Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Schuljahr 2014/2015

Vierter Zirkelbrief: Wahlmathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Was sind Wahlen?

Bei Wahlen geht es darum aus einer Menge von Meinungen oder Präferenzen eine Entscheidung zu treffen. Dies kann einerseits die Antwort auf die Frage sein, welche Pizza drei Freunde am Abend bestellen wollen, kann aber auch andererseits die Wahl eines neuen bayrischen Ministerpräsidenten sein, wo Millionen von Menschen sich zwischen mehreren Alternativen entscheiden müssen. Darüber hinaus werden manchmal ganze Mengen von Menschen gewählt, also zum Beispiel bei der Wahl eines Komitees.

Mathematisch gesprochen gibt es eine endliche Menge von Wählern (engl. *voters*) V sowie eine endliche Menge von Kandidaten (engl. *candidates*) C. In einer *einfachen* Wahl geht es darum genau eine Person zu wählen. Dazu hat jeder Wähler $v \in V$ ein Ranking der n Kandidaten $c_1, \ldots, c_n \in C$, zum Beispiel könnte v denken, dass $c_3 > c_1 > c_{1000} > \cdots > c_n$ ist. Wir wollen annehmen, dass jeder Wähler eine echte Reihung vornimmt und nicht zwei Kandidaten als gleichwertig betrachtet. Wie ein Wähler zu dieser Reihung kommt ist natürlich eine andere Frage, die stark vom Problem sowie dem individuellen Wähler abhängt und soll hier nicht weiter betrachtet werden. Eine *Wahlprozedur* ist jetzt ein

Algorithmus, der aus der Menge der Reihungen der Kandidaten durch alle Wähler einen Gewinner aus der Menge der Kandidaten bestimmt.

Gemeinhin könnte man denken, dass es offensichtlich ist, wie das geht. Schauen wir uns doch dazu mal ein paar Beispiele an.

Beispiel. Es gibt genau zwei Kandidaten und N Wähler. Es gewinnt, wer mehr Stimmen hat. Falls N gerade ist, kann es offensichtlicherweise ein Unentschieden geben.

Beispiel. Drei Wähler Anna, Bert und Cleopatra stimmen über drei „Kandidaten“ Apfelsaft, Birnensaft und Clementinensaft ab. Was passiert, wenn die Präferenzen der drei wie folgt aussehen:

Anna:	Apfelsaft	$>$	Birnensaft	$>$	Clementinensaft
Bert:	Birnensaft	$>$	Clementinensaft	$>$	Apfelsaft
Cleopatra:	Clementinensaft	$>$	Apfelsaft	$>$	Birnensaft

Wir sehen, dass es schwierig ist, hier einen Gewinner auszumachen. Da alle Getränke gleichoft „am meisten“ gemocht werden, bekommen wir ein Unentschieden. Doch egal wie wir die weiteren Präferenzen miteinbeziehen, wir bekommen kein zufriedenstellendes Ergebnis solange wir fordern, dass die individuellen Wahlen gleich mit einbezogen werden sollen.

Bemerkung. Falls wir im letzten Beispiel die Meinung von Anna einfach übernehmen und die von Bert und Cleopatra ignorieren, erhalten wir natürlich ein Ergebnis – nämlich das von Anna. Das ist zwar nicht demokratisch, aber a priori auch erlaubt als Wahlsystem. Man würde dieses System wohl eher mit „Dikatur“ umschreiben. Grundsätzlich sind jedoch auch solche Sachen als Wahlsysteme zugelassen.

2 Wahlsysteme

Ein *Wahlsystem* ist eine Abbildung oder Vorschrift, die aus den individuellen Vorlieben oder Präferenzen der Wähler ein Ergebnis produziert. Hier werden wir keine sogenannten Verhältniswahlsysteme anschauen, bei denen zum Beispiel Plätze in einem Parlament an Parteien verteilt werden, sondern so genannte einfache Wahlen. Dies bedeutet, dass das Ergebnis aus einer Reihung der Kandidaten besteht, zum Beispiel bei einer Präsidentschaftswahl, bei einem Sportwettkampf oder einer Gruppenentscheidung zum Pizza essen.

Im folgenden werden wir einige einfache und bekannte Wahlsysteme für solche einfachen Wahlen ansprechen. Die meisten sind recht naheliegend und einige würden euch mit Sicherheit auch selbst einfallen.

Wir bezeichnen wieder mit V die Menge der Wähler, mit C die Menge der Kandidaten und benutzen $>$ und $<$ um Präferenzen für Kandidaten sowie Wahlergebnisse zu beschreiben.

2.1 Absolute und einfache Mehrheit

Bei der *absoluten Mehrheitswahl* gewinnt derjenige, der mehr als die Hälfte aller Stimmen bekommt. Das heißt, dass alle Wähler genau einen Kandidaten nennen, für welchen sie abstimmen und dann wird ausgezählt. Offensichtlicherweise ist es möglich, dass bei zwei Kandidaten beide gleich viele Ergebnisse erhalten und bei drei oder mehr Kandidaten könnte niemand mehr als die Hälfte der Stimmen bekommen. In diesen Fällen gibt es kein Ergebnis was offensichtlich schlecht ist.

Eine sehr einfache Methode, dies zu verbessern, ist die *einfache Mehrheitswahl*. Bei dieser gibt wieder jeder Wähler eine Stimme ab und danach gewinnt derjenige Kandidat, welcher die meisten Stimmen bekommt. Gleichheit ist möglich, aber bei größeren Wählermengen sehr unwahrscheinlich. Das Problem mit dieser Methode ist, dass es möglich ist, dass ein Kandidat knapp gewinnt, welcher von allen anderen Wählern jedoch sehr wenig gemocht wird. Dadurch denken viele Wähler, dass die „falsche“ Person gewählt wurde. Dies ist tatsächllich ein häufig beobachtetes Phänomen.[1]

2.2 Fortlaufende Wahl

Eine weitere Möglichkeit ist, eine einfache Mehrheitswahl durchzuführen, danach die Kandidatenliste zu verkleinern (zum Beispiel nur die beiden besten Kandidaten zu behalten) und danach noch einmal zwischen diesen „Gewinnern“ der ersten Runde abzustimmen. Dies kann natürlich beliebig oft wiederholt werden. Ein solches Wahlsystem nennt man *fortlaufendes Wahlsystem*.

Ein bekanntes Beispiel dafür ist die amerikanische Präsidentschaftswahl, wo die einzelnen Parteien sogenannte „primaries“ abhalten und am Ende nur zwischen deren Gewinnern gewählt wird. Dies schwächt einige negative Effekte des einfachen Mehrheitswahlrechtes für mehr als zwei Kandidaten ab. In der Realität gibt es einen Zeitraum zwischen den Wahlen, in welchem die Wähler ihre Meinung aufgrund der ersten Wahl wieder ändern können. Wir wollen hier zur Vereinfachung annehmen, dass dies nicht der Fall ist.

2.3 Hare-Methode

Bei der *Hare-Methode* gibt jeder Wähler eine Präferenzliste der Kandidaten ab. Bei uns soll eine solche Liste alle Kandidaten in eine Reihenfolge bringen, wobei keine Unentschieden erlaubt sind. Als Ergebnis liefert Hare uns eine Liste der Kandidaten und nicht nur einen Gewinner.

Zunächst wird der Kandidat mit den wenigsten ersten Plätzen auf den abgegebenen Listen auf den letzten Platz des Wahlergebnisses gesetzt. Danach wird dieser Kandidat aus allen Listen entfernt und man schaut, welcher Kandidat jetzt die wenigsten ersten Plätze auf den neuen Listen hat. Dieser Kandidat wird über den zuerst entfernten Kandidaten gesetzt und dann aus den Listen entfernt. So verfährt man bis nur noch zwei Kandidaten übrig bleiben, zwischen welchen man eine einfache Mehrheitswahl durchführt. Natürlich benötigt man spezielle Regeln für gleiche Anzahlen von ersten Plätzen. Zum Beispiel könnte man zwei Kandidaten auf dem gleichen Listenplatz erlauben.

[1] Quelle?

Der Vorteil vom Hare-System ist, dass zum Beispiel die folgende Situation besser gelöst wird. In der folgenden Tabelle gibt es drei Kandidaten und in der ersten Reihe stehen die Anteile der Wähler welche sich für die jeweilige Reihung ausgesprochen haben.

29%	31%	40%
A	B	C
B	A	A
C	C	B

Wenn man ein einfaches Wahlsystem anwendet, gewinnt offensichtlicherweise C. Es könnte aber sein, dass die Kandidaten A und B zum linken Lager und C zum rechten Lager gehört. Daher bevorzugen insgesamt 60% einen der Kandidaten A und B deutlich vor C. Wendet man die Hare-Methode an, wird zunächst A rausgeschmissen, das heißt auf den letzten Platz gesetzt, und im zweiten Auszählen gewinnt B mit 60:40 vor A. Das Phänomen, dass die gesamte Präferenzliste relevant ist, passiert in der Realität recht häufig, weshalb viele Menschen bei einfachen Mehrheitswahlen das Gefühl bekommen, dass die falsche Person gewählt wurde.

2.4 Coombs-Methode

Die Coombs-Methode ähnelt Hare, jedoch funktioniert sie „rückwärts“. Alle Wähler geben wieder vollständige Präferenzlisten ab. Als erstes wird überprüft ob ein Kandidat eine absolute Mehrheit hat. Falls ja, gewinnt dieser die Wahl, falls nicht wird zunächst derjenige Kandidat mit den meisten *letzten* Plätzen entfernt und auf den insgessamt letzten Platz gesetzt. Danach wird der letzte Schritt wiederholt mit den aktualisierten Präferenzlisten.

Aufgabe 1. *Ein erstes Beispiel*

Wer gewinnt bei den folgenden Verteilungen von 31 Präferenzlisten mit der einfachen Mehrheitsmethode, der fortlaufenden Wahl, der Hare und der Coombs-Mehtode?

10	8	7	6
A	B	C	D
D	D	B	C
B	C	D	B
C	A	A	A

2.5 Condorcet-Methode

Definition (Condorcet-Gewinner und -Verlierer)**.** Bei einem Wahlsystem, in welchem vollständige Präferenzlisten abgegeben werden ist ein *Condorcet-Gewinner* (benannt nach dem französischen Philosophen und Mathematiker Nicolas de Condorcet) ein Kandidat, welcher in allen paarweisen *runoffs* gegen alle anderen Kandidaten gewinnt. Analog ist ein *Condorcet-Verlierer* ein Kandidat, der gegen alle anderen Kandidaten in runoffs verliert.

Bemerkung. Es muss nicht immer einen Condorcet-Gewinner oder -Verlierer geben. Zum Beispiel gibt es keinen Condorcet-Gewinner beim folgenden Wahlergebnis:

5	4	3
A	B	C
B	C	A
C	A	B

Die Condorcet-Methode besteht nun darin, einen Condorcet-Gewinner als Gewinner der Wahl zu deklarieren. Da dies den offensichtlichen Nachteil hat, dass das nicht immer geht, gibt es auch noch die *erweiterte Condorcet-Methode*: Dabei führen wir zunächst alle paarweisen runoffs durch. Danach ordnen wir diese nach der Größe des Vorsprungs. Dann gehen wir diese Liste Schritt für Schritt durch und bauen uns eine Ergebnisliste nach der folgenden Regel zusammen. Wenn $X > Y$ gilt, dann muss im Ergebnis auch $X > Y$ sein, außer aus den bisherigen Schritten folgte bereits $Y > X$. Wenn wir dies bis zum Schluss durchgehen erhalten wir genügend Bedingungen um die Endliste eindeutig festzulegen.

Beispiel. Aus dem Umfrageergebnis

5	7	4	3
A	B	A	C
B	A	C	B
C	C	B	A

folgt die Liste $A > C$ mit $16 : 3$, $B > C$ mit $12 : 7$ sowie als letztes $B > A$ mit $10 : 9$. Im ersten Schritt sehen wir also $A > C$ und im zweiten $B > C$. Da dies die Reihenfolge von A und B noch nicht festlegt, geschieht dies erst im dritten Schritt. Das Endergebnis ist also $B > A > C$.

2.6 Bucklin-Methode

Die *Bucklin-Methode* besteht darin, wieder einen Gewinner aus den vollständigen Präferenzlisten der Wähler zu erzeugen. Dazu werden zunächst nur die ersten Plätze zusammengezählt. Hat ein Kandidat dabei eine absolute Mehrheit, gewinnt dieser die Wahl. Falls nicht, werden im nächsten Schritt die zweiten Plätze dazu addiert. Jetzt wird wieder überprüft, ob ein Kandidat eine absolute Mehrheit hat, wobei immer noch die Hälfte der Wähler als Quorum oder als notwendiges Minimum an Stimmen nötig ist. Dies wird so lange wiederholt bis es einen Gewinner gibt, wobei bei Erreichen des Quorums von mehreren Kandidaten, derjenige gewinnt, welcher mehr Stimmen hat.

2.7 Die Borda-Methode

Eine weitere naheliegende Wahlmethode ist die *Borda-Methode*[2], welche euch wohl aus dem Sport bekannt vorkommen dürfte.

Dabei erhält jeder Kandidat von jeder abgegeben Präferenzliste aller Kandidaten Punkte nach einem vorher festgelegten Muster, zum Beispiel bei n Kandidaten n Punkte für den ersten Platz, $n-1$ für den zweiten und so weiter bis 1 Punkt für den letzten. Dann werden alle Punkte addiert und die Kandidaten nach der Anzahl der erzielten Punkte gereiht.

Beispiel. Aus dem Umfrageergebnis

5	7	4	3
A	B	A	C
C	C	C	B
B	A	B	A

mit der Borda-Zählung $3, 2, 1$ erhält A 37 Punkte, B 36 und C 41, also gewinnt C. Wenn man aber mit $4, 2, 1$ zählt, um dem Gewinner einen Bonus zu geben, so ist das Endergebnis $A : 46, B : 43, C : 44$, so dass A gewinnt.

3 Eigenschaften von Wahlen

In diesem Kapitel werden wir ein paar sinnvolle Eigenschaften von Wahlmethoden kennenlernen und sehen, welche Wahlmethoden diese erfüllen. Im Kapitel danach werden wir dann untersuchen ob es überhaupt Wahlverfahren gibt, die alle diese Eigenschaften erfüllen. Ein *Profil* bezeichnet die Menge der abgegebenen Präferenzlisten, also ein mögliches Wahlergebnis.

Aufgabe 2.

Wer gewinnt beim folgenden Ergebnis im Falle eines absoluten Mehrheitswahlrechts, eines einfachen Mehrheitswahlrechts, einer fortlaufenden Wahl, der Hare-Methode, des Borda-Zählens und der Condorcet-Methode?

36	24	20	18	8	4
A	B	C	D	E	E
D	E	B	C	B	C
E	D	E	E	D	D
C	C	D	B	C	B
B	A	A	A	A	A

[2] Unter anderem entwickelt in 1770 von Jean-Charles de Borda, einem französischem Mathematiker und Sozialforscher.

3.1 Allgemeine Eigenschaften und Annahmen

3.2 Konkrete sinnvolle Eigenschaften von Wahlsystemen

Eine sehr wichtige Annahme ist, dass unser betrachtetes Wahlsystem sich nicht dafür interessiert, *welcher genaue* Kandidat ein Ergebnis erzielt. Wenn ich also in einem Profil P die Kandidaten A und B vertausche, dann sollte das Wahlsystem die Ergebnisse von A und B genau vertauschen. Dieses Axiom werden wir mit INV abkürzen.

Condorcetgewinner- und Condorcetverliererkriterium

Da Condorcet-Gewinner und -Verlierer recht natürliche Kandidaten für echte Gewinner bzw. Verlierer sind, macht es Sinn, das folgende Kriterium zu definieren.

Definition. Ein Wahlverfahren erfüllt das *Condorcet-Gewinnerkriterium* (repektive das *Condorcet-Verliererkriterium*), wenn bei jedem Abstimmungsergebnis ein Condorcet-Gewinner (bzw. Condorcet-Verlierer) auch vom Wahlverfahren als Gewinner (bzw. Verlierer) bestimmt wird.

Aufgabe 3.

Welches der folgenden Wahlsysteme erfüllt das Condorcet-Gewinner bzw. -Verliererkriterium? Finde entweder ein Gegenbeispiel oder einen Beweis.

a) Hare-Methode

b) Borda-Zählung

c) Einfache Mehrheitswahl

d) Absolute Mehrheitswahl

e) Bucklin-Methode

Kein-Diktator-Annahme

Die *Kein-Diktator-Annahme* besagt, dass kein Wähler die Fähigkeit besitzt, das Wahlergebnis zu bestimmen. Angenommen, wir betrachten ein Profil P und einen Wähler X sowie zwei Kandidaten A und B. X ist *pivotal* bezüglich A und B im Profil P, wenn im Fall, dass alle Wähler außer X genauso abstimmen wie in P das Wahlsystem A und B immer genauso anordnet wie es bei X der Fall ist. Ein Wähler X heißt *sehr pivotal* bezüglich A, wenn X pivotal bezüglich aller Paare von Kandidaten mit A ist. Ein Wähler X ist ein *lokaler Diktator* im Profil P, falls X pivotal für alle Paare von Wählern in P ist. Ein *Diktator* ist ein Wähler, welcher ein lokaler Diktator für alle Profile P ist.

Die Kein-Diktator-Annahme besagt nun, dass es keinen Diktator geben darf.

Annahme über die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (IIA)

Die Annahme über *Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen* ist eine weit verbreitete Annahme in der Sozialtheorie. Für uns besagt sie folgendes. Sei P ein Profil und A und

B beliebige Kandidaten. Angenommen das Wahlsystem bevorzugt $A > B$ in P. Jetzt sei P' ein Profil, das sich von P unterscheiden darf außer was die individuellen Präferenzen von A und B betrifft. Das heißt, dass jeder einzelne Wähler A und B genauso vergleicht wie in P, aber der Rest darf beliebig sein. Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen besagt jetzt, dass das Wahlsystem für P' dann immer noch $A > B$ ausgibt.

Pareto-Effizienz

Mit *Pareto-Effizienz* bezeichnet man die Eigenschaft, dass wenn alle Wähler in eine Profil $A > B$ bevorzugen, dann darf das Wahlsystem nicht $B > A$ ausgeben.

Monotonie

Angenommen man betrachtet ein Profil P sowie einen Kandidaten A. Dieser Kandidat wird vom Wahlsystem auf einen gewissen Platz gesetzt. Ändert man nun das Profil dahingehend ab, dass ein oder mehrere Wähler A höher einschätzen als zuvor (und niemand A nach unten setzt), dann sollte das Wahlsystem A im neuen Profil nicht schlechter bewerten als zuvor. Dies nennt man *Monotonie*. Anschaulich bedeutet dies, dass die Position einen Kandidaten nicht dadurch verschlechtert werden kann, indem für ihn besser abgestimmt wird.

Nichtaufzwingungsannahme

Mit *Nichtaufzwingung* meint man, dass das Wahlystem jede mögliche Ergebnisliste ausgeben kann. Wenn es also n Kandidaten gibt, existieren Profile, sodass alle $n!$ möglichen Wahlergebnisse angenommen werden.

4 Die Sätze von Arrow und Gibbard–Satterthwaite

4.1 Der Satz von Arrow

Lemma. Ein Wahlsystem, welches (IIA), (INV) sowie Monotonie erfüllt, ist Pareto-effizient.

Beweis. Wir beweisen die Aussage indirekt. Sei also P ein Profil, in welchem alle Wähler $A > B$ ranken, das Wahlsystem jedoch $B > A$ entscheidet. Wegen IRR können wir A in allen Präferenzlisten nach unten verschieben bis es direkt über B liegt. Dann erhalten wir ein Profil P', welches immer noch zu $B > A$ führt. Jetzt ändern wir das Profil weiter ab, so dass B über A in allen Reihungen rutscht. Wegen der Monotonievoraussetzung muss B im Endergebnis immer noch an der gleichen Stelle sein. Wegen IRR wiederum ist die Reihenfolge von B und allen Kandidaten, welche oberhalb von B waren immer noch die gleiche, woraus folgt, dass A Kandidat B nicht überholt haben kann, es gilt also immer noch $B > A$. Danach nutzen wir wieder IRR um A an die Stellen in den Rankings zu bewegen, wo B am Anfang war. Das Endergebnis ist ein Profil P', welches identisch zu P ist, außer dass A und B vertauscht sind und das Wahlergebnis sagt $B > A$. Andererseits muss wegen INV $A > B$ gelten, was einen Widerspruch darstellt. $\square$

Lemma. Pareto-Effizienz impliziert Nichtaufzwingung.

Aufgabe 4. *Ein kleiner Beweis*

Beweise das letzte Lemma.

Lemma. Betrachte ein Wahlsystem mit Pareto-Effizienz sowie Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Angenommen in einem Profil P gibt es einen Kandidaten C, welcher von allen Wählern entweder ganz oben oder ganz unten eingeordnet wird. Dann wird C entweder auf den ersten oder den letzten Platz gesetzt.

Beweis. Angenommen nicht, dann gäbe es Kandidaten A und B, welche im Endergebnis des Wahlsystems für P gereiht werden als $A > C > B$. Dann kann man A und B in allen Rankings so abändern, dass immer $B > A$ gilt. Da C jeweils ganz oben oder ganz unten ist, hat sich also nichts zwischen C und B beziehungsweise C und A geändert, weshalb wegen (IRR) immer noch $A > C$ und $C > B$ gilt und demnach $A > B$. Wegen Pareto-Effizienz gilt aber in dem neuen Profil $B > A$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. □

Satz. Jedes Rangordnungswahlsystem mit mindestens drei Kandidaten, welches Pareto-effizient ist und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, besitzt einen Diktator.

Bemerkung. Ursprünglich hatte Arrow diesen Satz mit den Bedingungen Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, Monotonie und Nichtaufzwingung formuliert. Laut den vorherigen Lemmata ist diese Version mit Pareto-Effizienz also eine stärkere Aussage.

Beweis. Angenommen, es gibt $m \geq 2$ Wähler. Wir stellen uns vor, dass die Wähler in einer festen Reihenfolge aufgestellt und durchnummeriert sind mit den Bezeichnungen X_1 bis X_m. Zuerst nehmen wir an, dass Kandidat B auf jedem Stimmzettel den letzten Platz belegt. Dann ist auf jedem Stimmzettel Kandidat B schlechter als jeder andere Kandidat und muss daher auch in der Gesamtreihenfolge den letzten Platz belegen (wegen der Pareto-Effizienz). Wir betrachten nacheinander die Profile P_1 bis P_m, wobei in dem Szenario P_k die Wahl wie folgt ausgeht.

Wähler 1	Wähler 2	...	Wähler k	Wähler k+1	...	Wähler m
$B > \cdots$	$B > \cdots$	...	$B > \cdots$	$\cdots > B$	...	$\cdots > B$

In dieser Tabelle steht $\cdots$ für die gleiche Reihung der restlichen Kandidaten. Kurz zusammengefasst: Im Profil P_k stimmen die ersten k Wähler mit ihrer ersten Stimme für den Kandidaten B, die restlichen $m-k$ haben Kandidat B an den Schluss ihrer Liste gesetzt.

Wegen des vorigen Lemmas muss in allen m Profilen im Wahlergebnis B entweder am Anfang oder am Schluss der Liste sein. Wegen Pareto-Effizienz gilt, dass B im Profil P_0 an die letzte Stelle gewählt wird und in P_m an die erste Stelle. Daher gibt es ein Profil P_k, bei welchem B das erste Mal auf den ersten Platz gewählt wird. B ist damit letzter Platz in den Profilen P_0 bis P_{k-1} und erster in P_k.

X_k ist sehr pivotal für Kandidat B in P_{k-1}: Wir sehen, dass der Wähler X_j sehr pivotal für Kandidat B im Profil P_{k-1} ist, denn für jeden anderen Kandidaten A gilt, dass wenn wir alle Wahlen der anderen Kandidaten gleich lassen, das Wahlergebnis nur von Wähler X_k abhängt.

X_k ist pivotal für alle Paare von Kandidaten, die nicht B beinhalten, im Profil P_k: Betrachte wieder das Profil P_k sowie zwei beliebige Kandidaten A und C mit $A > C$ in der Wahl von X_k. Dann verändern wir das Profil P_k zum Profil Q, indem wir nur für X_k A auf den ersten Platz verlegen. Da sich das relative Ranking von A und C nicht verändert hat, ist die Reihung von A und C in Q die gleiche wie in P_k. Die Wahlergebnisse sehen jetzt also wie folgt aus:

X_1	...	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	...	X_m
$B > \cdots$	...	$B > \cdots$	$B > \cdots > A > \cdots > C > \cdots$	$\cdots > B$	...	$\cdots > B$
$B > \cdots$	...	$B > \cdots$	$A > B > \cdots > C > \cdots$	$\cdots > B$	...	$\cdots > B$

Wieder sind alle nicht notierten Abstimmungen bei beiden Profilen identisch. Das zweite Profil Q ergibt jetzt im Wahlergebnis $A > B$, weil die Reihung $A > B$ genau die gleiche ist wie in P_{k-1} und das Wahlsystem (IIA) erfüllt. Außerdem gilt in Q, dass $B > C$ gewählt wird, weil $B > C$ in allen Wahlergebnissen genauso wie in P_k. Daraus folgt also $A > C$, wenn X_k in P_k $A > C$ gewählt hat. Da man A und C vertauschen kann, geht das Argument genauso durch, womit man zeigt, dass X_k ein Paardiktator für alle Paare, die B nicht beinhalten, ist.

X_k ist pivotal für alle Paare von Kandidaten A und C, die nicht B beinhalten, in allen Profilen: Wir wissen, dass X_k pivotal für alle Paare von Kandidaten A und B in P_k sind, die nicht B beinhalten. Indem wir B in den Präferenzlisten im Profil P_k beliebig verschieben, können wir beliebige Profile erzeugen, da die einzige Bedingung war, dass B von $X_1, \ldots, X_k$ als erstes und von $X_{k+1}, \ldots, X_m$ als letztes gewählt wurde. Dabei verschieben wir nur B und ändern somit die Reihenfolgen von A und C nicht, wodurch das Wahlergebnis für A und C wegen (IIA) immer noch das gleiche ist wie das von X_k.

Wir bezeichnen jetzt X_k mit X_B, da k durch die anfangs gewählte Nummerierung sowie das Element B bestimmt wird. Alle bisherigen Argumente funktionieren für beliebige Kandidaten B!

Es gilt für alle Kandidaten A und B, dass $X_A = X_B$: Betrachte einen dritten Kandidaten $C \neq A, B$. Dann muss X_C ein Paardiktator für A und B sein nach dem letzten Schritt. Wir haben aber auch bewiesen, dass X_B ein Paardiktator im Profil P_k für alle Paare mit B ist, also zum Beispiel das Paar A und B. Daher muss $X_B = X_C$ sein.[3] Dies gilt für beliebige Kandidaten B und C. Dieser Wähler ist nun Paardikator für alle Paare in allen Profilen und damit ein Diktator. □

XXX Wahlsysteme aus Abschnitt 2 auf die Voraussetzungen überprüfen

[3] Dies gilt, weil es nicht „zu viele“ Diktatoren geben kann. Angenommen, zwei verschiedene Wähler X und Y sind Paardiktatoren für ein Paar von Kandidaten A und B. Die Situation, dass X wählt $A > B$ und Y wählt $B > A$ ergibt einen Widerspruch.