Eulersche Gerade und Feuerbachscher Kreis

Hans-Gert Gräbe, Leipzig

6. Januar 1999

Tripel von Geraden, wie etwa die Höhen, Seitenhalbierenden oder die Winkelhalbierenden eines Dreiecks $\triangle ABC$, fasst man unter dem Oberbegriff der *Ecktransversalen* zusammen. Neben den genannten gibt es noch eine Reihe anderer Ecktransversalen, die ebenfalls oft bemerkenswerte Eigenschaften besitzen.

Bekanntlich schneiden sich die drei Höhen, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten (letztere gehören allerdings nicht zu den Ecktransversalen) jeweils in einem Punkt. Drei solche Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen, bezeichnet man als *konkurrent.* Für die Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten ist dies leicht einzusehen, indem man ihre Eigenschaften als *geometrischer Bestimmungsort* heranzieht. Sie sind bekanntlich die Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Geraden (Winkelhalbierende) bzw. zwei gegebenen Punkten (Mittelsenkrechte) gleichweit entfernt sind. Aus diesen Beweisen folgt zugleich die Charakterisierung des jeweiligen Schnittpunkts als Mittelpunkt des In- bzw. Umkreises.

Auch für die Seitenhalbierenden ist ein Beweis der Konkurrenz nicht besonders schwierig, wenn man den Strahlensatz und seine Umkehrungen zu handhaben weiß. Der Schnittpunkt ist der Schwerpunkt, was sich besonders einfach aus einer vektorgeometrischen Interpretation ergibt, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen wollen.

Aufgabe 1 Überlege Dir die Details der jeweiligen Beweise.

1 Das Höhenfußpunktdreieck

Schwieriger ist es schon zu beweisen, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

Ein direkter Beweis könnte etwa wie folgt geführt werden:
Die Höhen aus B und aus C mögen sich im Punkt H schneiden. Die beiden Höhenfußpunkte E und F liegen dann auf zwei Thaleskreisen, einem über dem Radius $\overline{BC}$ und einem zweiten über dem Radius $\overline{AH}$.
Zeige, dass die jeweils durch a bzw. b markierten Peripheriewinkel in nebenstehender Figur gleichgroß sind und leite daraus ab, dass $\overline{AH}$ die dritte Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

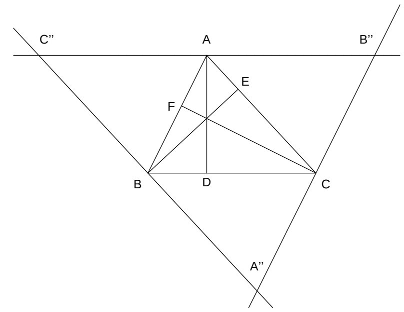


Bild 1

Aufgabe 2 Überlege Dir die Details dieses Beweises.

Neben diesem direkten Beweis gibt es noch zwei weitere Beweise, die Eigenschaften der Höhen nutzen.

Auf den drei Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ sei in den Eckpunkten jeweils die Senkrechte errichtet (Bild 2). Diese drei Geraden bilden ihrerseits ein Dreieck $\triangle A''B''C''$.

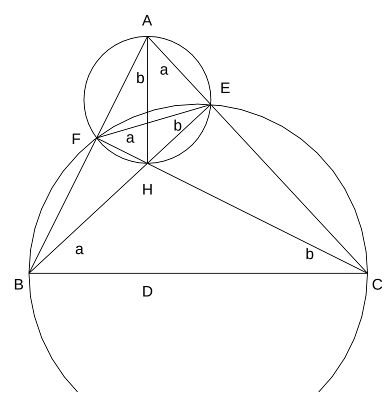


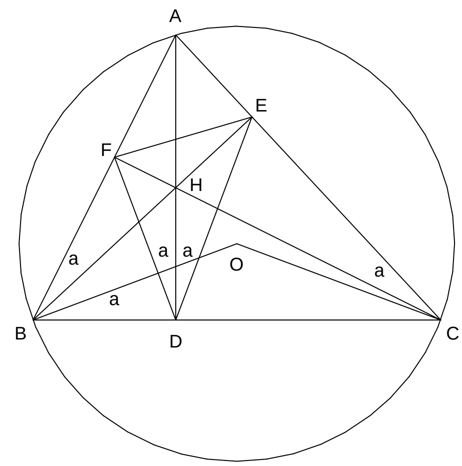
Bild 2

Aufgabe 3 Zeige (ohne die Konkurrenz der Höhen zu verwenden), dass die Höhen im alten Dreieck die Mittelsenkrechten im neuen Dreieck und somit konkurrent sind.

Ein ähnlich interessantes Dreieck, das sogenannte *Höhenfußpunktdreieck*, erhält man, wenn man die Höhenfußpunkte D, E und F miteinander verbindet.

Aufgabe 4 Zeige, dass die Höhen die Winkelhalbierenden im Höhenfußpunktdreieck (und damit konkurrent) sind.

Zeige dazu, dass die in nebenstehender Figur mit a markierten Winkel alle gleichgroß sind. (Hinweis: Betrachte die Thaleskreise über $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.)



Dieses Höhenfußpunktdreieck hat eine Reihe weiterer bemerkenswerter Eigenschaften:

1. Die Dreiecke $\triangle AEF$, $\triangle BDF$ und $\triangle CDE$ sind einander ähnlich.

2. Die Lote aus A auf EF, aus B auf DF und aus C auf DE sind konkurrent. (Sie schneiden sich im Umkreismittelpunkt O des Dreiecks $\triangle ABC$.)

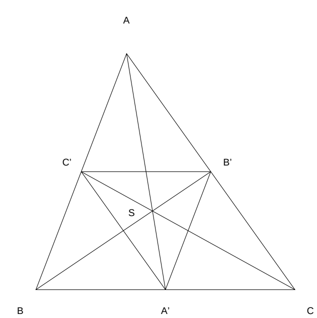
3. Bezeichnen wir mit α, β, γ die Größen der Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$, so gilt

$$|\angle OAH| = |\beta - \gamma|\,,\ |\angle OBH| = |\alpha - \gamma|\,,\ |\angle OCH| = |\alpha - \beta|\,.$$

Aufgabe 5 Beweise diese Beziehungen.

2 Das Mittendreieck und die Eulersche Gerade

Ein weiteres interessantes Dreieck, das in enger Beziehung zum Dreieck $\triangle ABC$ steht, erhält man, wenn man die drei Seitenmitten A', B', C' miteinander verbindet. Dieses sogenannte *Mittendreieck* $\triangle A'B'C'$ ist dem ursprünglichen Dreieck nicht nur ähnlich, sondern kann aus diesem sogar durch eine Streckung um den Faktor $-\frac{1}{2}$ gewonnen werden, wie man sofort erkennt, wenn man die einander entsprechenden Eckpunkte verbindet. In der Tat, diese Verbindungsgeraden sind die Seitenhalbierenden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen und von diesem im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden, woraus die Behauptung nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt.

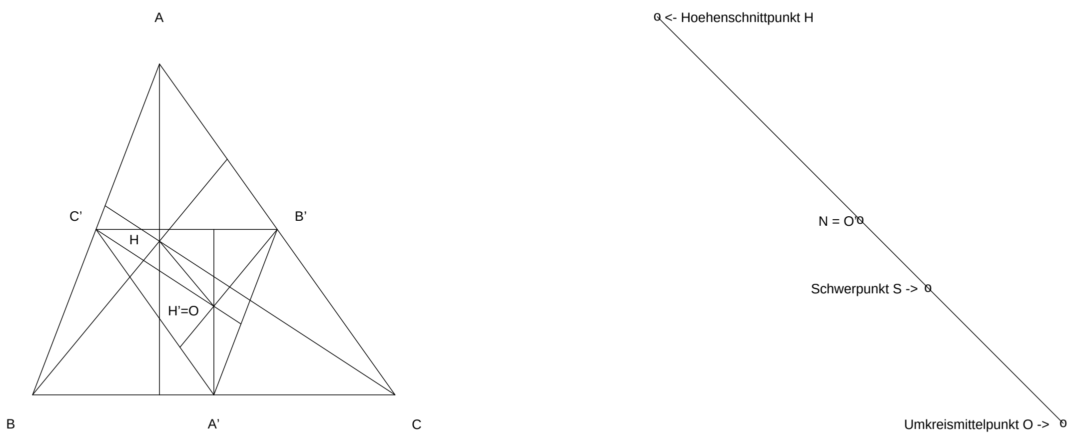


Das Mittendreieck

Zwei Figuren heißen *in Ähnlichkeitslage*, wenn man zwischen den Punkten der beiden Figuren eine solche Zuordnung treffen kann, dass einander entsprechende Strecken parallel sind. Die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ befinden sich also in Ähnlichkeitslage. Interessanterweise folgt aus der Parallelität homologer Strecken bereits die Existenz eines Streckungszentrums wie in unserem Fall (das man überdies durch Verbinden einander entsprechender Punkte finden kann).

Satz 1 (Satz von Desargue) *Befinden sich die Dreiecks $\triangle ABC$ und $\triangle RST$ in Ähnlichkeitslage, d.h. gilt $AB \parallel RS$, $AC \parallel RT$ und $BC \parallel ST$, so gehen die drei Geraden AR, BS und CT durch einen gemeinsamen Punkt (und werden von diesem im selben Verhältnis geteilt).*

Aufgabe 6 Leite diesen Satz aus dem Strahlensatz her. (Hinweis: Die Geraden AR und BS mögen sich in O schneiden. Zeige, dass dann OC durch T geht.)



Die Eulersche Gerade

Wenden wir uns nach diesem kleinen Einschub wieder unserem Mittendreieck zu. Um einzusehen, dass sich $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ in Ähnlichkeitslage befinden, benötigen wir die oben genannte Eigenschaft der Seitenhalbierenden nicht. Um etwa die Parallelität von AB und $A'B'$ zu zeigen, reicht eine einfache Argumentation in der Strahlensatzfigur mit Zentrum C usw. Hieraus und aus dem Satz von Desargue *folgt* nun, dass sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden und von diesem im Verhältnis $2:1$ geteilt werden. Wir erhalten einen neuen Beweis für die Konkurrenz der Seitenhalbierenden eines Dreiecks.

Aber auch die Verbindungsstrecke anderer Paare homologer Punkte geht durch dieses Streckungszentrum und wird von ihm im selben Verhältnis geteilt. Betrachten wir die Verbindungsstrecke der Höhenschnittpunkte H und H' der beiden Dreiecke. Da die Höhen im Mittendreieck gerade die Mittelsenkrechten im Ausgangsdreieck sind, fällt H' mit dem Umkreismittelpunkt O des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammen. Wir erhalten folgenden

Satz 2 *Die Verbindungsstrecke $\overline{OH}$ von Umkreismittelpunkt O und Höhenschnittpunkt H des Dreiecks $\triangle ABC$ geht durch dessen Schwerpunkt S und wird von diesem im Verhältnis $2:1$ geteilt.*

Die drei Punkte H, S und O liegen also auf einer gemeinsamen Geraden, die man als die **Eulersche Gerade** *bezeichnet.*

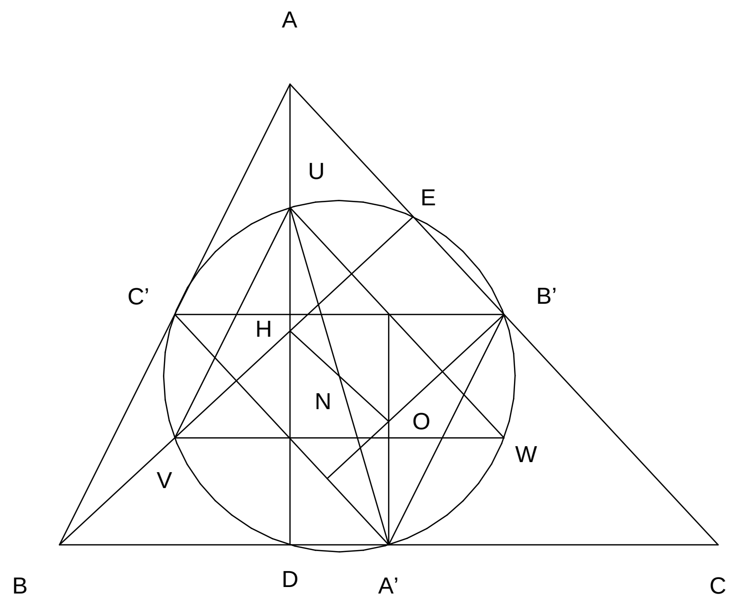
Den Umkreismittelpunkt O' des Mittendreiecks finden wir auf dieselbe Weise: Da die Verbindungsstrecke $\overline{OO'}$ ebenfalls durch das gemeinsame Streckungszentrum S verlaufen muss und von diesem im Verhältnis $2:1$ geteilt wird, liegt O' ebenfalls auf der Eulerschen Geraden und fällt mit dem Mittelpunkt N der Strecke $\overline{OH}$ zusammen. Die Details erschließen sich leicht aus nebenstehender Figur.

3 Der Feuerbachsche Kreis

Das Mittendreieck entstand aus $\triangle ABC$ durch Streckung mit dem Zentrum S. Strecken wir es um den Faktor $\frac{1}{2}$ mit dem Zentrum H, so gehen die Eckpunkte A, B, C in die *Mitten der oberen Höhenabschnitte* U, V, W über. Diese Punkte sind bemerkenswert, weil sich dort die Zentren der Thaleskreise befinden, die sich z.B. für die Lösung der Aufgabe 2 als nützlich erwiesen.

Offensichtlich befinden sich das Dreieck $\triangle UVW$ und das Mittendreieck $\triangle A'B'C'$ in Ähnlichkeitslage mit dem Faktor $\frac{1}{2} : -\frac{1}{2} = -1$, d.h. beide Dreiecke gehen durch eine Punktspiegelung an ihrem gemeinsamen Streckungszentrum, dessen Lage wir sogleich bestimmen wollen, ineinander über. Da wir den Streckungsfaktor schon kennen, finden wir das Zentrum als Mittelpunkt jeder Strecke, die Original- und Bildpunkt miteinander verbinden. Offensichtlich ist H der Höhenschnittpunkt im Dreieck $\triangle UVW$. Da wir schon wissen, dass O der Höhenschnittpunkt im Dreieck $\triangle A'B'C'$ ist, erhalten wir also als Streckungszentrum in diesem Fall den uns bereits wohlbekannten Punkt N. $\triangle UVW$ entsteht also durch Drehung von $\triangle A'B'C'$ um N um einen Winkel von $180°$.

Wir erinnern uns, dass N zugleich der Umkreismittelpunkt von $\triangle A'B'C'$ ist. Der Umkreis dieses Dreiecks ist damit zugleich Umkreis des Dreiecks $\triangle UVW$. Ein Kreis, der durch 6 derart bemerkenswerte Punkte in einem Dreieck verläuft, verdient einen eigenen Namen. Man nennt diesen Kreis den *Feuerbachschen Kreis*. Auf nebenstehender Figur erkennen wir, dass er (in dieser Figur) drei weitere bemerkenswerte Punkte passiert, die Höhenfußpunkte. Das ist kein Zufall: Da $A'U$ ein Durchmesser des Feuerbachkreises ist, muss nach dem Thalessatz der Höhenfußpunkt D auf dessen Peripherie liegen. Ähnliches gilt für die beiden anderen Höhenfußpunkte E und F.



Der Feuerbachsche Kreis

Satz 3 *Der Feuerbachkreis ist der gemeinsame Umkreis des Mittendreiecks und des Höhenfußpunktdreiecks. Er verläuft weiterhin durch die drei Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte.*

Dass der Feuerbachkreis der gemeinsame Umkreis des Mittendreiecks und des Höhenfußpunktdreiecks ist, wusste schon Euler (1765), weshalb man diesen Kreis oft auch den Eulerschen Kreis nennt. Wahrscheinlich war diese Eigenschaft aber bereits vorher bekannt. Einen vollständigen Beweis aller Aussagen obigen Satzes findet man erstmals bei Poncelet (1821).

Feuerbach fand eine weitere wirklich bemerkenswerte Eigenschaft dieses Kreises, weshalb man heute seinen Namen mit diesem Kreis verbindet: Der Feuerbachkreis berührt den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks $\triangle ABC$. Ein Beweis kann an dieser Stelle nicht geführt werden, weil dazu weitere (elementargeometrische) Hilfsmittel erforderlich sind.

Da der Feuerbachkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ aber zugleich der Feuerbachkreis der Dreiecke $\triangle ABH$, $\triangle ACH$ und $\triangle BCH$ ist (warum?), berührt er auch deren In- und Ankreise, also insgesamt 16 spezielle Kreise. Ein wirklich bemerkenswertes geometrisches Objekt !

Attribution Section

graebe (2004-09-09): Contributed to KoSemNet