Baryzentrische Koordinaten

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de

Juli 2001

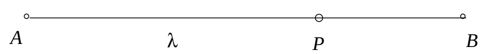
Der baryzentrische Kalkül ist einzuordnen in die affine analytische Geometrie. Den Kern dieses Kalküls bildet das *Teilverhältnis* λ eines Punktes P auf einer Geraden AB. Der Kalkül ist besonders gut geeignet, Strecken- und Flächenverhältnisse zu berechnen. Für konkrete Längenberechnungen ist er nicht geeignet. Im *reellen* baryzentrischen Kalkül lassen sich Kreise, Winkel und Orthogonalität schlecht beschreiben. Benötigt man dies, so sollte man den *komplexen* baryzentrischen Kalkül wählen. Ein Beispiel für die sinnvolle Nutzung des komplexen Kalküls findet ihr in den Aufgaben 18 und 19.

Beachtet man, dass ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ die Differenz aus seinem Endpunkt B (Ortsvektor) und seinem Anfangspunkt A (Ortsvektor) ist

$$\overrightarrow{AB} = B - A,$$

so kann man sich alle wichtigen Formeln des baryzentrischen Kalküls aus der Vektorrechnung herleiten. Es sei P ein Punkt der Geraden AB mit

$$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AB} = \lambda.$$



Dann gilt also $P - A = \lambda(B - A) = \lambda B - \lambda A$ und somit

$$P = (1 - \lambda)\, A + \lambda\, B. \qquad (1)$$

Man sagt, dass A und B die Ursprungspunkte unseres eindimensionalen reellen baryzentrischen Systems sind; A und B bilden das Koordinatensystem. Im allgemeinen haben also Gerade, Ebene und Raum ein baryzentrisches Koordinatensystem aus 2, 3 bzw. aus 4 Punkten. Lässt man in Gleichung (1) den Parameter λ die ganzen reellen Zahlen durchlaufen, dann durchläuft P alle Punkte der Geraden AB. Insbesondere werden durch $(1, 0)$, $(0, 1)$ und $(1/2, 1/2)$ die Punkte A, B bzw. der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ beschrieben. Die Punkte C und D auf AB mit $\overrightarrow{AC} : \overrightarrow{AB} = 2$ bzw. $\overrightarrow{AD} : \overrightarrow{AB} = -1$ haben dann die Koordinaten $C = (-1, 2)$ bzw. $D = (2, -1)$. *Merke:* In jedem baryzentrischen Kalkül ist die Summe aller Koordinaten stets gleich 1.

Durchläuft λ in (1) alle komplexen Zahlen, so durchläuft P alle Punkte der Ebene. Die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$ wird durch $\mathrm{Re}\,(\lambda) = 1/2$ (Realteil von λ) bestimmt; der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AB}$ wird in (1) durch $|\lambda| = 1$ gegeben.

Geradengleichungen

Die allgemeine Geradengleichung einer Geraden durch die Punkte R und S lautet $(1-t)R+tS$, $t \in \mathbb{R}$. Es seien A, B und C ein ebenes Koordinatensystem. Wir untersuchen drei wichtige Spezialfälle:

Geraden durch einen Koordinatenpunkt. Für jede Gerade durch A gilt, dass das Verhältnis der B- und C-Koordinaten eine Konstante ist.

Zum Beispiel liegt der Punkt $(0, 1/2, 1/2)$ auf der Seitenhalbierenden durch A. Hier ist das genannte Verhältnis gleich 1, also lautet die Geradengleichung der Seitenhalbierenden:

$$\left(1-t,\, \frac{t}{2},\, \frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geraden, parallel zu einer Koordinatengeraden. Bei jeder Geraden, die parallel zu BC verläuft ist die A-Koordinate konstant. Zum Beispiel hat die Gerade BC selbst die Gleichunug $a = 0$; die Parallele durch A zu BC lautet $(1, t, -t)$ und die Parallele zu BC durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ is $(1/2, 1/2-t, t)$.

Drei Punkte auf einer Geraden. Die drei Punkte $A = (a, b, c)$, $B = (p, q, r)$ und $X = (x, y, z)$ liegen genau dann auf einer gemeinsamen Geraden, wenn die entsprechende Determinante verschwindet:

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = aqz + brx + pcy - cqx - ary - pbz. \tag{2}$$

Dies liegt daran, dass eine Determinante genau dann verschwindet, wenn eine Zeile eine Linearkombination der beiden anderen ist, also etwa

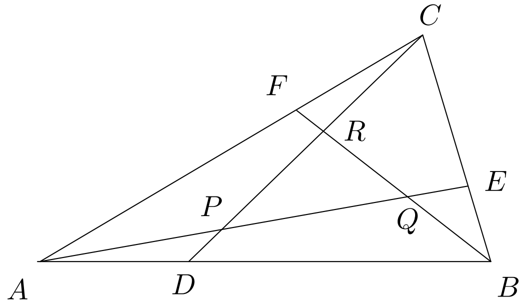
$$X = \lambda A + \mu B.$$

Wegen $a+b+c = p+q+r = x+y+z = 1$, folgt hieraus $1 = \lambda + \mu$, also $X = (1-\mu)A + \mu B$ und X liegt auf der Geraden AB. Der Vorteil von (2) ist, dass alle 3 Punkte gleichberechtigt sind und nur das Verhältnis der Koordinaten $(a : b : c)$ benötigt wird.

Aufgaben mit baryzentrischen Koordinaten

Aufgabe 1 Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC sind Punkte D, E und F so gewählt, dass sie die zugehörige Strecke im Verhältnis $1 : 2$ teilen. Die Geraden AE, BF und CD schneiden sich in den Punkten P, Q und R.

Bestimmen Sie das Verhältnis der Dreiecksflächen PQR und ABC!



