(x) \quad \text{bzw.}\\ &f(x+c)-f(x)+g(x+c)-g(x)=0.\end{aligned}$$

Wir setzen $f_1(x)=f(x+c)-f(x)$ und $g_1(x)=g(x+c)-g(x)$ und leiten einige Eigenschaften dieser neuen Funktionen her.

I. f_1 ist mit der Periode a periodisch, da

$$f_1(x+a) = f(x+a+c) - f(x+a) = f(x+c) - f(x) = f_1(x) \quad \text{ist.}$$

II. g_1 ist periodisch mit der Periode b, da (analog)

$$g_1(x+b) = g(x+b+c) - g(x+b) = g(x+c) - g(x) = g_1(x) \quad \text{gilt.}$$

III. f_1 ist periodisch mit der Periode b. Nach Definition ist für alle reellen Zahlen x:

$$f_1(x) + g_1(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f_1(x) = -g_1(x).$$

Man überzeugt sich schnell, dass der Vorzeichenwechsel die Periode b von g_1 erhält.

Damit hat die Hilfsfunktion f_1 die Perioden a und b.
Nun gilt bekanntlich der folgende Satz:

Satz 1 *Ist eine nicht konstante Funktion periodisch, so hat sie eine kleinste Periode. Jede andere Periode ist ein ganzzahliges Vielfaches dieser kleinsten Periode.*

Wenden wir diesen Satz auf f_1 an, wobei f_1 nicht konstant sei, so folgt: f_1 hat eine kleinste Periode, die mit e bezeichnet sei. Weiter gibt es ganze Zahlen m und n $(m, n \neq 0)$ derart, dass $a = me$ und $b = ne$ gilt. Hieraus ergibt sich $an = bm$. Diese Gleichung stellt einen Widerspruch zur Irrationalität von b dar. Damit ist f_1 konstant.
Somit ist $f(x+c) - f(x) = p$, wobei p eine Konstante ist. Ist $p \neq 0$, so ist für ein festes x_0 (wie man durch vollständige Induktion zeigt) $f(x_0+kc) = f(x_0)+kp$, wobei k eine natürliche Zahl ist.Wenn wir k beliebig groß werden lassen, dann wächst die rechte Seite der Gleichung für ein festes x_0 über alle Grenzen und dies bedeutet, dass f nicht periodisch sein kann.
Damit verbleibt nur der Fall $p = 0$. Hieraus ergibt sich sofort $f(x+c) = f(x)$. Wir können davon ausgehen, dass f nicht konstant ist. f hat aber, wie wir eben nachgewiesen haben, neben a noch die Periode c. Infolge des oben zitierten Satzes ergibt sich hieraus, dass c rational sein muss. Da aber $g_1(x) = -f_1(x) = 0 = g(x+c) - g(x)$ ist, hat g neben der irrationalen Periode b auch die rationale Periode c. Auf Grund des oben zitierten Schlusses ergibt sich sofort, dass g konstant ist.
Damit ist der Schülerbeweis aufgeführt.

Kritische Bemerkungen zur Schülerlösung

Betrachten wir die Funktionen:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x = a + b\sqrt{2}; a,\, b \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f hat als Periode die irrationale Zahl $\sqrt{2}$. Ist nämlich $x = a + b\sqrt{2}$, so ist auch $x + \sqrt{2} = a + (b+1)\sqrt{2}$, d. h. $f(x+\sqrt{2}) = f(x) = 1$. Ist aber $x \neq a + b\sqrt{2}$, so ist auch $x + \sqrt{2} \neq a + (b+1)\sqrt{2}$ und es ist $f(x+\sqrt{2}) = f(x) = 0$.
Die Funktion g hat eine rationale Periode nämlich 1, da (analog) wegen $x+1 = (a+1)+b\sqrt{2}$ für $x = a + b\sqrt{2}$ auch $g(x+1) = g(x) = 1$ folgt. Ist jedoch $x \neq a + b\sqrt{2}$, so ist auch $x+1 \neq (a+1) + b\sqrt{2}$ und somit $g(x+1) = g(x) = 0$.

Die Funktion $f + g$ hat die Perioden 1 und $\sqrt{2}$, wie man leicht durch analoge Betrachtungen einsieht, aber weder f noch g sind konstant.

Wir haben somit ein Gegenbeispiel konstruiert, so dass die Aussage des zu beweisenden Satzes nicht richtig sein kann. Folglich müssen wir in dem angegebenen Beweis mindestens einen Fehler gemacht haben.

Hierzu bemerken wir:

I. Die zitierte Aussage ist falsch. Sie gilt zwar für *stetige* Funktionen, siehe Hilfssatz 1 unten, ist aber ohne diese Voraussetzung der Stetigkeit falsch. Wir betrachten dazu die im Gegenbeispiel angegebene Funktion f. Diese Funktion hat keine kleinste Periode, da jede Zahl der Form $s + t\sqrt{2}$ mit $s, t \in \mathbb{Q}$ eine Periode von f ist.

Auch dass alle Perioden ganzzahlige Vielfache einer gewissen Periode seien, ist falsch, da f gleichzeitig die Perioden $\sqrt{2}$ und 1 hat, die bekanntlich keine rationalen Vielfachen voneinander sind. Damit lässt sich dann auch nicht $f_1 = p$ (p ist konstant) im Beweis folgern.

II. Aus der Beziehung $f(x + c) - f(x) = p \neq 0$ wird im Schülerbeweis gefolgert, dass f nicht periodisch sein kann. Auch dies ist falsch, wie wir durch ein Gegenbeispiel nachweisen werden. Wiederum gilt dies aber für *stetige* Funktionen, was leicht aus dem Hilfssatz 2 folgt. Doch zuvor wollen wir noch einen anderen Zusammenhang aufdecken. Interpretieren wir p als $f(y)$ und c als y, so erhalten wir die Cauchysche Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, die bekanntlich eine große Vielfalt von unstetigen Lösungen besitzt (siehe [1, 2, 3]). Eine sehr elementare Einführung in die Theorie der Cauchyschen Funktionalgleichung bietet das Buch von Sprengel und Wilhelm (siehe [4]).

Damit ist nun die Existenz eines solchen Gegenbeispiels verständlich. Die Konstruktion werden wir für den Spezialfall $c = \sqrt{2}$ und $p = 1$ durchführen. Der interessierte Leser kann die Konstruktion leicht selbst auf den allgemeinen Fall übertragen.

Definition 1 Für zwei reelle Zahlen a und b gilt $a \sim b$, wenn $a - b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist, wobei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen ist.

Bemerkung 1 Jedes Element $w \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kann eindeutig als $w = u+v\sqrt{2}$ dargestellt werden, wobei u und v rationale Zahlen sind.

Durch die in der Definition vorgestellte Relation wird eine Äquivalenzklasseneinteilung vorgenommen. Dazu ist notwendig, dass wir Folgendes zeigen:

1. $x \sim x$
2. Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$.
3. Ist $x \sim y$ und $y \sim z$, so ist auch $x \sim z$.

Diese elementaren Überlegungen führen wir hier nicht aus. Unter Benutzung des Auswahlaxioms betrachten wir nun ein vollständiges System M von Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen. Somit gibt es zu jedem x eine Klasse und damit auch genau einen Repräsentanten y aus M mit der Eigenschaft $x \sim y$. Ist nun $x = y + a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$, so definieren wir $f(x) = b$.

Damit haben wir die Funktion f in Abhängigkeit von der Auswahl der Repräsentanten aus M für jedes reelle x eindeutig definiert. Wir behaupten nun:

1. Es gilt $f(x + \sqrt{2}) - f(x) = 1$, und
2. f ist periodisch.

Beweis. Zunächst ist $x = y + a + b\sqrt{2}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ und weiter $x + \sqrt{2} = y + a + (b+1)\sqrt{2}$, also $f(x) = b$ und $f(x + \sqrt{2}) = b + 1$; es gilt also die erste Behauptung. Es verbleibt der Nachweis der Periodizität.

Für die reellen Zahlen x und $x + 1$ finden wir in M den gleichen Repräsentanten y. Folglich ist $x = y + a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ und somit $x + 1 = y + (a + 1) + b\sqrt{2}$. Infolge der Definition von f erhalten wir somit $f(x) = f(x + 1)$ für alle reellen Zahlen x, d. h. die Funktion f ist periodisch. Damit ist der Beweis geführt.

Ergebnis: Bei der Untersuchung einiger Eigenschaften periodischer Funktionen kann man ohne die Voraussetzung der Stetigkeit und oberflächlicher Betrachtung leicht einigen Trugschlüssen unterliegen.

In der Klassenstufe 10/11 wurde im Mathematik-Spezialistencamp in Ilmenau im Sommer 2002 die folgende Aufgabe zur Mathematik-Olympiade gestellt.

Aufgabe 1 Es sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2+\tan^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{cases}$$

Man beweise: $F(x) = f(x) + f(ax)$ ist genau dann periodisch, wenn a rational ist.

Lösung: 1. Es sei a rational, also $a = p/q$ mit $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$F(x + q\pi) = f(x + q\pi) + f(p/q(x + q\pi)) = f(x) + f(ax + p\pi) = f(x) + f(ax) = F(x),$$

weil f periodisch mit der Periode π ist. F ist also periodisch.

2. Es sei nun F periodisch. Dann gibt es eine reelle Zahl $p \neq 0$, so dass $F(x + p) = F(x)$ für alle reellen Zahlen x. Insbesondere gilt für $x = 0$:

$$F(p) = f(p) + f(ap) = F(0) = f(0) + f(0) = 1.$$

Da nach Definition $f(x) \leq 1/2$, gilt diese Gleichung nur dann, wenn $\tan^2 p = \tan^2(ap) = 0$, also $\tan p = \tan(ap) = 0$ gilt. Damit gibt es ganze Zahlen $r \neq 0$ und $s \in \mathbb{Z}$, so dass $p = r\pi$ und $ap = s\pi$. Die Division liefert $a = r/s$; also ist a rational.

Die Aufgabe legt die folgende Verallgemeinerung nahe.

Satz 2 *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht-konstante, periodische Funktion*
Dann ist $F(x) = f(x) + f(ax)$, $a \in \mathbb{R}$, periodisch genau dann, wenn a rational ist.

Beweis: (a) Sei $a = m/n$ rational, dann ist F periodisch mit der Periode np, falls p eine Periode von f ist:

$$F(x + np) = f(x + np) + f(ax + anp) = f(x) + f(ax + mp) = f(x) + f(ax) = F(x).$$

(b) Beim Beweis der anderen Richtung des Satzes benutzen wir den folgenden wichtigen Hilfssatz:

Lemma 1 *Eine stetige, nicht-konstante, periodische Funktion f besitzt eine kleinste positive Periode p. Alle anderen Perioden von f sind ganzzahlige Vielfache dieser kleinsten Periode p.*

Beweis: [des Hilfssatzes.] Angenommen, f hat keine kleinste positive Periode, dann findet man eine positive monoton gegen Null fallende Folge (p_n) von Perioden von f. Insbesondere ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ dann $f(mp_n) = f(p_n) = f(0) =: C$. Da p_n Nullfolge ist, gibt es sicherlich für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Folge $x_k := m_k p_{n_k}$, $m_k \in \mathbb{Z}$, die gegen x_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f ist dann aber $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(m_k p_{n_k}) = C$. Somit ist f konstant im Widerspruch zur Annahme. f hat also eine kleinste positive Periode.

Wir zeigen die zweite Aussage. Es sei q irgendeine Periode von f. Die Division mit Rest von q durch p liefert uns ein $a \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \mathbb{R}$ mit $0 \le r < p$, so dass gilt

$$q = ap + r.$$

Dann ist aber für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen der p-Periodizität und q-Periodizität von f

$$f(x) = f(x+q) = f(x+ap+r) = f(x+r).$$

Folglich ist f periodisch mit der Periode r. Da p aber nach Voraussetzung die kleinste positive Periode war, bleibt nur $r = 0$ und $q = ap$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von p. □

Wir benötigen auch noch eine zweite Aussage.

Lemma 2 *Es sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, periodische, stetige Funktion. Dann ist f beschränkt, d. h. es gibt eine positive Zahl C, so dass $|f(x)| < C$ für alle x.*

Beweis: [des Hilfssatzes.] Nach Hilfssatz 1 ist f entweder konstant (und damit beschränkt) oder aber es gibt eine kleinste positive Periode p. Angenommen, f ist nicht beschränkt, dann gibt es eine Folge (x_n) mit $|f(x_n)| \to \infty$. Die beschränkte Folge $(y_n := x_n \pmod p)$ besitzt aber eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k}) \to y_0$. Dann gilt aber $\lim_{k\to\infty} |f(y_{n_k})| = \infty$, was der Stetigkeit von f in y_0 widerspricht. Also ist f beschränkt. □

Kommen wir nun zum Beweis der zweiten Richtung der eigentlichen Aufgabe. Wir führen einen indirekten Beweis dieser zweiten Richtung.

Annahme: f ist periodisch mit kleinster Periode p, F ist periodisch mit einer Periode q und a sei irrational. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x+q) &= F(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \text{ also} \\ f(ax+aq) + f(x+q) &= f(ax) + f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man $x := x + p$ in (1) ein und beachtet, dass f periodisch mit der Periode p ist, so hat man:

$$\begin{aligned} f(ax+ap+aq) + f(x+p+q) &= f(ax+ap) + f(x+p), \\ f(ax+ap+aq) + f(x+q) &= f(ax+ap) + f(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Bildet man die Differenz (2)−(1) und bezeichnet $G(x) := f(x+ap) - f(x)$, so hat man

$$\begin{aligned} f(ax+ap+aq) - f(ax+aq) &= f(ax+ap) - f(ax), \\ G(ax+aq) &= G(ax). \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (3) ist G periodisch mit der Periode aq. Ferner ist aber G, als Summe zweier p-periodischer Funktionen (nach Definition von G) auch periodisch mit der Periode p. Natürlich ist G auch stetig. Somit gibt es entsprechend Hilfssatz 1 zwei Fälle.

Fall 1. $G(x) \equiv C$ ist konstant. Nach Definition von G ist dann aber $f(x+ap) = f(x) + C$ und ferner $f(x+kap) = f(x) + kC$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da f als stetige, periodische Funktion beschränkt ist (nach Hilfssatz 2), folgt $C = 0$ und f ist periodisch mit der Periode ap. Diese muss aber ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten Periode p sein, etwa $ap = sp$ mit $s \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $a = s \in \mathbb{Z}$ ein Widerspruch zur Irrationalität von a.

Fall 2. $G(x)$ ist nicht konstant und hat also eine kleinste positive Periode r. Also müssen die bereits nachgewiesenen Perioden p und aq ganzzahlige Vielfache dieser kleinsten Periode sein, etwa

$$aq = rs \quad \text{und} \quad p = rt \quad \text{mit } s, t \in \mathbb{Z}.$$

Nach Eleminieren von r ist dann

$$atq = ps. \tag{4}$$

Folglich ist wegen der q-Periodizität von F

$$\begin{aligned} F(x+tq) &= f(ax+atq) + f(x+tq) = f(ax+ps) + f(x+tq) \\ &= f(ax) + f(x+tq) \\ &\stackrel{!}{=} F(x) = f(ax) + f(x) \quad \text{und somit} \\ f(x+tq) &= f(x) \end{aligned}$$

Somit hat f die Periode tq, die wiederum ein ganzzahliges Vielfaches von p sein muss, etwa $tq = up$, $u \in \mathbb{Z}$. Setzt man dies in (4) ein, so hat man $a = ps/t \cdot t/(up) = s/u \in \mathbb{Q}$. Dies ist erneut ein Widerspruch zur Irrationalität von a. $\square$

Literatur

[1] Aczél, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Nummer 25 in Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften. Math. Reihe, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961

[2] Hamel, G.: Eine Basis aller reeller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Ann.* **60** (1905), 459–462

[3] Ilse, D.: Über funktionale Charakterisierungen der direkten Proportionalität $f(x+y) = f(x) + f(y)$, *Math. Schule* **9** (1971), 16–37

[4] Sprengel, H.-J. und O. Wilhelm: *Funktionen und Funktionalgleichungen*, Nummer 114 in Mathematische Schülerbücherei, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1984

Attribution Section

Der erste Abschnitt stammt ausschließlich aus einem ganz leicht geänderten Artikel von W. Moldenhauer.

Die Aufgabe wurde bei der LSGM-Mathe-Camp-Olympiade 2002 in Ilmenau von W. Moldenhauer in 11/12 in ähnlicher Weise gestellt.

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet

graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules