Das Invarianzprinzip

Axel Schüler, Mathematisches Institut, Univ. Leipzig

mailto:schueler@mathematik.uni-leipzig.de

Juli 2000

Das Invarianzprinzip

In vielen Bereichen der Mathematik spielen Invarianten eine Rolle. Man denke nur an Fixpunktsätze und Eigenwertaufgaben. Das Invarianzprinzip wird im Olympiadebereich meist bei Aufgaben verwendet, in denen Spiele oder Algorithmen vorkommen.

Gegeben sind eine *Zustandsmenge* und ein *Algorithmus*, der die Zustandsmenge in sich überführt. Gesucht ist eine Funktion, die jedem Zustand eine Zahl, eine Restklasse oder einen Wahrheitswert zuordnet. Diese Funktion f soll *invariant* sein, das heißt unveränderlich, unter dem Algorithmus. Ferner sind meist noch ein *Anfangszustand* Z_a und ein angestrebter *Endzustand* Z_e gegeben. Gilt für die Invariante f

$$f(Z_a) \neq f(Z_e),$$

dann ist es nicht möglich, mit Hilfe des Algorithmus', den Anfangszustand in einer endlichen Zahl von Schritten in den Endzustand zu überführen.

Aufgaben zum Invarianzprinzip

Aufgabe 1 In $2n$ kreisförmig angeordneten Schüsseln befinden sich je eine Kugel. In jedem Zug wird in eine Schüssel je eine Kugel aus den beiden benachbarten Schüsseln gelegt.
Man zeige, daß zu keinem Zeitpunkt alle Kugeln in einer Schüssel liegen!

Lösung: Wir setzen $m := 2n$. Den Schüsseln werden die Restklassen $[0], [1], \dots, [m-1]$ modulo m zugeordnet. Als Zustandssumme definieren wir

$$s := \sum_{k=0}^{m-1} a_k[k],$$

wobei a_k die Anzahl der Kugeln in der Schale mit der Nummer k ist. In jedem Schritt ändert sich die Zustandssumme wiefolgt. Angenommen, wir füllten die Schale mit der Nummer k mit je einer Kugel aus den Nachbarschalen, dann gilt für die neue Zustandssumme s'

$$s' := s - [k-1] - [k+1] + 2[k] = s,$$

das heißt, s ist invariant. Nun ist aber die Zustandssumme am Anfang gleich

$$s_0 = \sum_{k=0}^{m-1} [k]\cdot 1 = m(m-1)/2 \not\equiv 0 \pmod{m},$$

da $(m-1)/2$ keine natürliche Zahl ist. Andererseits hat der angestrebte Endzustand die Zustandssumme $s_1 := [k]m \equiv 0 \pmod{m}$, was offensichtlich von s_0 verschieden ist.

Aufgabe 2 Auf einem Kreisbogen sind 100 ganze Zahlen angeordnet, deren Summe gleich 1 ist. Als Kette bezeichnen wir solche Zahlen, die nebeneinander stehen.
Wieviele Ketten mit positiver Summe gibt es?

Aufgabe 3 (Das MU-Rätsel) Gegeben sei das „Alphabet" $\{M, U, I\}$ und folgende „Regeln":

1. X sei ein beliebiges Wort, gebildet aus den Buchstaben des Alphabets. Wenn MX gilt, so gilt auch MXX.
2. Endet ein Wort auf I, so kann man ein U anhängen.
3. Drei aufeinanderfolgende Buchstaben I oder zwei aufeinanderfolgende Buchstaben U können gestrichen werden.

Lässt sich das Wort MI durch Anwenden einer endlichen Zahl von obigen Regeln in das Wort MU umwandeln? Wenn ja, so gebe man eine derartige Folge an!

Lösung: Die Invariante ist: Teilbarkeit durch 3 der Anzahl der Buchstaben I des Wortes.

Die folgenden Aufgaben sind aus Arthur Engels Buch „Problem-solving Strategies" entnommen.

Aufgabe 4 (a) Es sei n eine ungerade natürliche Zahl. Jemand schreibt zunächst die Zahlen $1, 2, \ldots, 2n$ an die Tafel. Dann wählt er zwei beliebige Zahlen a und b von ihnen aus, streicht sie und ersetzt sie durch ihre absolute Differenz $|a-b|$. So fährt er fort bis zum Schluss nur noch eine Zahl an der Tafel steht.
Beweise, dass diese Zahl ungerade ist!

(b) Jemand schreibt die Zahlen $1, \ldots, n$ auf und streicht immer zwei und ersetzt sie durch ihre absolute Differenz. Bleibt am Schluss eine gerade oder ungerade Zahl stehen?

Lösung: (a) Es sei S die Summe der Zahlen an der Tafel, also $S = n(2n+1)$ und damit ungerade, da n ungerade war. In jedem Schritt reduziert sich S um $a+b-|a-b| = 2\min(a,b)$, also um eine gerade Zahl. Somit bleibt die Ungeradzahligkeit von S erhalten. Somit ist die letzte Zahl ungerade.

(b) Es sei s die Summe der an der Tafel stehenden Zahlen modulo 2.
Wegen $a + b \equiv |a-b| \pmod{2}$ ist s invariant und folglich ist

$$s = s_0 = \sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2 \equiv \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad n \equiv 0, 3 \pmod{4} \\ 1, & \text{falls} \quad n \equiv 1, 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Aufgabe 5 Ein Kreis ist in 6 Sektoren eingeteilt. Die Zahlen $1, 0, 1, 0, 0, 0$ sind entgegen dem Uhrzeiger in dieser Reihenfolge auf die Sektoren geschrieben. In jedem Schritt darf man zwei benachbarte Sektoreninhalte um 1 erhöhen.
Kann man erreichen, dass nach einer gewissen Zahl von Schritten alle Zahlen gleich sind?

Lösung: Es seien $a_1, \dots, a_6$ die aktuellen Zahlen der Sektoren. Dann ist $I := a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$ eine Invariante des Algorithmus'. Wegen $I_0 = 2$ kann daher das Ziel $I = 0$ nie erreicht werden.

Aufgabe 6 Im Landtag von Sachringen hat jeder Abgeordnete höchstens drei Feinde. Man zeige, dass man den Landtag in zwei Häuser einteilen kann, so dass jeder Abgeordnete höchstens einen Feind im eigenen Hause hat!

Lösung: Anfangs teilen wir die Abgeordneten beliebig ein. Es sei H die Gesamtsumme der Anzahl der Feinde, die jeder in seinem eigenen Haus hat. Angenommen A hat zumindest zwei Feinde in seinem eigenen Haus. Wenn A das Haus wechselt, so verringert sich H. Dieses Verringern kann nicht beliebig lange fortgesetzt werden. Wenn H sein Minimum angenommen hat, dann ist die gewünschte Verteilung erreicht.

Aufgabe 7 Angenommen, die vier ganzen Zahlen a, b, c, d sind nicht alle gleich. Wir starten mit dem Quadrupel (a, b, c, d) und ersetzen es durch $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Dann wird mindestens eine Zahl des Quadrupels beliebig groß.

Aufgabe 8 Jede der Zahlen $a_1, \dots, a_n$ ist 1 oder -1 und es gilt

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Man beweise, dass $4 \,|\, n$.

Aufgabe 9 $2\,n$ Botschafter sind zu einem Bankett eingeladen. Jeder Botschafter hat höchstens $n - 1$ Feinde.
Man beweise, dass die Botschafter so an einem runden Tisch Platz nehmen können, dass keiner von ihnen neben einem seiner Feinde sitzt!

Aufgabe 10 Wir starten mit einem Quadrupel (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen und gehen über zu $(|a - b|, |b - c|, |c - d|, |d - a|)$. Endet dieser Prozess stets bei $(0, 0, 0, 0)$?

Aufgabe 11 Auf einem $n \times n$-Feld sind die Zahlen $a_{ij} = \pm 1$ für $i, j = 1, \dots, n$ eingetragen. Wir bezeichnen die Produkte der Zahlen der i-ten Zeile mit α_i und die der j-ten Spalte mit β_j. Für ungerades n beweise man, dass

$$s = \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j$$

stets von Null verschieden ist!

Lösung: Für alle i, j sei zunächst $a_{ij} = +1$. Dann ist $s_0 = n + n = 2n \equiv 2 \pmod 4$. Sei nun (a_{ij}) beliebig. Ändert man bei genau einem a_{ij} das Vorzeichen, so verändern sich α_i und β_j jeweils um 2. Daher gilt $s' - s \in \{-4, 0, 4\}$. Also ist stets $s' \equiv s \pmod 4$ und daher niemals $s_1 \equiv 0 \pmod 4$.

Aufgabe 12 Auf einem Kreis seien zyklisch 4 Einsen und 5 Nullen angeordnet. Zwischen zwei Zahlen schreibt man nun ihre Summe modulo 2 und löscht die alten Zahlen.
Man zeige, dass zu keinem Zeitpunkt 9 Nullen auftauchen!

Lösung: Die Invariante ist $s := \sum_{k=1}^{9} a_k \pmod 2$, wobei a_k die k-te Zahl modulo 2 auf dem Kreis ist. Nach dem ersten Schritt ist

$$s' = \sum_{k=1}^{9}(a_k + a_{k+1}) = 2\sum_{k=1}^{9} a_k \equiv 0 \pmod 2.$$

Angenommen, zu einem Zeitpunkt tritt zum ersten Male $(0, 0, \ldots, 0)$ auf. Dann muss der Vorgänger dieser Konfiguration gerade gleich $(1, \ldots, 1)$ gewesen sein. Die Zusatandssumme dieses Vorgängers ist aber gleich $s = 9 \equiv 1 \pmod 2$. Hingegen ist $s \equiv 0 \pmod 2$ vom zweiten Schritt an.

Aufgabe 13 Ein Computer kann die folgenden beiden Operationen mit natürlichen Zahlen durchführen:

1. Quadrieren,
2. Eine n-stellige Zahl x mit $n > 3$ geht über in $a + b$, wobei a die aus den ersten $n - 3$ und b die aus den letzten 3 Ziffern von x gebildete Zahl ist.

Kann man mit Hilfe dieses Computers aus der Zahl 604 die Zahl 703 erhalten?

Lösung: Wir betrachten die zweite Operation $1000a + b \mapsto a + b$. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist $999a$, also durch 27 und 37 teilbar. Der Rest modulo m, $m \in \{3, 9, 27, 37\}$ bleibt also bei der zweiten Operation erhalten. Bei der ersten Operation bleibt aber nur die Teilbarkeit bzw. Nicht-Teilbarkeit durch m erhalten. Nun sind aber 604 und 703 beide durch 9 und beide nicht durch 27 teilbar. Aber es ist $703 = 37*19$ aber $604 = 37*16+12$. Die gesuchte Invariante ist also die Teilbarkeit durch 37, die für die eine Zahl erfüllt ist, für die andere aber nicht. Der Computer kann also nicht die 604 in die 703 überführen.

Aufgabe 14 Zwei Personen spielen das folgende Spiel. An der Tafel steht die Zahl 2. Wer am Zug ist, ersetzt die Zahl n an der Tafel durch die Zahl $n + d$, wobei d ein beliebiger Teiler von n ist mit $1 \leq d < n$. Verloren hat, wer eine Zahl größer als 1991 an die Tafel schreibt.
a) Wer gewinnt bei genauem Spiel, der Anziehende oder sein Gegner?
b) Ersetze 1991 durch 1992 und beantworte dieselbe Frage!

Aufgabe 15 Gegeben sei eine beliebige Stellung des 15-er Schiebespiels — das ist ein 4×4-Quadrat mit 15 waagerecht oder senkrecht verschiebbaren Plastikquadraten, auf denen die Zahlen von 1 bis 15 geschrieben stehen. Das Spiel hat ein (quadratisches) Loch, das das Verschieben erst ermöglicht.
Man zeige, dass es nicht möglich ist, zwei Zahlen zu vertauschen unter Beibehaltung der Lage aller anderen Zahlen!

Lösung: Insbesondere bleibt die Lage des Loches erhalten. Jeder möglichen Konfiguration entspricht dann eine Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, 15\}$. Jede Kette von Operationen, die das Loch in sich selbst überführt, besteht aber aus einer *geraden* Anzahl von waagerechten und einer *geraden* Anzahl von senkrechten Zügen (Vertauschung von Loch und Scheibchen), da das Loch ja wieder seine ursprüngliche horizontale und vertikale Lage einnehmen soll. Dies liefert somit eine *gerade* Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, 15\}$. Die Vertauschung zweier Zahlen allein ist aber eine *ungerade* Permutation.

Aufgabe 16 (Vorschlag 1 zur Lagerolympiade.) Die Zahlen $1, \ldots, 2n$ seien in beliebiger Reihenfolge aufgeschrieben. Nun addiert man zu jeder Zahl seine Nummer in dieser Reihenfolge. Man beweise, dass dann mindestens zwei gleiche Summen modulo $2n$ auftreten!

Lösung: Die Summe der Summen hängt nicht von der gewählten Permutation $\pi \in S_{2n}$ ab und beträgt modulo $2n$

$$s := \sum_{k=1}^{2n} (k + \pi(k)) \equiv 2n(2n+1) \equiv 0 \pmod{2n}.$$

Angenommen, kein Rest unter diesen Summen $k + \pi(k)$ tritt doppelt auf, dann muss jeder Rest genau einmal auftreten, also ist andererseits

$$s = \sum_{k=1}^{2n} k \equiv 2n(2n+1)/2 \equiv n \pmod{2n}.$$

Dies widerspricht der obigen Rechnung.

Parkettierungen

Aufgabe 17 Entfernt man von einem 8×8 Quadrat die gegenüberliegenden Eckfelder, so lässt sich die verbleibende Fläche nicht mit 31 Dominosteinen überdecken.

Lösung: 31 Dominosteine überdecken stets 31 schwarze und 31 weiße Felder einer schachbrettartig gefärbten Fläche. Die oben beschriebene Restfläche hat jedoch 30 schwarze und 32 weiße Felder.

Aufgabe 18 (a) Ein 8×8 Brett lässt sich nicht durch 15 Rechtecke der Form 4×1 und ein 2×2 Quadrat überdecken.
(b) Ist ein Rechteck mit 2×2 und 4×1 Platten überdeckt, so kann man es nicht mehr überdecken, wenn man eine Platte der einen Sorte durch eine Platte der anderen Sorte ersetzt.

Lösung: Wir überdecken das Rechteck regelmäßig mit den Resten $0, 1, 2$ und 3 modulo 4. Jedes 4×1 Rechteck überdeckt dann in jeder Lage genau einen dieser Reste. Jedes 2×2 Quadrat überdeckt genau einen Rest zweimal und einen gar nicht. Daher ist ein Austausch nicht möglich.

Aufgabe 19 Kann man ein 8×8 Brett so mit 21 Rechtecken der Form 3×1 so auslegen, dass genau ein 1×1 Quadrat nicht überdeckt wird? Wenn ja, wo kann dieses Quadrat liegen?

Lösung: Man überdecke das Quadrat mit den Resten modulo 3 in regelmäßiger Weise. Dabei treten diagonal immer dieselben Reste auf: Beginnt man mit Rest 0 in der linken oberen Ecke und Rest 1 darunter, so hat man den Rest 0 genau $1 + 4 + 7 + 6 + 3 = 21$ Mal, den

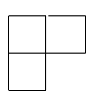
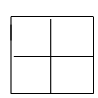
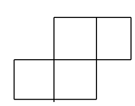
Rest 1 genau $2 + 5 + 8 + 5 + 2 = 22$ Mal und den Rest 2 schließlich $3 + 6 + 7 + 4 + 3 = 21$ Mal. Bei der Überdeckung bleibt also der Rest 1 einmal übrig. Das freie Feld muss also auf der Hauptdiagonalen $a1 - h8$ oder seinen dritten bzw. sechsten Nebendiagonalen (jeweils 2) liegen. Aus Symmetriegründen gilt dasselbe für die Hauptdiagonale $a8 - h1$ (was man etwa auch durch eine andere Parkettierung mit den Resten modulo 3 erreichen kann). Einzig die Felder $c3$, $f3$, $f6$ und $c6$ erfüllen beide Bedingungen. Eine mögliche Parkettierung mit 1×3 Rechtecken überlegt man sich schnell.

Aufgabe 20 Auf einem 8×8 Brett befindet sich in der rechten oberen Ecke ein schwarzer Spielstein. Mit jedem Zug wird ein weißer Spielstein auf ein freies Feld gesetzt. Dabei werden Spielsteine auf den benachbarten Feldern umgefärbt (schwarz zu weiß und umgekehrt). Kann man erreichen, dass das ganze Brett mit weißen Steinen besetzt ist?

(Bem.: Zwei Felder seien benachbart, wenn sie eine gemeinsame Ecke haben).

Lösung: Bei jedem Setzen eines Steins auf ein Feld werde der Mittelpunkt dieses Feldes mit denen der freien Nachbarfeldern verbunden, falls es noch welche gibt. Offenbar werden dabei beliebige zwei benachbarte Felder (mit Ausnahme des besetzten Eckfeldes) mit genau einer Strecke verbunden. Die vollständige Anzahl der Nachbarschaftsstrecken ist in jeden $n \times n$ Quadrat gerade, denn zu den 4 Eckfeldern gehören jeweils 3 Strecken, zu den $4(n-2)$ Randfeldern jeweils 5 und zu den $(n-1)^2$ inneren Feldern jeweils 8 Nachbarn. Da man doppelt gezählt hat, muss man noch durch 2 teilen. Es bleibt dennoch eine gerade Anzahl übrig. Durch das schwarze Eckfeld fallen 3 Nachbarschaften heraus. Die Gesamtzahl der Strecken ist also ungerade. Daher muss es einen in einem bestimmten Moment gesetzten Stein geben, der eine ungerade Anzahl von freien Nachbarfelder hat. Nach allen Umfärbungen (Besetzen der ungeraden Zahl von Nachbarfeldern) wird dieser Stein schwarz sein.

Aufgabe 21 Ein Quadrat der Seitenlänge $2n - 1$ wird durch Figuren der folgenden Bauart überdeckt

(1)  (2)  (3) 

Man beweise, dass dazu mindestens $4n - 1$ Figuren vom Typ (1) benötigt werden!

Lösung: Die folgenden n^2 Felder des gegebenen Quadrates seien markiert:
$a1, a3, \ldots, a(2n-1)$, $c1, c3, \ldots, c(2n-1)$, usw. Es seien x bzw. y die Anzahl der Steine vom Typ (1) bzw. vom Typ (2) und (3). Dann gilt

$$3x + 4y = 4n^2 - 4n + 1.$$

Die drei Steintypen können aber jeweils höchstens ein markiertes Feld überdecken. Somit gilt

$$x + y \geq n^2$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit 4 und setzt die obige Gleichung ein, so hat man:

$$4x + (4n^2 - 4n + 1) - 3x \geq 4n^2.$$

Hieraus folgt sofort $x \geq 4n - 1$.

Aufgabe 22 (a) Gegeben sei ein 6×6 Quadrat oder ein $k \times n$ Rechteck mit $k \leq 4$. Diese seien mit Dominos überdeckt. Man zeige, dass es stets eine Gittergerade gibt, die kein Domino in der Mitte zerschneidet!

(b) Man zeige, dass es für alle anderen Rechtecke Überdeckungen mit Dominos derart gibt, so dass alle Gittergeraden zumindest jeweils ein Domino in der Mitte zerteilen!

Lösung: (a1) Der Fall des 6×6 Quadrats. Wir zeigen: Schneidet eine Gittergerade ein Domino, so schneidet sie auch ein weiteres Domino. Durch jede Gittergerade wird das Domino in zwei Rechtecke geteilt, die eine *gerade* Zahl als Fläche besitzen. Zerschnittene Dominos auf einer Gittergeraden müssen also immer paarweise auftreten.
Nun gibt es aber 10 schneidende Gittergeraden. Angenommen, jede Gittergerade zerschneidet mindestens ein Domino, so schneidet sie auch ein zweites Domino. Da jedes Domino nur von höchstens einer Gittergeraden zerschnitten werden kann, existieren also mindestens 20 Dominos mit einer Fläche von 40. Dies ist aber ein Widerspruch, da das Quadrat nur die Fläche 36 hat.
(a2) Die Fälle der Rechtecke $1 \times n$ und $2 \times n$ überlegt man sich schnell anhand einer Skizze. Wir betrachten den Fall $3 \times 2n$ und nehmen wieder an, dass alle $2n - 1$ vertikalen Gittergeraden, mindestens ein Domino zerschneiden. Wie in (a1) argumentiert man, dass die $n - 1$ vertikalen Gittergeraden, die das Rechteck in zwei Rechtecke mit gerader Fläche zerschneiden wiederum genau 2 Dominos zerschneiden müssen und die anderen n mindestens ein Domino. Die Gesamtzahl der Dominos ist also

$$2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n = 3n - 2.$$

Andererseits müssen aber mindestens 4 senkrechte Dominos von den beiden waagerechten Gittergeraden zerschnitten werden. Somit hat man mindestens $3n + 2$ Dominos zu zerschneiden, es gibt aber nur $3n$.
(a3) Wir betrachten den Fall des $4 \times n$ Rechtecks. Die $n - 1$ kurzen Gittergeraden müssen dann immer mindestens 2 Dominos schneiden. Somit hat man mindestens $2n-2$ Dominos, die von den kurzen Gittergeraden geschnitten werden. Die drei langen Gittergeraden schneiden jeweils mindestens ein Domino, so dass man mindestens $2n+1$ Dominos hat; es gibt aber nur $2n$ Dominos.
(b) Es existieren Zerlegungen der 5×6 und 8×6 Rechtecke, wo jede Gittergerade mindestens ein Domino zerschneidet:

1	2	2	3	3
1	4	5	5	6
7	4	8	8	6
7	9	9	10	11
12	12	13	10	11
14	14	13	15	15

1	2	2	3	4	4	5	5
1	6	6	3	7	7	8	9
10	10	11	12	12	13	8	9
14	15	11	16	16	13	17	17
14	15	18	18	19	20	20	21
22	22	23	23	19	24	24	21

Jedes andere Rechteck lässt sich durch schrittweises Hinzufügen von zwei Zeilen bzw. Spalten aus den obigen beiden Rechtecken 5×6 und 6×8 erzeugen. Wir geben nun eine Überdeckung des Rechtecks $n \times (k+2)$ an, die aus einer Überdeckung des Rechtecks $n \times k$ (n Zeilen und k Spalten) konstruiert wird und ebenfalls die Eigenschaft hat, dass jede Gittergerade mindestens ein Domino schneidet. Wir fügen rechts 2 Spalten hinzu. In der Spalte, rechtsaußen, des Ausgangsrechtecks findet man ein vertikales Domino; (angenommen, es gäbe nur horizontale

Dominos in den letzten beiden Spalten, dann würde die vorletzte vertikale Gittergerade kein Domino schneiden, entgegen der Annahme). Dieses vertikale Domino wird um zwei Spalten nach rechts verschoben. Alle anderen freien Felder werden durch horizontale Dominos aufgefüllt. Man sieht, dass dadurch die beiden neu hinzugekommenen vertikalen Gittergeraden 2 bzw. $n-2$ Dominos durchschneiden, wogegen die horizontalen Gittergeraden nach wie vor dieselben Dominos zerschneiden.

Aufgabe 23 (Vorschlag 2 zur Lagerolympiade.) Ist es möglich, ein Rechteck mit den 5 verschiedenen Tetraminos zu überdecken?

Lösung: Nein, es ist nicht möglich. Das Rechteck hat 20 Einheitsquadrate und lässt sich daher schachbrettartig färben: 10 weiße und 10 schwarze Felder hat man. Nun überdecken aber das gerade, das quadratische, das L- und das S-Tetramino jeweils zwei schwarze und zwei weiße Felder. Nur das übriggebliebene T-Tetramino überdeckt von einer Farbe 3 Felder und von der anderen nur ein Feld. Daher ist die Bilanz der schwarzen und weißen Felder in jeder überdecketen Fläche unausgeglichen. Die Überdeckung ist somit nicht möglich.

Aufgabe 24 Man beweise, dass sich das 10×10 Quadrat nicht mit 25 T-Tetraminos überdecken lässt!

Lösung: (Nach Susanne Kürsten.) Bei der schachbrettartigen Färbung des Quadrates treten gleich viele schwarze wie weiße Felder auf. Somit muss die Anzahl der „schwarzen" T-Tetraminos gleich der Anzahl der „weißen" T-Tetraminos in der Überdeckung sein (Ein T-Tetramino in der Überdeckung heiße schwarz bzw. weiß, wenn es mehr schwarze bzw. mehr weiße Felder überdeckt). Da aber eine ungerade Zahl von T-Tetraminos zur Überdeckung verwendet wird, können nicht gleich viele schwarze wie weiße T-Tetraminos auftreten.

Aufgabe 25 Man zeige, dass sich der $10 \times 10 \times 10$ Würfel nicht mit 250 Quadern vom Format $4 \times 1 \times 1$ auslegen lässt.

Lösung: Der $10 \times 10 \times 10$ Würfel wird regelmäßig mit den Farben $0, 1, 2$ und 3 so gefärbt, dass jedes gerade (räumliche) Tetramino jeden Rest genau einmal überdeckt. Beginnt man in der hinteren, oberen, linken Ecke mit der Farbe 0 und geht in die 3 möglichen Richtungen jeweils mit 1, 2 und 3 weiter, so erhält man eine ausgeglichene Bilanz von gefärbten Elementarwürfeln bis auf die vordere, rechte, untere $2 \times 2 \times 2$-Ecke, die in den beiden Schichten, von hinten beginnend, die Färbung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

hat. Die Farben 1 und 2 überwiegen also, was bei einer Parkettierung mit geraden Tetraminos nicht möglich ist.

Attribution Section

schueler (2004-09-09): Contributed to KoSemNet

graebe (2004-09-09): Prepared along the KoSemNet rules

schueler (2016-01-30): Vermeintliche Lösung zu Aufgabe 7 wurde zu Aufgabe 8 korrigiert.