Lösung. Es seien A, B und C in dieser Reihenfolge die Basispunkte unseres Koordinatensystems. Dann gilt

$$D = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad E = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad F = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right).$$

Wir bestimmen die Teilverhältnisse λ und μ für die Punkte P bzw. Q auf AE:

$$P = (1-\lambda)A + \lambda E = (1-\lambda, 2\lambda/3, \lambda/3), \quad Q = (1-\mu)A + \mu E = (1-\mu, 2\mu/3, \mu/3).$$

Die Gerade CD ist dadurch charakterisiert, dass sich die A- und die B-Koordinaten wie $2:1$ verhalten. Folglich gilt für P:

$$\frac{1-\lambda}{\frac{2\lambda}{3}} = 2, \qquad \lambda = \frac{3}{7}.$$

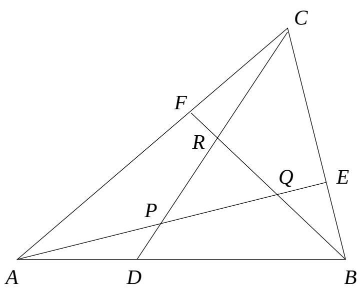
Auf der Geraden BF verhalten sich die C- und die A-Koordinaten wie $2:1$, also gilt für Q

$$\frac{\frac{\mu}{3}}{1-\mu} = 2, \qquad \mu = \frac{6}{7}.$$

Es sei $F_{\triangle ABC} = 1$. Dann gilt wegen $CE : EB = 2 : 1$, $F_{\triangle AEC} = \frac{2}{3}$. Wegen $AP : AE = 3 : 7$ (siehe oben) gilt ferner $F_{\triangle APC} = \frac{3}{7} \cdot F_{\triangle AEC} = \frac{3}{7}\frac{2}{3} = \frac{2}{7}$. Da ferner

$$F_{\triangle PQR} = 1 - F_{\triangle APC} - F_{\triangle BCR} - F_{\triangle CPA} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7},$$

hat das gesuchte Dreieck gerade den Flächeninhalt $\frac{1}{7}F_{\triangle ABC}$.



Aufgabe 2 Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC sind Punkte D, E und F so gewählt, dass sie die zugehörigen Strecke im Verhältnis $q = \overline{AD} \colon \overline{AB} = \overline{BE} \colon \overline{BC} = \overline{CF} \colon \overline{CA}$ teilen. Die Geraden AE, BF und CD schneiden sich in den Punkten P, Q und R.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Dreiecksflächen PQR und ABC!

Lösung.

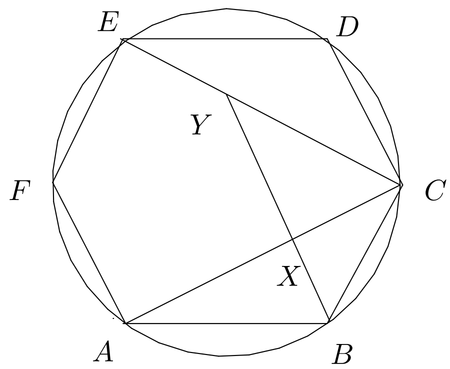
$$\frac{(1-2q)^2}{q^2 - q + 1}.$$

Aufgabe 3 Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC sind Punkte D, E und F so gewählt, dass sie die zugehörigen Strecke im Verhältnis $x = \overline{BE} \colon \overline{EC}$, $y = \overline{CF} \colon \overline{FA}$ und $z = \overline{AD} \colon \overline{DB}$ teilen. Die Geraden AE, BF und CD schneiden sich in den Punkten P, Q und R.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Dreiecksflächen PQR und ABC!

Lösung.

$$\frac{(1-xyz)^2}{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}.$$

Aufgabe 4 Gegeben sei ein reguläres Sechseck $ABCDEF$. Auf den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{CE}$ sind Punkte X bzw. Y derart gesucht, dass B auf der Geraden XY liegt und dass $\overline{AX} : \overline{AC} = \overline{CY} : \overline{CE} = q$ gilt.
Ermitteln Sie alle Werte q, für die es solche Punkte X und Y gibt!



Lösung. Es seien A, C und E die Basispunkte. Da das Sechseck regulär ist, gilt offenbar

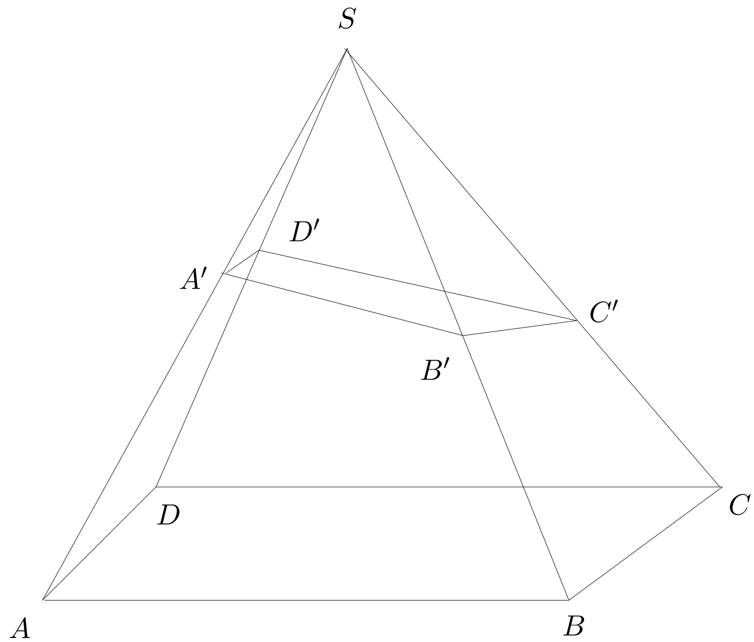
$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) &= \overrightarrow{BE}, \\ 2A - 2B + 2C - 2B &= E - B, \\ 2A + 2C - E &= 3B, \\ B &= \frac{1}{3}(2, 2, -1). \end{aligned}$$

Wegen $\overrightarrow{AX} = q \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CY} = q \cdot \overrightarrow{CE}$ gilt $X - A = qC - qA$ bzw. $X = (1-q, q, 0)$ und $Y = (0, 1-q, q)$. Da B auf XY liegen soll, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $B = (1-\lambda)X + \lambda Y$ bzw.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2, 2, -1) &= \big((1-\lambda)(1-q), (1-\lambda)q, 0\big) + \big(0, \lambda(1-q), \lambda q\big), \\ &= (1 - \lambda - q + \lambda q, \lambda + q - 2\lambda q, \lambda q). \end{aligned}$$

Die letzte Koordinate liefert $\lambda q = -\frac{1}{3}$. Die erste Koordinate liefert dann $\frac{2}{3} = 1 - (\lambda + q) - \frac{1}{3}$ bzw. $\lambda + q = 0$. Folglich ist $q^2 = \frac{1}{3}$, und wegen $q > 0$ gilt $q = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

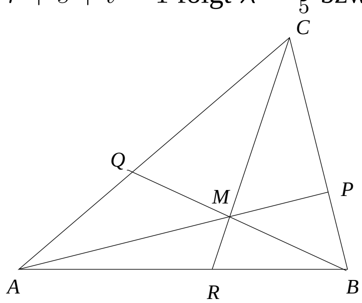
Aufgabe 5 Gegeben sei eine gerade vierseitige Pyramide $ABCDS$ mit der Spitze S und der Parallelogrammgrundfläche $ABCD$. Auf den Kanten $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ sind die Punkte A', B', C' derart festgelegt, dass sie die zugehörige Kante im Verhältnis $1:5$, $1:4$ bzw. $1:3$ teilen (d.h. $SA' : A'A = 1:5$ usw.). Die Ebene durch A', B' und C' schneide die Kante $\overline{SD}$ im Punkte D'.
In welchem Verhältnis teilt D' die Kante $\overline{SD}$?



Lösung. Es seien A, B, C und S die Basispunkte unseres Koordinatensystems. Dann gilt wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $D = A - B + C = (1, -1, 1, 0)$. Es sei $D' = (1-\lambda)S + \lambda D = (\lambda, -\lambda, \lambda, 1-\lambda)$ der gesuchte Punkt. Die Ebene durch

$$A' = (1, 0, 0, 5)/6, \quad B' = (0, 1, 0, 4)/5, \quad C' = (0, 0, 1, 3)/4$$

hat die Gleichung $rA' + sB' + tC'$ mit $r + s + t = 1$. Folglich gilt für den Punkt D' durch Vergleich der ersten drei Koordinaten: $\frac{r}{6} = \lambda$ bzw. $r = 6\lambda$, $\frac{s}{5} = -\lambda$ bzw. $s = -5\lambda$ und $\frac{t}{4} = \lambda$ bzw. $t = 4\lambda$. Mit $r + s + t = 1$ folgt $\lambda = \frac{1}{5}$ bzw. $D' = \frac{1}{5}(4S + D)$. Der Punkt D' teilt $\overline{SD}$ im Verhältnis $1 : 4$.



Aufgabe 6 Der Satz von CEVA. Es sei M ein innerer Punkt des Dreiecks ABC und P, Q und R seien die Schnittpunkte der Geraden AM, BM bzw. CM mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Dann gilt

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{CR}} = 2.$$

Lösung. (a) Wir wählen A, B und C als Koordinatensystem. Dann sei $M = (a, b, c)/(a + b + c)$ der beliebig gewählte Punkt im Innern. Die Gerade MA ist dadurch gekennzeichnet, dass sich ihre B und C-Koordinaten wie $b : c$ verhalten, also gilt insbesondere $P = (0, b, c)/(b + c)$ und analog ist $Q = (a, 0, c)/(a + c)$ und $R = (a, b, 0)/(a + b)$. Damit berechnet man sofort

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

(b) Es sei λ das Teilverhältnis vom M auf AP, also $M = (1 - \lambda)A + \lambda P$. Setzt man den in (a) ermittelten Wert für P ein, so hat man

$$(a, b, c)/(a + b + c) = M = (1 - \lambda)A + \lambda b/(b + c)B + \lambda c/(b + c)C.$$

Also gilt $\lambda = (b+c)/(a+b+c)$. Analog bestimmt man die Teilverhältnisse von M bezüglich $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$. Als Summe hat man dann

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{CR}} = \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} = 2.$$

In der Praxis braucht man eher die Umkehrung.

Aufgabe 7 (Umkehrung des Satzes von CEVA) Es sei ABC ein Dreieck und auf den Seiten BC, CA und AB seien Punkte P, Q bzw. R so gegeben, dass gilt

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1.$$

Dann schneiden sich die Ecktransversalen AP, BP und CP in einem gemeinsamen Punkt M oder sie sind parallel.

Der Beweis verläuft indirekt mit Hilfe des Satzes von CEVA.

Aufgabe 8 (Eine Anwendung des Satzes von CEVA) In einem Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt M und dem Umkreisradius r seien P, Q und R die Schnittpunkte der Geraden AM, BM bzw. CM mit den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$. Man zeige, dass dann die Ungleichung

$$\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR} \geq \frac{9}{2}r$$

gilt!

Lösung : Nach dem Satz von CEVA gilt

$$\frac{r}{\overline{AP}} + \frac{r}{\overline{BQ}} + \frac{r}{\overline{CR}} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CR}}\right)^{-1} = r/2.$$

Nach dem Satz vom arithmetisch-harmonischen Mittel ist dann

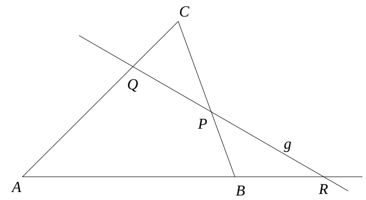
$$\left(\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR}\right)/3 \geq 3 \cdot \left(\frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{BQ}} + \frac{1}{\overline{CR}}\right)^{-1} = \frac{3r}{2}.$$

Multipliziert man die obige Ungleichung mit 3, so hat man die Behauptung.

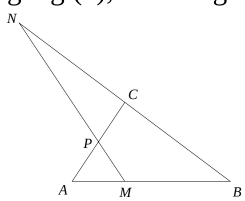
Aufgabe 9 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inkreismittelpunkt I und dem Schnittpunkt der Seitenhalbierennden S. Die drei Ankreise berühren die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ in den Punkten P, Q bzw. R.
(a) Zeigen Sie, dass die drei Ecktransversalen AP, BQ und CR durch einen gemeinsamen Punkt T verlaufen.
(b) Zeigen Sie, dass I, S und T auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Hinweis: Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten von T. Benutzen Sie dabei den Satz, dass Tangentenabschnitte gleich lang sind.

Aufgabe 10 (Der Satz von MENELAOS) Es sei g eine Gerade, die die Seitengeraden eines Dreiecks ABC in den Punkten P, Q bzw. R schneidet.
Dann gilt

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1. \qquad (3)$$

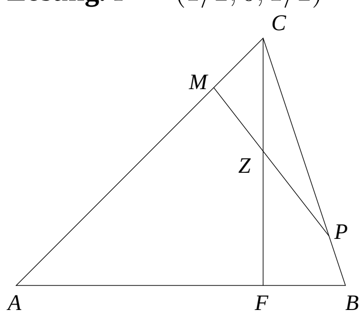


Gilt umgekehrt für drei Punkte P, Q und R auf den Seitenlinien BC, CA bzw. AB liegen die Gleichgung (3), dann liegen sie auf einer gemeinsamen Geraden g.



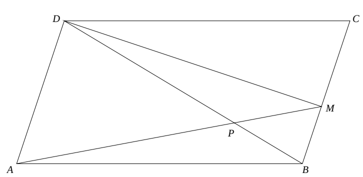
Aufgabe 11 (Übung) Gegeben sei ein Dreieck ABC und Punkte M, P und N auf $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und BC, so dass gilt $\overline{BC} = \overline{CN}$ und $\overline{AM} = \overline{AB}/3$.
In welchem Verhältnis teilt P die Strecke AC, wenn M, N und P auf einer Geraden liegen?

Lösung. $P = (1/2, 0, 1/2)$



Aufgabe 12 (Übung) Gegeben sei ein Dreieck ABC und Punkte M, Z, P und F wie in der Skizze angegeben. Dabei sei $\overline{AF} \colon \overline{FB} = 3$, $\overline{PB} = \overline{BC}/6$ und $\overline{CM} = \overline{CA}/6$.
In welchem Verhältnis teilt Z die Strecken $\overline{FC}$ bzw. $\overline{PM}$?

Lösung. Z auf MP, $3\colon 5$. Z auf CF, $5\colon 7$.



Aufgabe 13 (Übung) Gegeben sei ein Paralleleogramm $ABCD$ mit einem Punkt M, der $\overline{BC}$ von innen im Verhältnis $3\colon 5$ teilt. Die Gerade AM schneide die Diagonale BD in P.
Berechnen Sie das Verhältnis der Viereecksfläche $PMCD$ zur Fläche des Parallelogramms $ABCD$.

Lösung. $F = 79/176$.
Es seien $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ und $D = (0, 0, 1)$ die Bezugspunkte sunseres baryzentrischen Systems. Dann ist $C = (-1, 1, 1)$ (wegen $B - A = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = C - D$). Ferner ist nach Voraussetzung

$$M = \frac{5}{8}B + \frac{3}{8}C = \frac{1}{8}(-3, 8, 3).$$

Es sei $P = (0, 1 - \lambda, \lambda)$ und

$$AM\colon \quad (1 - \mu)A + \mu M = \frac{1}{8}\left(8(1 - \mu) - 3\mu, 8\mu, 3\mu\right).$$

Folglich gilt für P auf BD und auf AM, $\lambda = \frac{3}{11}$ und $\mu = \frac{8}{11}$. Nun ist

$$F_{PMCD} = F_{MCD} + F_{PMD} = \frac{5}{8}\frac{1}{2} + \lambda F_{AMD} = \frac{5}{16} + \frac{3}{11}F_{ADB} = \frac{79}{176}.$$

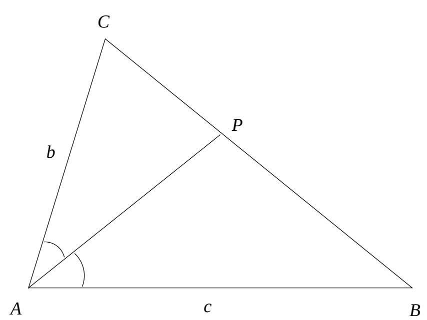
Wenn es nur auf die Verhältnisse der Koordinaten ankommt, schreiben wir anstelle von

$$\frac{1}{a + b + c}(a, b, c) \quad \text{kurz} \quad (a : b : c).$$

Aufgabe 14 Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden S, Höhen H, Winkelhalbierenden I, Mittelsenkrechten U die folgenden baryzentrischen Koordinaten besitzen. Dabei bilden die Eckpunkte des Dreiecks das Koordinatensystem, die Seitenlängen seien a, b und c, und die Innenwinkel seien α, β und γ.

$$\begin{aligned} S &= (1:1:1)\,, \\ H &= (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)\,, \\ I &= (a:b:c), \\ M &= (\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma). \end{aligned}$$

Lösung : (a) Bei der Seitenhalbierenden durch A ist das Verhältnis der B- und C-Koordinaten konstant 1. Bei der Seitenhalbierenden durch B ist das Verhältnis der A- und C-Koordinaten konstant 1. Also müssen beim Schnittpunkt dieser beiden Geraden alle drei Koordinaten übereinstimmen. Somit gilt $S = (1,1,1)/3$.



(b) Wir benutzen den Satz, dass die Winkelhalbierende im Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Also gilt $\overrightarrow{BP} : \overrightarrow{PC} = c : b$ bzw.

$$P = \frac{b}{b+c}B + \frac{c}{b+c}C = (0:b:c).$$

Nach der Bemerkung in Abschnitt hat also die Winkelhalbierende von A, die Eigenschaft, dass das konstante Verhältnis von B- und C-Koordinaten gleich $b : c$ ist. Analog erhält man, dass auf der Winkelhalbierenden von B, das Verhältnis von A- und C-Koordinate gleich $a : c$ ist. Fazit, für I gilt, das das Verhältnis der A-, B- und C-Koordinaten gleich $(a:b:c)$ ist. Folglich gilt, $I = (a,b,c)/(a+b+c)$.

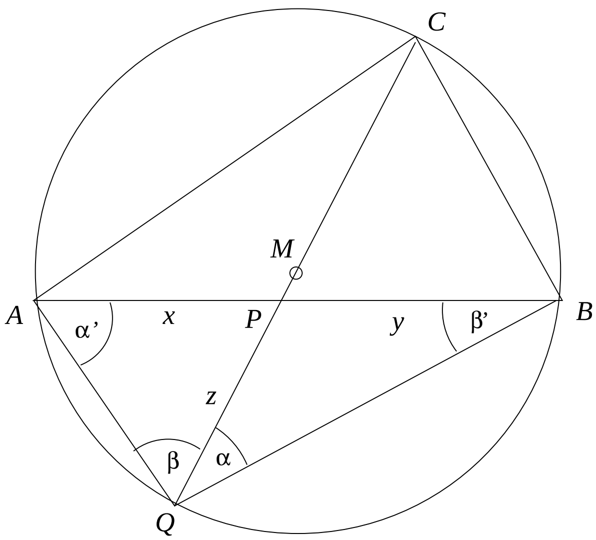
(c) Ist P der Höhenfußpunkt von A auf BC und h die Länge der Höhe $\overline{AP}$, dann gilt

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \frac{h\cot\beta}{h\cot\gamma} = \frac{\tan\gamma}{\tan\beta}.$$

Folglich gilt

$$P = \frac{\tan\beta B + \tan\gamma C}{\tan\beta + \tan\gamma} = (0 : \tan\beta : \tan\gamma).$$

Somit hat der Höhenschnittpunkt die oben angegebene Form.



(d) Der Schnittpunkt P von CM mit AB teile $\overline{AB}$ im Verhältnis $x : y$, das wir bestimmen werden. Dazu ist nach dem Thalesssatz $\alpha' = \angle QAB = 90° - \alpha$ und $\beta' = \angle QBA = 90° - \beta$. Die Winkel bei Q sind gleich α bzw. β nach dem Peripheriewnkelsatz. Nach dem Sinussatz in den Dreiecken APQ und BPQ und $\sin(90° - x) = \cos x$ ist dann

$$\frac{x}{z} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

und weiter

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Mit Hilfe dieser Koordinaten ließ sich die folgende Aufgabe aus dem Bundeswettbewerb Mathematik, 2002, 2. Runde, lösen:

Aufgabe 15 In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien H_a und H_b die Fußpunkte der von A bzw. B ausgehenden Höhen; W_a und W_b seien die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden durch A bzw. B mit den gegenüberliegenden Seiten.
Man beweise: Im Dreieck ABC liegt der Inkreismittelpunkt genau dann auf der Strecke $\overline{H_a H_b}$, wenn der Umkreismittelpunkt U auf der Strecke $\overline{W_a W_b}$ liegt.

Lösung : Nach obigen Argumenten war

$$H_a = (0 : \tan\beta : \tan\gamma), \quad H_b = (\tan\alpha : 0 : \tan\gamma), \quad I = (a : b : c) \underset{\text{Sinussatz}}{=} (\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma).$$

Diese 3 Punkte liegen nach (2) genau dann auf einer Geraden, wenn

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & \tan\beta & \tan\gamma \\ \tan\alpha & 0 & \tan\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \end{vmatrix} = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\left(\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma} + \frac{1}{\cos\alpha\cos\gamma} - \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\right).$$

Das tritt genau dann ein, wenn $\cos\alpha + \cos\beta = \cos\gamma$. Analog ist die zweite Bedingung äquivalent zu

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma).$$

Auch dies ist äquivalent zu $\cos\alpha + \cos\beta = \cos\gamma$. Hieraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 16 Eine Ebene ϵ teilt die Kanten $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ und $\overline{DC}$ eines regulären Tetraeders $ABCD$ im Verhältnis 2:3, 3:2 bzw. 4:1. In welchem Verhältnis teilt ϵ die Körperhöhe DM des Tetraeders?

Lösung. Mit dem Koordinatensystem A, B, C, D hat man für die Schnittpunkte A', B' und C' der Ebene mit den Kanten sowie für den Mittelpunkt M der Grundfläche die folgenden Koordinaten

$$A' = (2,0,0,3)/5, \quad B' = (0,3,0,2)/5, \quad C' = (0,0,4,1)/5, \quad M = (1,1,1,0)/3.$$

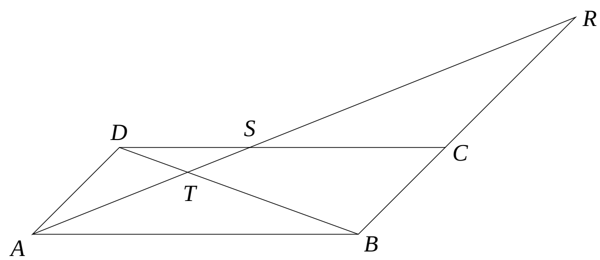
Die Ebene ϵ:

$$rA' + sB' + tC' = (2r, 3s, 4t, 3r + 2s + t)/5, \quad r + s + t = 1.$$

Die Gerade DM:

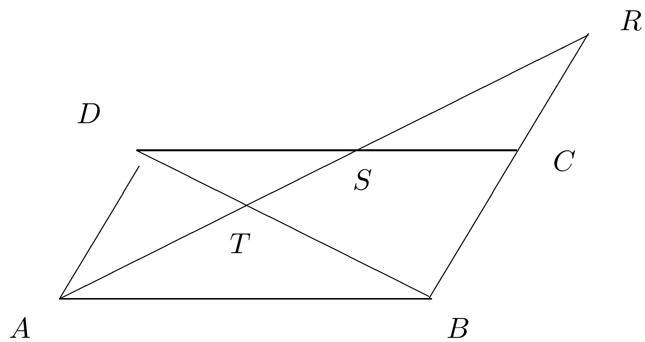
$$(1 - \lambda)D + \lambda M = (\lambda, \lambda, \lambda, 3 - 3\lambda)/3.$$

Gleichsetzen liefert $\lambda = 36/65$. Die Körperhöhe wird im Verhältnis $36{:}29$ geteilt.



Aufgabe 17 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und auf der Verlängerung von BC über C hinaus ein Punkt R. Die Schnittpunkte von AR mit $\overline{CD}$ und $\overline{BD}$ seien S bzw. T. Man beweise, dass dann gilt

$$\frac{1}{\overline{AT}} = \frac{1}{\overline{AS}} + \frac{1}{\overline{AR}}.$$



Lösung. Wir wählen A, B und D als Koordinatensystem. Dann gilt wegen $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ die Gleichung $B - A + D - A = C - A$ bzw. $C = (-1, 1, 1)$. Die Parallen zur Koordinatenachse AB sind gegeben durch die Gleichungen $D = const$. Insbesondere ist

$$\text{Gerade} \quad CD: \ (-\lambda, \lambda, 1), \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{Gerade} \quad BC: \ (-\mu, 1, \mu), \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere sei $R = (-r, 1, r)$. Dann haben alle Punkte X auf AR die Eigenschaft, dass ihre B- und D-Koordinaten sich wie $1{:}r$ verhalten. Insbesondere gilt das für $S \in CD$, daher ist $S = (-1/r, 1/r, 1)$. Für $T \in BD$ ist die A-Koordinate gleich Null, also gilt $T = (0, 1, r)/(r + 1)$. Die Behauptung ist äquivalent zu $1 = \overline{AT} : \overline{AS} + \overline{AT} : \overline{AR}$. Daher bestimmen wir nun die Teilungsverhältnisse λ von T auf $\overline{AS}$ und μ von T auf $\overline{AR}$: Sei also $(1 - \lambda)A + \lambda S = T$. Einsetzen von S und T liefert:

$$((1 - \lambda) - \lambda/r, \lambda/r, \lambda) = (0, 1/(r + 1), r/(r + 1)) .$$

Bei der D-Koordinate liest man sofort $\lambda = r/(r + 1)$ ab. Sei ferner $(1 - \mu)A + \mu R = T$, so hat man

$$((1 - \mu) - \mu r, \mu, \mu r) = (0, 1/(r + 1), r/(r + 1)) .$$

Bei der B-Koordinate liest man sofort ab $\mu = 1/(r + 1)$. Da für die Summe $\lambda + \mu = 1$ gilt, ist der Beweis erbracht.

Komplexe baryzentrische Koordinaten der Ebene

Wählt man 2 Punkte A und B der Ebene, so lässt sich jeder Punkt der Ebene eindeutig in der Form $(1-\lambda)A+\lambda B$ mit einer komplexen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ schreiben. Ist λ reell, so erhält man gerade die Punkte der Geraden AB. Der Vorteil dieser komplexen Methode ist, dass auch Orthogonalität und Kreise in einfacher Weise beschrieben werden können.

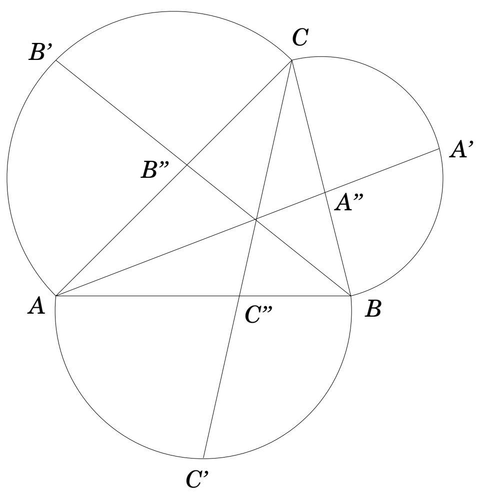
Beschreibung eines Beliebigen Punktes durch Drehung und Streckung

Erhält man den Punkt P durch Drehung von B um A um den Winkel φ (entgegen dem Uhrzeiger) und anschließender Strechung mit dem Faktor r, so gilt

$$P - A = \lambda(B - A), \qquad P = (1 - \lambda)A + \lambda B,$$

wobei $\lambda = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Je nachdem, welche Menge der komplexe Parameter λ durchläuft, erhält man als geometrischen Ort aller Punkte $(1 - \lambda)A + \lambda B$ spezielle Geraden oder Kreise.

$\mathsf{Im}\,\lambda = 0$	Gerade AB
$\mathsf{Re}\,\lambda = \frac{1}{2}$	Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$
$\mathsf{Re}\,\lambda = 1$	Senkrechte zu AB durch A.
$\lvert\lambda\rvert = 1$	Kreis um A durch B.



Aufgabe 18 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Über seinen Seiten errichten wir ähnliche gleichschenklige Dreiecke ABC', BCA' und CAB', wobei die Spitzen C', B' und A' der gleichschenkligen Dreiecke jeweils alle nach außen oder alle nach innen zeigen.
Beweisen Sie, dass die drei Ecktransversalen AA', BB' und CC' sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden oder parallel sind!

Lösung. Es sei A'' der Schnittpunkt von AA' mit BC. Entsprechend definieren wir B'' und C''. Zur Beschreibung der relativen Lage von A', B' und C' bezüglich A, B und C bieten sich komplexe baryzentrische Koordinaten an. Betrachtet man nämlich C' einmal als das Bild der Drehung (und Stauchung) von B um A und zum anderen als das Bild der Drehung von A um B um den gleichen negativen Winkel (und mit der gleichen Stauchung), so dass es eine komplexe Zahl λ gibt, mit

$$C' - A = \lambda(B - A), \quad C' - B = \overline{\lambda}(A - B) \quad \text{bzw.} \tag{4}$$

$$C' = (1 - \lambda)A + \lambda B = \overline{\lambda}A + (1 - \overline{\lambda})B. \tag{5}$$

Da A und B als unabhängige Ursprungspunkte der komplexen Ebene genommen werden können, liefert der Koeffizientenvergleich in Gleichung (5) bei A die Gleichung $1 - \lambda = \overline{\lambda}$. Der Realteil von λ ist also gleich $\frac{1}{2}$. Wir können also

$$\lambda = \frac{1}{2} + b\,\mathrm{i}\,, \tag{6}$$

mit einem $b \in \mathbb{R}$ setzen. Da die Punkte A' und B' völlig analog konstruiert werden — die Dreiecke ABC', BCA' und CAB' sollen ja ähnliche gleichschenklige Dreiecke sein — hat man

$$A' = (1-\lambda)B + \lambda C, \qquad B' = (1-\lambda)C + \lambda A. \tag{7}$$

Möge C die komplexen baryzentrischen Koordinaten $(1-\mu, \mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$ bezüglich des Koordinatensystems (A, B) haben. Dann gilt

$$\begin{aligned} C &= (1-\mu)\,A + \mu\,B, \\ A &= \frac{\mu}{\mu-1}\,B + \frac{1}{1-\mu}\,C, \\ B &= \frac{1}{\mu}\,C + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\,A. \end{aligned} \tag{8}$$

Die zweite und dritte Gleichung erhält man durch einfaches Umstellen der ersten; der Punkt A hat also die komplexen baryzentrischen Koordinaten $(\mu/(\mu-1), 1/(1-\mu))$ bezüglich (B, C) und B hat die komplexen baryzentrischen Koordinaten $(1/\mu, 1-1/\mu)$ bezüglich (C, A).
Wir bestimmen nun den Schnittpunkt C''. Da C'' auf der Geraden CC' liegt, ist C'' eine *reelle* baryzentrische Kombination von C und C', etwa $C'' = (1-t)C + tC'$. Da C'' auch auf der Geraden AB liegt, ist C'' auch *reelle* baryzentrische Kombination von A und B, etwa $C'' = (1-s)A + sB$. Gesucht sind also $s, t \in \mathbb{R}$ mit:

$$(1-t)\,C + t\,C' = C'' = (1-s)\,A + s\,B.$$

Setzt man für die Punkte C und C' die Terme aus (8) und (5) ein, so hat man

$$\begin{aligned} (1-t)\,C + t\,C' &= (1-t)(1-\mu)A + (1-t)\mu B + t(1-\lambda)A + t\lambda B \\ &= A(t(1-\lambda) + (1-t)(1-\mu)) + B(t\lambda + (1-t)\mu). \end{aligned}$$

Also liefert der Koeffizientenvergleich bei B

$$s = t\lambda + (1-t)\mu. \tag{9}$$

Wir setzen $\mu = c + d\,\mathrm{i}$ mit festen reellen Zahlen c und d und erhalten mit $\lambda = 0.5 + b\,\mathrm{i}$:

$$s = t(0.5 + b\,\mathrm{i}\,) + (1-t)(c + d\,\mathrm{i}\,) = 0.5t + (1-t)c + (bt + (1-t)d)\,\mathrm{i}\,.$$

Wegen $s \in \mathbb{R}$ hat man daher $bt + (1-t)d = 0$ bzw.

$$t = \frac{d}{d-b}, \quad 1 - t = \frac{-b}{d-b}$$

und somit nach (9)

$$s = \frac{d(\frac{1}{2} + b\,\mathrm{i}\,)}{d-b} + \frac{-b(c + d\,\mathrm{i}\,)}{d-b} = \frac{\frac{1}{2}d - bc}{d-b}.$$

Für das reelle Teilverhältnis $s/(1-s)$ des Punktes C'' auf $\overline{AB}$ gilt dann

$$\frac{s}{1-s} = \frac{\frac{1}{2}d - bc}{\frac{1}{2}d - b(1-c)} = \frac{1 - 2b\,\frac{c}{d}}{1 - 2b\,\frac{1-c}{d}}. \tag{10}$$

Nun berechnen wir die beiden anderen Teilverhältnisse $s'/(1-s')$ und $s''/(1-s'')$ von A'' und B'' auf $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$. Dazu wechseln wir zu den komplexen Koordinatensystemen (B, C) bzw. (C, A). Die Rolle von μ nimmt dabei wegen (8) nacheinander $\mu' = 1/(1-\mu)$ bzw. $\mu'' = 1 - 1/\mu$ ein. Wir fassen das Teilverhältnis auf der linken Seite von (10) als Funktion vom Realteil c und Imaginärteil d von μ auf (rechte Seite von (10)). Somit gilt

$$\mu' = \frac{1}{1-c-d\,\mathrm{i}} = \frac{1-c+d\,\mathrm{i}}{(1-c)^2+d^2},$$

$$c' = \frac{1-c}{(1-c)^2+d^2}, \quad 1-c' = \frac{c^2+d^2-c}{(1-c)^2+d^2},$$

$$\frac{s'}{1-s'} = \frac{1-2b\,\frac{1-c}{d}}{1-2b\,\frac{c^2+d^2-c}{d}}.$$

Analog erhält man

$$\mu'' = 1 - \frac{1}{c+d\,\mathrm{i}} = 1 - \frac{c-d\,\mathrm{i}}{c^2+d^2} = \frac{c^2+d^2-c}{c^2+d^2} + \frac{d}{c^2+d^2}\,\mathrm{i},$$

$$\frac{s''}{1-s''} = \frac{1-2b\,\frac{c^2+d^2-c}{d}}{1-2b\,\frac{c}{d}}.$$

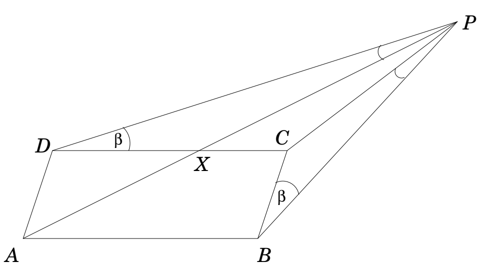
Wir stellen fest, dass das Produkt dieser drei Teilverhältnisse gleich 1 ist:

$$\frac{s}{1-s}\cdot\frac{s'}{1-s'}\cdot\frac{s''}{1-s''} = \frac{1-2b\,\frac{c}{d}}{1-2b\,\frac{1-c}{d}}\cdot\frac{1-2b\,\frac{1-c}{d}}{1-2b\,\frac{c^2+d^2-c}{d}}\cdot\frac{1-2b\,\frac{c^2+d^2-c}{d}}{1-2b\,\frac{c}{d}} = 1.$$

Nach der Umkehrung des Satzes von CEVA verlaufen die drei Ecktransversalen AA', BB' und CC' durch einen gemeinsamen Punkt.

Bemerkung: In den Spezialfällen $0°$, $60°$ (nach außen) und $90°$ erhält man den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, den FERMAT-Punkt — das ist der Punkt des Dreiecks, für den die Abstandssumme zu den Eckpunkten minimal wird — bzw. den Höhenschnittpunkt. Es wird vermutet, dass der geometrische Ort der Schnittpunkte eine Hyperbel ist.

Aufgabe 19 (aus H. S. M. Coxeter, Unvergängliche Geometrie, S. 30, Aufgabe 3) Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und ein Punkt P der Ebene, so dass $\angle PBC = \angle PDC$ gilt.
Dann gilt auch $\angle CPB = \angle DPA$.



Lösung: Anstelle der obigen Behauptung zeigen wir die folgende, aus der aber die obige folgt. Wählt man einen Punkt X auf der Strecke $\overline{CD}$ so, dass die Dreiecke XDP und CBP einander ähnlich und umgekehrt orientiert sind, so liegt der Punkt X auf der Geraden AP. Den Winkel $\angle PBC = \angle PDX$ bezeichnen wir mit β. Wir verwenden ein komplexes baryzentrisches Koordinatensystem mit den Ursprungspunkten B und D. Es sei etwa

$$A = (1-\mu)B + \mu D, \quad \mu \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

$$C = \mu B + (1-\mu)D. \tag{12}$$

Die zweite Gleichung folgt aus der ersten wegen $B - A = C - D$. Wegen $X \in \overline{CD}$ existiert eine *reelle* Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} X &= (1-\alpha)D + \alpha C = (1-\alpha)D + \alpha\mu B + \alpha(1-\mu)D, \\ &= (1-\alpha\mu)D + \alpha\mu B. \end{aligned} \tag{13}$$

$$X - D = \alpha\mu(B - D). \tag{14}$$

Nun gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$P - D = \lambda(X - D). \tag{15}$$

Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke XDP und CBP, sind die folgenden Längenverhältnisse gleich $\overline{PD} \colon \overline{XD} = \overline{PB} \colon \overline{CB}$. Also gibt es ein λ_1 mit $|\lambda| = |\lambda_1|$ mit

$$P - B = \lambda_1(C - B) \tag{16}$$

Da das Argument von λ gleich β ist, wogegen das Argument von λ_1 gleich $-\beta$ ist und wegen $|\lambda| = |\lambda_1|$, gilt $\lambda_1 = \overline{\lambda}$, und somit wegen (16) und (12)

$$\begin{aligned} P - B &= \overline{\lambda}(C - B) = \overline{\lambda}(\mu B + (1-\mu)D - B) = \overline{\lambda}(\mu - 1)(B - D), \\ P &= (1 - \overline{\lambda} + \mu\overline{\lambda})B - \overline{\lambda}(\mu - 1)D. \end{aligned} \tag{17}$$

Setzt man (14) in (15) ein, so hat man

$$P - D = \alpha\lambda\mu(B - D).$$

Durch Koeffizientenvergleich vor B in der obigen Gleichung und in (17) hat man also

$$\alpha\lambda\mu = 1 + \overline{\lambda}\mu - \overline{\lambda}. \tag{18}$$

Löst man das lineare Gleichungssystem aus Gleichung (11) und der letzten Gleichung von (17) nach B und D auf, so erhält man

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\det}\left((1-\alpha\lambda\mu)\,A - \mu\,P\right), \\ D &= \frac{1}{\det}\left(-\alpha\lambda\mu\,A + (1-\mu)\,P\right), \end{aligned}$$

wobei $\det = 1 - \mu - \alpha\lambda\mu$. Setzt man diese Werte in (13) ein, so hat man

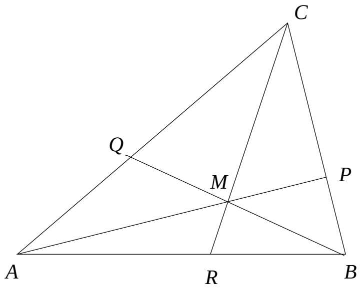
$$X = \frac{1}{\det}\left(\alpha\mu(1-\lambda)\,A + (1 - \alpha\mu - \mu)\,P\right).$$

Wir werden zeigen, dass dies eine *reelle* Kombination der Punkte A und P ist. Nach (18) gilt zunächst

$$\begin{aligned} \alpha = \overline{\alpha} = \frac{1 + \overline{\lambda}\mu - \overline{\lambda}}{\lambda\mu} &= \frac{1 + \lambda\overline{\mu} - \lambda}{\overline{\lambda}\overline{\mu}} \quad | \cdot \lambda\overline{\lambda}\mu\overline{\mu} \\ \lambda\mu - \lambda^2\mu + \lambda^2\mu\overline{\mu} &= \overline{\lambda}\overline{\mu} - \overline{\lambda}^2\overline{\mu} + \overline{\lambda}^2\mu\overline{\mu} \quad | - \mu\overline{\mu} \\ -\mu\overline{\mu} + \lambda\mu - \lambda\mu\overline{\mu} + \lambda\mu\overline{\mu} - \lambda^2\mu + \lambda\mu\overline{\mu} &= -\mu\overline{\mu} + \overline{\mu}\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\mu\overline{\mu} - \overline{\lambda}\mu\overline{\mu} - \overline{\lambda}^2\mu + \overline{\lambda}^2\mu\overline{\mu} \\ (1-\lambda)(-\mu\overline{\mu} + \lambda\mu - \lambda\mu\overline{\mu}) &= (1-\overline{\lambda})(-\mu\overline{\mu} + \overline{\lambda}\overline{\mu} - \overline{\lambda}\mu\overline{\mu}) \\ \frac{\alpha\mu(1-\lambda)}{-\mu + \overline{\lambda} - \overline{\lambda}\mu} &= \frac{\alpha\overline{\mu}(1-\overline{\lambda})}{-\overline{\mu} + \lambda - \lambda\overline{\mu}} \\ \frac{1}{\det}\alpha\mu(1-\lambda) &= \frac{1}{\overline{\det}}\alpha\overline{\mu}(1-\overline{\lambda}). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus (18) wegen $\det = 1 - \mu - \alpha\lambda\mu = -\mu + \overline{\lambda} - \overline{\lambda}\mu$. Wegen $\alpha \in \mathbb{R}$ steht in der letzten Zeile eine reelle Zahl x. Also gilt $X = xA + (1-x)P$ und X liegt auf der Geraden AP.

Projekte: Baryzentrische Koordinaten, Ilmenau 2003, Klasse 10/11



Aufgabe 20 (Jördis Krap, 11) Der Satz von CEVA. Es sei M ein innerer Punkt des Dreiecks ABC und P, Q und R seien die Schnittpunkte der Geraden AM, BM bzw. CM mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten. Dann gilt

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{CR}} = 2.$$

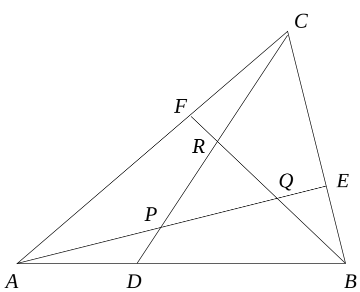
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Punkt $M = (r, s, t)$, wobei $r + s + t = 1$ und bestimmen Sie die Koordinaten von P, Q und R.

Aufgabe 21 ((Eine Anwendung des Satzes von Ceva)) In einem Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt M und dem Umkreisradius r seien P, Q und R die Schnittpunkte der Geraden AM, BM bzw. CM mit den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ bzw. $\overline{AB}$. Man zeige, dass dann die Ungleichung

$$\overline{AP} + \overline{BQ} + \overline{CR} \geq \frac{9}{2} r$$

gilt!

Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von arithmetischen und harmonischen Mittel.



Aufgabe 22 (Pia Reuter, 11) Auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ eines Dreiecks ABC sind Punkte D, E und F so gewählt, dass sie die zugehörigen Strecke im Verhältnis $q = \overline{AD} \colon \overline{AB} = \overline{BE} \colon \overline{BC} = \overline{CF} \colon \overline{CA}$ teilen. Die Geraden AE, BF und CD schneiden sich in den Punkten P, Q und R. Bestimmen Sie das Verhältnis der Dreiecksflächen PQR und ABC!

Lösung.

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2 - q + 1}.$$

Aufgabe 23 (Joseph Goldmann, 11) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inkreismittelpunkt I und dem Schnittpunkt der Seitenhalbierennden S. Die drei Ankreise berühren die Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ in den Punkten P, Q bzw. R.

(a) Zeigen Sie, dass die drei Ecktransversalen AP, BQ und CR durch einen gemeinsamen Punkt T verlaufen.

(b) Zeigen Sie, dass I, S und T auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Hinweis: Bestimmen Sie die baryzentrischen Koordinaten von T. Benutzen Sie dabei den Satz, dass Tangentenabschnitte gleich lang sind.

Comments

todo: geometric markup

Attribution Section

Für das Sächsische Landesseminar in SAYDA, März 2000, Klasse 11/12 mit einer Ergänzung vom 25.07.01 über eine WURZEL-Aufgabe zu Ecktransversalen mit *komplexen* baryzentrischen Koordinaten.

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet

graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules